

Twisted Product の Surgery 積公式

岡山大学 吉田朋好

Surgery の障害に関してその積公式を求めることは、かなり以前から問題であった。 $f: M^n \rightarrow N^n$ を n 次元コンパクト多様体の間の写像度 1 の normal map で、その Surgery 障害が $\sigma(f) \in L_n^s(\pi, w)$ で与えられているとする。ただし、 $\pi = \pi_1(N^n)$, $w = 1st$ Stiefel-Whitney class of N^n とする。 L^k を向きづけられた閉じた多様体とし $f \times 1: M^n \times L^k \rightarrow N^n \times L^k$ とするとき、 $f \times 1$ の Surgery 障害 $\sigma(f \times 1) \in L_{n+k}^s(\pi \times \pi', w)$ を $\sigma(f)$ と L^k の不変量であらわすのが積公式である (ここに $\pi' = \pi_1(L^k)$)。 $\pi' \neq 1$ の場合は、非常におそろしく、ごくおそろひの特殊な例について解かれているだけである。 $\sigma(f)$ から $\sigma(f \times 1)$ を出そうとする際には、一番問題になる点は、 $\sigma(f \times 1)$ が L^k のホモロジーではなく一般に L^k の chain 複体の性質に depend する

とであり、このために $\sigma(f) \rightarrow \sigma(f \times 1)$ の変換は $\pi' = \pi(L^k)$ によって、非常に複雑になると思われる。

他方 $\pi' = \{1\}$ の場合は問題は完全に解かれている。すなわち J.W. Morgan, *A product formula for surgery obstructions*, *Memoirs of A.M.S.* No 201 によれば、 L^k が単連結の場合は $\sigma(f \times 1)$ は L^k の有向同境界類のみに depend し $\sigma(f) \rightarrow \sigma(f \times 1)$ は次の pairing により与えられる。

$$L_n(\pi) \otimes \Omega_{4k} \longrightarrow L_{n+4k}(\pi)$$

$$\downarrow \text{Id} \otimes \text{signature} \quad \parallel$$

$$L_n(\pi) \otimes \mathbb{Z} \longrightarrow L_n(\pi)$$

$$L_n(\pi) \otimes \Omega_{4k+1} \longrightarrow L_{n+4k+1}(\pi)$$

$$\downarrow \text{Id} \otimes \text{de Rham inv.} \quad \parallel$$

$$L_n(\pi) \otimes \mathbb{Z}/2 \longrightarrow L_{n+1}(\pi)$$

その他は 0。 L^k が単連結の場合は、上の式を見てわかるように、 $\sigma(f \times 1)$ は L^k のホモロジーのみに depend することになり、このために、 L^k が単連結でない場合に比較して、格段にやさしくなることになる。Morgan の証明は Morgan-Sullivan [6] で使われた幾何学的な

テクニックを駆使して行われ、 $\sigma(f \times 1)$ が L^k のホモロジーのみ depend するとの証明に多くの部分がさられる。

一方 A. Ranicki は [4], [5] において、'Algebraic Surgery Theory' といわれるものを構成し、Surgery の積公式に関して、ホモトピー的・ホモロジー代数的手法により、非常に一般的な公式を与えた。ただし、Ranicki の積公式は、何れの具体的な $\pi' = \pi_1(L^k)$ については何の情報も与えない。ただ、上の Morgan の積公式は、Ranicki の方法により、一つの特殊な場合として、代数的テクニックにより得られる。

この小論に於ては、Ranicki の手法により、Morgan の積公式の *equivariant analogue* を得ることを示す。

$f: M^n \rightarrow N^n$, $\sigma(f) \in L_n^s(\pi, W)$ を写像度 1 の *normal map* 及びその Surgery 障害とす。 $\phi: \pi \rightarrow G$ を π から有限群 G の上への準同型写像とす。 L^k を向きづけられた閉多様体で G が作用していると仮定する。 $\chi: G \rightarrow \{\pm 1\}$ を $g \in G$ に対し、 g が L^k の向きを保つとき、 $\chi(g) = +1$, g が L^k の向きを逆にす

