

有限生成の bimodule X が構成される von Neumann 環について.

九州大. 数理

米谷 和巳

(0)

Katayama と Pimsner は, 単位元を持つ C^* -環 A 上, A -値
右内積を持つ Hilbert A - A bimodule X が生成される C^* -環 O_X を定義し,
 O_X は以下を満たす universal な C^* -環として特徴付けられる.
(簡単のため, bimodule X は有限生成であるとして置く) (Kat), (Pi)

O_X は A と $\{S_\xi \mid \xi \in X\}$ で生成される universal な C^* -環で, O_X の生成元は
以下の条件を満たす:

- $S_\xi + S_\eta = S_\xi + S_\eta$, $S_{\lambda\xi} = \lambda S_\xi$ ($\lambda \in \mathbb{C}$)
- $S_a\xi = aS_\xi$, $S_\xi a = S_\xi \cdot a$ ($a \in A$)
- $S_\xi^* S_\eta = \langle \xi, \eta \rangle_A$
- $S_{\xi_1} S_{\xi_1}^* + \cdots + S_{\xi_n} S_{\xi_n}^* = 1$ ($\{\xi_i\}$ は X の右 A -基底).

ここで, A は von Neumann 環として置き, A 上 A -値左内積も持つ
有限生成 Hilbert A - A bimodule X が生成される von Neumann 環 (O_X と書くことにする) を構成する試みについて説明する.

faithful normal trace を持つ von Neumann 環 N に対して, N 上の
有限生成 bimodule X が生成される von Neumann 環 M_X の存在については,
bimodule に「右内積と左内積の trace に与える値が同じ」という仮定を
加えることによって, M_X の存在が証明できることを説明した. (Y61)

今回は、 σ -有限 von Neumann 環 N に対して、bimodule algebra $M \times \alpha$ の存在について、説明する。この鍵となるのは、 α の state による右内積と左内積と α の値 $\alpha(x)$ とを記述する。bimodule に対して KMS 条件を考へることにして、存在が言える。

(1)

ここでは、von Neumann 環 N と N 上の有限生成 bimodule X について説明する。

定義 (例 (K-W2))

N は von Neumann 環とす。 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule とする。

次に満たすことを定義する。

- (1) X は N -値右内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ を持ち、有限個の右 N -基底を持ち、(C^* -意味で) Hilbert right N -module.
- (2) X は N -値左内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ を持ち、有限個の左 N -基底を持ち、(C^* -意味で) Hilbert left N -module.
- (3) $(a \cdot \xi) \cdot b = a \cdot (\xi \cdot b) \quad (a, b \in N)$
- (4) 2つの norm $\|\xi\| := \|\langle \xi, \xi \rangle\|^{1/2} \geq \|\xi\|_N := \|\langle \xi, \xi \rangle_N\|^{1/2}$ の同値.
- (5) π, ρ は次の様に定義する:

$$\pi(a)\xi := a\xi, \quad \rho(a)\xi := \xi a \quad (a \in N, \xi \in X)$$

さて、 π は N から $L(X_N)$ (right N -module X_N 上の bounded adjointable operator 全体) への単射で、単位的な $*$ -hom., ρ は N から $L({}_N X)$ (left N -module ${}_N X$ 上の bounded adjointable operator 全体) への単射で、単位的な $*$ -hom. である。さらに、 π, ρ は σ -weak 連続な写像である。

(6) 有界な net $(\xi_\lambda) \subset X$ に対し、次の同値:

- $\|\xi_\lambda - \xi\| \rightarrow 0$ (s-weak)
- $\langle \xi_\lambda - \xi, \xi_\lambda - \xi \rangle_N \rightarrow 0$ (s-weak).

□

(注)

上記定義 (5) にあたる "s-連続" について、right N -module X_N が有限生成 (Paschke による) $L(X_N)$ は W^* -環であることが知られている。よって π, ρ の連続性について、定義 (6) による。((Pa))

□

次に、bimodule に対する "右次元" について説明する。

定義. ((K-W2))

N は von Neumann 環、 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule として、有限個の右 N -基底 $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ が固定される。bimodule X に対する right index $dr(X)$ は、次のように定義される。

$$dr(X) := \sum_{i=1}^n \|\langle e_i, e_i \rangle\|.$$

□

注意 2.17. 右 index $dr(X)$ は、右 N -基底 $\{e_i\}$ のとり方によらずに定まる。また一般に、 $dr(X)$ は N の中心 $\mathcal{Z}$ の元である。

最後に、bimodule に対する full 条件について説明する。

定義

N は von Neumann 環, X は有限生成 Hilbert N - N bimodule とする. このとき, X は full 条件を満たすこと. 次が成立することは示す.

