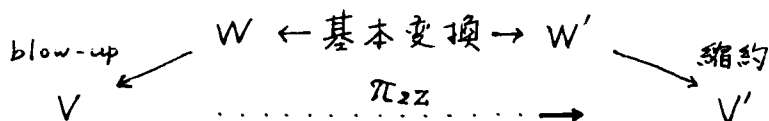


第一種 Fano 多様体の双有理写像について

名大・理 竹内 聖彦

§.0. 序

Iskovskih [1] は、主系列第一種 3次元 Fano 多様体 V を分類する際、その上に直線 Z が存在すると仮定して、その直線からの二重射影 $\pi_{ZZ}: V \dashrightarrow V'$ と詳しく調べるという方法をとった。後に Shokurov がこのような Fano 多様体上には必ず直線が存在することを示した。Iskovskih の調べた二重射影 $\pi_{ZZ}: V \dashrightarrow V'$ は森理論を用いればより簡単に構成される。即ち、二重射影の像 V' は、 V の Z に沿う blow-up W を何本かの (-2) -曲線で基本変換 (elementary transformation) して得らる 3次元射影多様体 W' の端射線の縮約 $W' \rightarrow V'$ の像であり、これは端射線の分類により調べることができる:



ここでは、森理論を用いて、指数1の第一種 Fano 多様体上の点からの三重射影、及び、有理2次曲線からの二重射影と調べ、いくつかの(双)有理写像を構成する。その結果、次を得る。

定理 $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ と、種数 g 指数1の第一種 Fano 多様体とする。このとき、

$$(1) \quad g \leq 12.$$

$$(2) \quad g \neq 11.$$

$$(3) \quad g \geq 8 \text{ ならば、} V \text{ は直線を含む。}$$

$$(4) \quad \text{具体的には、例えば、次のような(双)有理写像を得る。}$$

$$g = 12:$$

$$(A) \quad \text{点 } P \in V_{22} \text{ からの三重射影 } f: V_{22} \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

f は双有理写像で、不確定点集合は点 P と P を通る6本の有理2次曲線であり、逆写像 f^{-1} の不確定点集合は $\mathbb{P}^3$ 内の有理6次曲線とその6本の四交弦 (quadrisequant) である。更にこの有理6次曲線は、 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異3次曲面上にあり、その曲面は f^{-1} により点 P に写される。

$$(B) \quad \text{有理2次曲線 } C \subset V_{22} \text{ からの二重射影 } g: V_{22} \dashrightarrow Q_2.$$

Q_2 は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異2次超曲面である。 g は双有理写像で、不確定点集合は有理2次曲線 C とこれと1点で交わ

る 4 本の直線であり、逆写像 h^{-1} の不確定点集合は Q_2 上の有理 6 次曲線とその 4 本の三交弦 (trisecant) である。更にこの有理 6 次曲線は Q_2 内の或る 4 次 del Pezzo 曲面上にあり、その del Pezzo 曲面は h^{-1} により曲線 C に写される。
($g \leq 10$ の場合は本文末に述べる。)

以下で、この結果と導く概略と述べる。

§.1. 記号と準備

1.0. 標数 0 の代数的閉体上の代数多様体のみを扱う。射影空間 P^N の部分集合 Y に対し Y が張る P^N の部分射影空間と $\langle Y \rangle$ で表わす。スキーム Y の既約被約部分スキーム X に対し X の生成点で Y の重複度を $\text{mult}_X Y$ で表わす。また V を 3 次元射影多様体、 L を V 上の因子、 X を V 内の点または曲線とすると、正整数 n に対し、完全一次系 $|L|$ の部分一次系 $|L - nX|$ と

$$|L - nX| = \{ Y \in |L| \mid \text{mult}_X Y \geq n \}$$

を定義する。

さて $V = V_{2g-2} \subset P^{g+1}$ を主系列第一種 3 次元 Fano 多様体とする。即ち、反標準因子 $-K_V$ が非常に豊富な 3 次元

非特異完備代数多様体で、その Picard 群 $\text{Pic } V$ が整数加群 $\mathbb{Z}$ と同型であるものとする。このとき V は、反標準系 $|-K_V|$ により射影空間に埋込まれ、 $\dim |-K_V| = g+1$ 、 $\deg V = (-K_V)^3 = 2g-2$ である。この g を V の種数と呼ぶ。

命題 1.1. (Iskovskih [1])

- (1) $g \geq 5$ ならば、 V は 2 次式のみに定義される。
- (2) 直線 $Z \subset V$ に対し、その法線束 $\mathcal{N}_{Z/V}$ は $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}$ または $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(1)$ であり、何れの場合も Z は V 内の或る曲面上を動く。
- (3) 有理 2 次曲線 $C \subset V$ に対し、その法線束 $\mathcal{N}_{C/V}$ は
 - a) $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ 、b) $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ 、c) $\mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(2)$ 、または、
 - d) $\mathcal{O}(-4) \oplus \mathcal{O}(4)$ の何れかであり、a) の場合は C は V 全体を動き、他の場合は C は V 内の或る曲面上を動く。