るとき $\chi(g) = -1$ として定める。このような G -多様体 L^k を G - χ -多様体 とよぶことにする。 G - χ -多様体 L^k を $\phi: \pi \rightarrow G$ により π -作用のある多様体と考える。 $\widetilde{M}^n, \widetilde{N}^n$ をそれぞれ M^n, N^n の普遍被覆空間とし、 $f: \widetilde{M}^n \rightarrow \widetilde{N}^n$ を f の被覆写像とする。 $\widetilde{M}^n \times_{\pi} L^k, \widetilde{N}^n \times_{\pi} L^k$ をそれぞれ $\widetilde{M}^n \times L^k, \widetilde{N}^n \times L^k$ の π -対角作用による商空間とすれば、積写像 $f \times 1: \widetilde{M}^n \times L^k \rightarrow \widetilde{N}^n \times L^k$ は写像 $f \times_{\pi} 1: \widetilde{M}^n \times_{\pi} L^k \rightarrow \widetilde{N}^n \times_{\pi} L^k$ を induce する。この写像には、自然な方法により、写像度 1 の normal map としての構造が入れられる。そこで $f \times_{\pi} 1$ の Surgery 障害を考えないのであるが、これは $L_{n+k}^s(\pi, (\widetilde{N} \times_{\pi} L^k), w\chi)$ の中にある。今、 $p: \widetilde{N}^n \times_{\pi} L^k \rightarrow N^n$ を π -成分への射影とすれば、これは準同型写像 $p_*: L_{n+k}^s(\pi, (\widetilde{N} \times_{\pi} L^k), w\chi) \rightarrow L_{n+k}^s(\pi, w\chi)$ を induce する。 $f \times_{\pi} 1$ の Surgery 障害類の p_* による像を $\sigma(f \times_{\pi} 1) \in L_{n+k}^s(\pi, w\chi)$ とあらわすとし、 $\sigma(f \times_{\pi} 1)$ を $\sigma(f)$ と L^k の不変量によって表現することを考える。

G - χ -多様体により、普通の方法で G - χ -同境界類が定義され、これを $\Omega_*^{\chi}(G)$ とあらわすことにする。次

$\sigma(f) \rightarrow \sigma(F_{\pi} 1)$ は L^k の $\Omega_k^X(G)$ での class の σ に depend し pairing $\Omega_k^X(G) \otimes L_n^S(\pi, w) \rightarrow L_{n+k}^S(\pi, wX)$ をもたらす. 又. 代数的に G - X Witt 群なるものを定義され (後に定義を示す). これを $GW_*^X(G, \mathbb{Z})$ とあらわすとき 準同型写像 $\rho: \Omega_*^X(G) \rightarrow GW_*^X(G, \mathbb{Z})$ がある.

$$[L^{2k}] \rightarrow \langle H^k(L^{2k}, \mathbb{Z}) / \text{Tor}, \text{ intersection form} \rangle$$

$$[L^{2k+1}] \rightarrow \langle \text{Tor } H^{k+1}(L^{2k+1}, \mathbb{Z}), \text{ linking form} \rangle$$

として定義される.

又. 全く代数的な仕方では pairing

$$GW_k^X(G, \mathbb{Z}) \otimes L_n^S(\pi, w) \rightarrow L_{n+k}^S(\pi, wX)$$

が定義される. 以上の準備のもとで. Morgan の積公式の equivariant analogue は $\mathbb{R}$ の commutative diagram で与えられる.

$$\Omega_k^X(G) \otimes L_n^S(\pi, w) \longrightarrow L_{n+k}^S(\pi, wX)$$

$$\rho \otimes 1 \downarrow$$

$$\parallel$$

$$GW_k^X(G, \mathbb{Z}) \otimes L_n^S(\pi, w) \longrightarrow L_{n+k}^S(\pi, wX)$$

, ここに上の写像は $\sigma(f) \rightarrow \sigma(F_{\pi} 1)$ により与えられる
 同. 下の写像は. 代数的に定義される pairing である.