$$\begin{aligned} \cdot \left(\text{span} \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in X \} \right)^{-(s\text{-weak})} &= N \\ \cdot \left(\text{span} \{ \langle x, y \rangle_N \mid x, y \in X \} \right)^{-(s\text{-weak})} &= N \end{aligned}$$

□

例(1)

N は von Neumann 環, $\alpha \in N$ 上の X -自己同型写像とする. このとき, bimodule $X := N$ 上の作用・ N -値内積を次で定義する:

$$\begin{aligned} \cdot a \cdot x \cdot b &:= \alpha^{-1}(a) x b \quad (x \in X = N, a, b \in N) \\ \cdot \langle x, y \rangle &:= \alpha(x y^*) \\ \cdot \langle x, y \rangle_N &:= x^* y \end{aligned}$$

このとき, X は有限生成 N - N bimodule であり, $1 \in X$ は基底で, $\alpha(1) = 1$ となる.

例(2)

N は von Neumann 環, $\alpha, \beta \in N$ 上の X -自己同型写像とする. このとき, bimodule $X := N \oplus N$ 上の作用・ N -値内積を次で定義する:

$$\begin{aligned} \cdot a \cdot (x \oplus y) \cdot b &:= (\alpha^{-1}(a) x b) \oplus (\beta^{-1}(a) y b) \\ \cdot \langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle &:= \alpha(x_1 x_2^*) + \beta(y_1 y_2^*) \\ \cdot \langle x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2 \rangle_N &:= x_1^* x_2 + y_1^* y_2 \end{aligned}$$

このとき, X は有限生成 N - N bimodule で, $\{1 \otimes 0, 0 \otimes 1\}$ が X の基底で,
 $\text{dr}(X) = 2$ となる.

例 (3) $((P_i - P_0))$

$N \subset M$ は II_1 -因子環, 部分因子環とし, Jones index $[M:N]$ は有限であるとする.
 $E_N \in M$ から N への標準的な条件付き期待値とする. このに対し, bimodule $X := M$ と,
 作用・ N -値内積を次で定義する:

- $a \cdot x \cdot b := axb \quad (x \in X = M, a, b \in N)$
- $\langle x, y \rangle := E_N(xy^*)$
- $\langle x, y \rangle_N := E_N(x^*y)$

このとき, X は有限生成 Hilbert N - N bimodule で, Pimsner-Popa basis x_i が X の基底になる. またこのとき, X の right index $\text{dr}(X)$ は Pimsner-Popa basis の性質より, Jones index $[M:N]$ である.

例 (4) $((K_0))$

$N \subset M$ は II 型を含む, 一般 α 因子環, 部分因子環で, $E_N \in M$ から N への正規忠実な条件付き期待値で, $\text{index } \text{Index}(E_N)$ は有限であるとする.

このに対し, bimodule X と $X := M$ と, 作用・ N -値内積を次で定義する:

- $a \cdot x \cdot b := axb \quad (x \in X = M, a, b \in N)$
- $\langle x, y \rangle := E_N(xy^*)$
- $\langle x, y \rangle_N := E_N(x^*y)$

さて、例(3)と同様に、 X は有限生成 $\mathfrak{A}$ Hilbert N - N bimodule で、right index $\text{dr}(X)$ は $\text{Index}(E_N)$ に等しい。

以下、例(3)をモデルとして、bimodule algebra M_X を構成することを示す。

(2)

ここでは、bimodule に対する KMS 条件について説明する。

定義: $((K_g), (K_{-W}))$

N は von Neumann 環、 G は局所コンパクトハウスドルフ群、 X は有限生成 $\mathfrak{A}$ Hilbert N - N bimodule とする。さて、 $(X, N, G, \gamma, \alpha)$ が G -equivariant system であるとは、次の条件を満たすことを定義する。

(1) α は G が N 上の連続作用

(2) γ は G が X 上の等距離同型群への群同型写像で、 $\forall x \in X, g \in G$ に対して連続、 $\gamma_g(x)$ が x に近づくとき、 $\gamma_g(x)$ が x に近づく。

任意の $\eta \in X$ に対して、

$$\langle \gamma_g(\xi), \eta \rangle \xrightarrow{g \rightarrow e} \langle \xi, \eta \rangle \quad (\text{s-weak top. } \tau).$$