注意 1.2. 上の命題の (3) で、 $C \subset V$ の法線束 $\mathcal{N}_{C/V}$ が c) のとき C は V 内の 2 次曲面上を動き、d) のとき C は V 内の射影平面上を動く。 V が指数 1 (即ち $\text{Pic } V = \mathbb{Z}(-K_V)$) で $g \geq 4$ とすると V は 2 次曲面も射影平面も含まないので、このような V 内に含まれる有理 2 次曲線の法線束は a) または b) である。

1.3. 次に主系列3次元 Fano 多様体 $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ が2次式のみで定義されていると仮定する。このとき、次の (A)、(B) の何れかの状況と記号を固定する。

(A) P を V 内の直線上にない V 上の点とする (命題 1.1 (2) よりこのような点は必ず存在する)。 $\alpha: W \rightarrow V$ を V の P での blow-up とし、 $S = \alpha^{-1}(P)$ を例外因子とする。このとき S は $\mathbb{P}^2$ と同型で $-K_W \sim \alpha^*(-K_V) - 2S$ 、 $(-K_W)^3 = 2g'-2$ である (但し $g' = g-4 \geq 2$ とする)。

(B) C を V 内の有理2次曲線で、 $\mathcal{N}_{C/V} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ または $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ となるものとする。 $\alpha: W \rightarrow V$ を V の C に沿う blow-up とし、 $S = \alpha^{-1}(C)$ とする。すると、 S は有理線織面 F 。または F_2 と同型で $-K_W \sim \alpha^*(-K_V) - S$ 、 $(-K_W)^3 = 2g'-2$ である (但し $g' = g-3 \geq 2$ とする)。

定理 1.4. (Reid [3]) 1.3 の仮定の下で、

(1) 一次系 $| -K_W |$ は固定成分も基底も持たず、 generically finite morphism $\varphi_{-K_W}: W \rightarrow \varphi_{-K_W}(W) \subset \mathbb{P}^{g'+1}$ を定める。

(2) φ_{-K_W} は Stein 分解:

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ \varphi \swarrow & \downarrow \varphi_{-K_W} & \\ \bar{W} & \rightarrow & \varphi_{-K_W}(W) \subset \mathbb{P}^{g'+1} \end{array}$$

レにとき、 φ は小双有理射 (small birational morphism) であり、 $\bar{W}$ は Gorenstein で、豊富な反標準因子 $-K_{\bar{W}}$ を持ち、 $\varphi^*(-K_{\bar{W}}) = -K_W$ で $H^i(\mathcal{O}_{\bar{W}}) = 0$ ($i=1, 2, 3$) である。

(3) 一次系 $|K_W|$ が可約成員を持たないと仮定する。このとき W 内の曲線 X が S 上になく $X \cdot (-K_W) = 0$ となるものに対して、

(A) $g \geq 8$ ならば $Y = \sigma(X)$ は P を通る有理 2 次曲線。

(B) $g \geq 7$ ならば $Y = \sigma(X)$ は C と交わる直線。

$g \leq 7$ のときは、これら以外に次のような型の有限本の曲線 X もある。

(A) $g \leq 7$: $X \cong \mathbb{P}^1$ で $\deg Y = 4$, $\text{mult}_P Y = 2$,
 $\langle Y \rangle = \mathbb{P}^3$, $p_a(Y) = 1$.

$g = 6$: $X \cong \mathbb{P}^1$ で $\deg Y = 6$, $\text{mult}_P Y = 3$,
 $\langle Y \rangle = \mathbb{P}^4$, $p_a(Y) = 2$.

(B) $g \leq 6$: Y は有理 2 次曲線で $\langle Y \cup C \rangle = \mathbb{P}^3$,
 $p_a(Y \cup C) = 1$.