上の公式を適用しようとするには、 $GW_*^x(G, \mathbb{Z})$ の構造についての知識が必要になる。 $*$ =偶数、 G =奇数位数の有限群、 X =trivial map の場合には、 $GW_{2m}(G, \mathbb{Z})$ の構造はかなりよくわかってゐる [1]。この場合には、Atiyah-Bott の多重指数により、 $GW_{2m}(G, \mathbb{Z})$ の多くの部分をはかることができるので、わかりやすい。 $*$ =奇数のときには $GW_{2m+1}^x(G, \mathbb{Z})$ の定義には多少便宜的な部分もあるので、今のところよくわからない。 G が偶数位数の場合には $GW_*^x(G, \mathbb{Z})$ の解析は大変むづかしいようである。

上の commutative diagram の証明は、Ranicki の algebraic surgery の手法を用いて、全く代数的に行う。詳細は長くなるのではぶくが、要するは G - X -多様体の G -chain 複体から Ranicki の方法により、 G -Poincaré cobordism 群 $L_{G,X}^*(\mathbb{Z})$ を定義し、これと $GW_*^x(G, \mathbb{Z})$ との間の同型対応を与えることにある。残念ながら、具体的な目立つ応用例は今のところ見当たらない。又、 G が無限群の場合に同様の積公式を見出すことができるかは、大変役に立つと思われるが、今のところ、証明法はわからない。

G - $\mathcal{K}$ - $\mathcal{W}$ 加群の定義は次のようにする。 $\mathbb{Z}[G]$ を G の
 整係数群環とし、involution $-$ を $\overline{\sum n_g g} = \sum n_g x(g) g^{-1}$
 とおく ($n_g \in \mathbb{Z}$, $g \in G$)。有限生成 G -加群 V に対し、
 その双対加群 V^* を、 V が $\mathbb{Z}$ -free のとき $V^* =$
 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z})$, V が $\mathbb{Z}$ -torsion のとき $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(V,$
 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ とおき、 $x \in \mathbb{Z}[G]$ に対し、 x の $u \in V^*$ への
 作用を $(xu)(v) = u(\bar{x}v)$ ($v \in V$) とおく。この作用
 により、 V^* は G -加群となり、又 G -準同型写像
 $\beta: V_1 \rightarrow V_2$ に対し、その dual G -準同型写像、
 $\beta^*: V_2^* \rightarrow V_1^*$ が通常のように定義される。又 V^{**}
 は V と標準的に同一視される。

(1) 偶数次元の場合

$\varepsilon = \pm 1$ とし、 ε -対称 G - $\mathcal{K}$ -型式 (V, α) を有限生成
 $\mathbb{Z}$ -free G -加群 V と G -同型写像 $\alpha: V \rightarrow V^*$ で
 $\alpha = \varepsilon \alpha^*$ をみたすものの対として定義する。2つの型式
 (V_1, α_1) , (V_2, α_2) に対し、直和 $(V_1, \alpha_1) \oplus (V_2, \alpha_2)$
 が通常のように定義される。又、同型写像 $\beta: (V_1, \alpha_1)$
 $\rightarrow (V_2, \alpha_2)$ が G -同型写像で $\beta^* \circ \alpha_2 \circ \beta = \alpha_1$ をみたす
 ものとして定義される。 ε -対称 G - $\mathcal{K}$ -型式 (V, α) の
 同型類の直和に関する半群をつくり、これに付随
 する universal group を $\mathcal{Y}_{\varepsilon}^{\mathcal{K}}(G, \mathbb{Z})$ とおく。

G - χ -型式 (V, α) が split するとは G -部分加群 P で $P = P^\perp = \ker(\bar{i}^* \circ \alpha : V \rightarrow P^*)$ となるものがあることを示す ($\bar{i}: P \rightarrow V$ は包含写像).