(3) γ と α の関係式:

$$\langle \gamma_g(\xi), \gamma_g(\eta) \rangle = \alpha_g(\langle \xi, \eta \rangle)$$

$$\langle \gamma_g(\xi), \gamma_g(\eta) \rangle_N = \alpha_g(\langle \xi, \eta \rangle_N)$$

$$\gamma_g(a \cdot \xi \cdot b) = \alpha_g(a) \gamma_g(\xi) \alpha_g(b) \quad (a, b \in N).$$

次に、 $G = \mathbb{R}$ とし、 α bimodule に対する analytic element を説明する。

定義

N は von Neumann 環、 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule、 $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$ -equivariant system とする。このとき、 $\xi \in X$ が $\mathbb{R}$ -equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する γ -analytic element であるとは、(弱位相の意味で) α から X に値をとる解析関数 $\tilde{\gamma}_\xi(t)$ が存在して、 $\tilde{\gamma}_\xi(t) = \gamma_t(\xi)$ ($t \in \mathbb{R}$) となることを定義する。

□

これに関して、次の結果が得られる。

命題

N は von Neumann 環、 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule、 $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$ -equivariant system とする。このとき、 γ -analytic element 全体の集合 X_a は、 X_a 中で弱位相の意味で稠密である。

□

次に、bimodule に対する KMS 条件について説明する。

定義

N は von Neumann 環、 ϕ は N 上の normal state、 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule、 $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$ -equivariant system とする。このとき、 ϕ が $\mathbb{R}$ -equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する β -KMS state であるとは、次をみたすことを定義する：

④ ϕ は (N, α) に対する β -KMS state である.

⑤ 代数的 N_α - N_α subbimodule $Y \subset X_\alpha \subset X$ が存在して,

• $Y \subset X$: $\mathbb{B}$ 位相で dense.

• 任意 $\xi \in X$, $\eta \in Y$ に対して

$$\phi(\langle \eta, \xi \rangle) = \phi(\langle \xi, \gamma_{ip(\eta)} \rangle_N)$$

成立.

$$N_\alpha := \{a \in N \mid a: \alpha\text{-analytic}\}.$$

例

$N \subset M$ は σ -finite factor, subfactor, $E_N \in M$ は N 上の正規投影. N 上の正規投影 E_N は N 上の正規投影. $\phi \in N$ は faithful normal state である. ϕ に対して, bimodule $X := M$ 上, 作用 N -値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ を次で定義する.

$$a \cdot x \cdot b := axb \quad (a, b \in N, x \in X).$$

$$\langle x, y \rangle := E_N(x y^*)$$

$$\langle x, y \rangle_N := E_N(x^* y)$$

例

例. α, γ は次で定義する.

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(N) : \alpha_t := \sigma_t^\phi$$

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \text{Iso}(X) : \gamma_t := \sigma_t^{\phi \circ E_N} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

例. $Y \subset X$. M は $\sigma^{\phi \circ E_N}$ -analytic element 全体である.

例. ϕ は $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対する $\beta = -1$ KMS state である.

また $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$ -equivariant system であることを見る。

$$\begin{aligned}
 {}_N\langle \gamma_t(x), \gamma_t(y) \rangle &= {}_N\langle \sigma_t^{\phi \circ E_N}(x), \sigma_t^{\phi \circ E_N}(y) \rangle \\
 &= E_N(\sigma_t^{\phi \circ E_N}(x) \sigma_t^{\phi \circ E_N}(y)^*) \\
 &= E_N(\sigma_t^{\phi \circ E_N}(xy^*)) \\
 &= E_N \circ \sigma_t^{\phi \circ E_N}(xy^*) \\
 &= \sigma_t^{\phi} \circ E_N(xy^*) \\
 &= \sigma_t^{\phi}(E_N(xy^*)) \\
 &= \sigma_t^{\phi}({}_N\langle x, y \rangle) \\
 &= \alpha_t({}_N\langle x, y \rangle).
 \end{aligned}$$

同様に

$$\langle \gamma_t(x), \gamma_t(y) \rangle_N = \alpha_t(\langle x, y \rangle_N).$$

また

$$\begin{aligned}
 \gamma_t(a \cdot x \cdot b) &= \sigma_t^{\phi \circ E_N}(a \cdot x \cdot b) \\
 &= \sigma_t^{\phi \circ E_N}(a) \sigma_t^{\phi \circ E_N}(x) \sigma_t^{\phi \circ E_N}(b) \\
 &= \sigma_t^{\phi}(a) \sigma_t^{\phi \circ E_N}(x) \sigma_t^{\phi}(b) \\
 &= \alpha_t(a) \gamma_t(x) \alpha_t(b) \quad (a, b \in N).
 \end{aligned}$$

よって $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ は $\mathbb{R}$ -equivariant system である。

また $x \in X, y \in Y$ に対して

$$\begin{aligned}
 \phi({}_N\langle y, x \rangle) &= \phi(E_N(yx^*)) \\
 &= \phi \circ E_N(yx^*) \\
 &= \phi \circ E_N(x^* \sigma_{-t}^{\phi \circ E_N}(y))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(E_N(x^* \sigma_{-1}^{\phi \circ E_N}(y))) \\
&= \phi(\langle x, y \rangle_N)
\end{aligned}$$

3). ϕ は $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \alpha)$ に対して $\beta = -1$ KMS state である.

(3)

次に, bimodule 及び生成される von Neumann 環について説明する.

定義

$N \subseteq$ von Neumann 環, $X \subseteq$ 有限生成 Hilbert N - N bimodule 2 full 条件を満たし, right index drun は $\lambda \neq 1$ であるとする. $\lambda \neq 1$, M_X は $N \subseteq X$ 2 生成される von Neumann 環である. 次を満たす π が定まる.

① N 及び M_X 上の σ -weak 連続な, 単射単位的 λ -hom. π が存在する.

② M_X 上の π 部分集合 $\{S_i \mid i \in X\}$ が存在して,

- S_X : linear
- $\pi(a)S_i = S_i\pi(a)$, $S_i\pi(a) = \sum_j a_{ji} S_j$ ($a \in N$)
- $S_i^* S_j = \pi(\langle i, j \rangle_N)$
- $S_{\varepsilon_1} S_{\varepsilon_1}^* + \dots + S_{\varepsilon_n} S_{\varepsilon_n}^* = 1$ ($\{ \varepsilon_i \} \subset X$ は right N -basis)

③ M_X 及び $\pi(N)$ 上の正規状態の条件付期待値 G_N が存在して,

$$\begin{aligned}
&G_N((S_{i_1} \dots S_{i_p})(S_{j_1} \dots S_{j_q})^*) \\
&= \delta_{p,q} \cdot \text{drun}^p \pi(\langle i_1 \otimes \dots \otimes i_p, j_1 \otimes \dots \otimes j_p \rangle)
\end{aligned}$$

④ $M_X = \{ \pi(N), \{S_i \mid i \in X\} \}$.

注意 2.12. N が σ -finite であるとき、もし上記を満たす環が存在すれば、それは σ -同型を除いて一意である。

存在については、次の結果が得られる。

命題

N は σ -finite von Neumann 環、 ϕ は N 上の faithful normal state、 X は有限生成 Hilbert N - N bimodule を full 条件を満たし、right index $dx(X)$ はスカラーであるとする。
 仮定 2.12. $\mathbb{R}$ -equivariant system $(X, N, \mathbb{R}, \gamma, \sigma^\phi)$ が存在し、 ϕ はこれに対する $\beta = -1$ KMS state であるとする。このとき、bimodule 生成環 M_X von Neumann 環 M_X は存在する。

□

これは、Katayama による結果を含んだものに添っている。

参考文献

(Kaj) T. Kajiwara

Continuous crossed product of Hilbert C^* -bimodules.

Internat. J. Math. 11(2000), No.7, 969-981.

(K-W1) T. Kajiwara, Y. Watatani.

Crossed products of Hilbert C^* -bimodules by countable discrete group

Proc. Amer. Math. Soc. 126(1998), No.3, 841-851.

(K-W2) T. Kajiwara, Y. Watatani.

Jones index theory by Hilbert C^* -bimodules and K -theory.

Trans. AMS. 352(2000), No.8, 3429-3472.

(Kat) Y. Katayama

Generalized Cuntz algebra O_N^M .

RIMS Kokyuroku 858, 87-90 (1994).

(Ko) H. Kosaki

Extension of Jones' theory on index to arbitrary factors.

J. Funct. Anal., 66(1986), 123-140.

(Pa) W. L. Paschke

Inner product module over B^* -algebras.

Trans. Amer. Math. Soc. 182(1973), 443-468.

(Pi) M. Pimsner

A class of C^* -algebras generating both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$.

In: D. Voiculescu (ed.), Free probability theory, AMS, 12 (1997) 189-212.

(Pi-Po) M. Pimsner, S. Popa

Entropy and index for subfactors.

Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 19 (1985), 57-106.

(St) S. Stratila

Modular theory in operator algebras.

Abacus Press, 1981.

(Yo1) K. Yonetani.

Hilbert bimodule $x_2 \subset x_1$ の作用素環 $1 \rightarrow x_1$.

RIMS Kokyuroku, 1151 (2000), 111-119.

(Yo2) K. Yonetani

preprint.