各 $k \geq 0$ に対し $GW_k^{\chi}(G, \mathbb{Z})$ を $\mathcal{Y}_{(-1),k}^{\chi}(G, \mathbb{Z})$ の $(-1)^k$ -対称 G - χ -型式で split するものから生成される部分群に関する residue class group と定義する。この定義は essential に A. Dress [2] に基づいている。

(2) 奇数次元の場合

$\varepsilon = \pm 1$ に対し、 ε -対称 G - χ -linking 型式 (S, λ) を、有限生成 $\mathbb{Z}$ -torsion G -加群 S と G -同型 $\lambda: S \rightarrow S^*$ で $\lambda = \varepsilon \lambda^*$ を満たすものの対とする。このような (S, λ) に対し、次のような G -加群の完全系列がつかいに存在する。

$$0 \rightarrow U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\alpha} S \rightarrow 0.$$

ここで χ -次型式 $A: V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ があり、(i) U と V は有限生成 $\mathbb{Z}$ -free G -加群, (ii) $A(gv, gv') = \chi(g)A(v, v')$ ($g \in G, v, v' \in V$), (iii) $A(v, \beta(u)) \in \mathbb{Z}$, $A(\beta(u), v) \in \mathbb{Z}$ ($u \in U, v \in V$)。ここで A が S 上に induce する型式 $S \times S \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の adjoint は λ

に一致する。

このような完全系列 $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow S \rightarrow 0$ と λ の対を (S, λ) の長さ 1 の G -resolution とする。

2つの ε -対称 G - X -linking 型式 $(S_1, \lambda_1), (S_2, \lambda_2)$ に対し、直和 $(S_1, \lambda_1) \oplus (S_2, \lambda_2)$ が定義される。又、同型写像 $\delta: (S_1, \lambda_1) \rightarrow (S_2, \lambda_2)$ とは、 G -同型写像 $\delta: S_1 \rightarrow S_2$ で $\delta^* \lambda_2 \delta = \lambda_1$ となるものをとす。よって、 ε -対称 G - X -linking 型式の同型類の直和に関する半群が構成され、付随する universal group を $W_\varepsilon^X(G, \mathbb{Z})$ とあらわす。

又、 ε -対称 G - X -linking 型式 (S, λ) について次の 2 条件を考える。

(a) 長さ 1 の G -resolution $0 \rightarrow U \xrightarrow{\beta} V \xrightarrow{\gamma} S \rightarrow 0$ で、 $A_U(v)(u) = A(v, \beta(u))$ ($u \in U, v \in V$) で定義される写像 $A_U: V \rightarrow U^*$ が同型写像。

(b) S の G -部分加群 Q で $Q = Q^\perp = \ker(\varepsilon \cdot \lambda: S \rightarrow Q^*)$ となるものがある (こゝに $\varepsilon: Q \rightarrow S$ は包含写像)。

各 $k \geq 0$ に対し、 $GW_{2k+1}^X(G, \mathbb{Z}) \in W_{(-1)^{k+1}}^X(G, \mathbb{Z})$ の

(a) 又は (b) のいずれかをみたす $(-1)^{k+1}$ -対称 G - X -linking 型式から生成される部分群に関する

residue class group として定義する。

References

- [1] J. P. Alexander et al. : Odd Order Group Actions and Witt Classification of Innerproducts ,
Lecture Note in Math. 625. Springer
- [2] A. Dress : Induction and structure theorems
for orthogonal representations of finite group ,
Ann. of Math. 102 , 291-325.
- [3] J. Morgan : A product formula for surgery
obstructions , Mem. A.M.S. 201
- [4] A. Ranicki : The algebraic theory of surgery
I, Foundations , Proc. London. M.S. (3) 40.
87-192
- [5] A. Ranicki : The algebraic theory of surgery
II. Applications to Topology , Proc. London. M.S.
(3) 40 , 193-283
- [6] J. Morgan , D. Sullivan : The transversality characteristic
class and linking cycles in surgery theory ,
Ann. of Math. 99 (1974), 463-544