注意 1.5. $|K_W|$ が可約成員を持たないとする (例えば V が指数 1 ならばよい)。このとき $g > 9$ ならば P を通る有理 2 次曲線は高々有限本であり、 $g > 8$ ならば C と交わる直線は高々有限本である。

実際、もし P を通る有理2次曲線 (C と交わる直線) の一次元族 $\mathcal{F} = \{\Gamma\}$ があれば、以下のように矛盾を生ずる。

$$\Lambda = |-K_V - 3P| \quad (\Lambda = |-K_V - 2C|) \text{ とすると}$$

$$\dim \Lambda \geq \dim |-K_V| - 10 = g - 8 > 0$$

$$(\dim \Lambda \geq \dim |-K_V| - 9 = g - 7 > 0)$$

であるから、 Λ は相異なる正因子を含む。一方、任意の

$\Gamma \in \mathcal{F}$ に対し $\sigma^{-1}[\Gamma] \cdot (-K_W - \mathcal{D}) = -1$ 従って Γ は Λ の全ての成員に含まれる。従って、 $\Gamma \in \mathcal{F}$ が掃出する曲面は Λ の固定成分であるが、 $|-K_V|$ の成員が全て既約であるので、 Λ は固定成分を持ち得ない。

§.2. 点または有理2次曲線からの射影の候補

2.0. 以下では $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ は主系列第一種3次元 Fano 多様体で2次式で定義されているものとする。更に、指数1、即ち $\text{Pic } V = \mathbb{Z} \cdot (-K_V)$ とする (従って、一次系 $|-K_V|$ は可約成員を持たない)。1.3 の状況と記号と踏襲する。専ら (A) の場合を述べ、(B) は対応する部分を括弧付きで書く。

定理 1.4 (3) は、 V の点 P での (有理2次曲線 C に沿う) blow-up W 上の (-2) -曲線を限定している。但し、

(-2) -曲線 $X \subset W$ とは $X \cong \mathbb{P}^1$ で、 $N_{X/W} \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ と書くとき $(a, b) = (-1, -1)$ または $(0, -2)$ となるものである。命題 1.1、注意 1.2、1.5 により、特に $g > 9$ ($g > 8$) ならば、 W の (-2) -曲線は V 上の P を通る有限本の有理 2 次曲線 (C と 1 点で交わる有限本の直線) の σ による強変換像のみである。 (-2) -曲線の各々に沿って、基本変換 (elementary transformation) ができるが、その基本変換を同時に行うことで、新しく射影多様体 W' を得る。 W' は数値的に有効な反標準因子 $-K_{W'}$ を持つ。別の表現とすれば、 W に S -flop を施して W' を得るのである。

また W の Picard 群が $-K_W$ と S とで生成されていることと、基本変換の性質 (Reid [4]) から、 W' の Picard 群は $-K_{W'}$ と S' (S の強変換像) とで生成される。更に、交点数については、標準因子との交点数は不変であるが、 S の自己交点数と S' の自己交点数との間に違いが生ずる。その違いを e とする。上に述べたことより、 $g > 9$ ($g > 8$) ならば e は P を通る有理 2 次曲線 (C と 1 点で交わる直線) の本数に他ならない。

2.1. $-K_{W'}$ と S' の交点数を列挙すれば、

$$(-K_{W'})^3 = (-K_W)^3 = 2g' - 2$$

$$(-K_{W'})^2 S' = (-K_W)^2 S = 4$$

$$(-K_{W'}) S'^2 = (-K_W) S^2 = -2$$

$$S'^3 = S^3 - e = \begin{cases} 1 - e & ((A) \text{ のとき}) \\ -e & ((B) \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

2.2. W の (-2) -曲線の強変換像 (即ち W' 内の (-2) -曲線) と $-K_{W'}$ との交点数は 0 であるが、 W' 内には、 $-K_{W'}$ との交点数が正になる曲線もある。従って、 W' の既約曲線のつくる閉錐は恰度 1 本の端射線 R を持つ。そして R の縮約射 $\alpha = \text{cont}_R : W' \rightarrow V'$ は数値的有效因子 L と正整数 n により、完全一次系 $|nL|$ で定められる:

$$\begin{array}{ccc} & W \leftarrow \text{基本変換} \rightarrow W' & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \alpha \\ V & & V' \end{array}$$

さて、 α と V' を知るためには、因子 L を定めれば充分である。森理論により、端射線には 3 種の型がある: C -型 (2 次曲線束)、 D -型 (*del Pezzo* 曲面束)、 E -型 (例外因子を持つ)。これらの型を個別に扱う。

2.3. C -型 及び D -型 について。

(1) C-型 のとき $V' = \mathbb{P}^2$ 、 D-型 のとき $V' = \mathbb{P}^1$ 。

実際 $g(W') = g(V) = 0$ と α の全射性から $g(V') = 0$ 。
従って D-型 なら $V' = \mathbb{P}^1$ 。 C-型 のときは更に 2 次曲線束
の一般論を使って $V' = \mathbb{P}^2$ がわかる。

(2) 互いに素な正整数 x, y があって $L = x(-K_{W'}) - yS'$ 。

x と y の正負は L を正数倍しても変わらないから、
 $L = \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1)$ としてよい。もし $x \leq 0$ ならば、一次系
 $|L| = |x(-K_{W'}) - yS'| \subset |yS'|$ は次元を持たないので矛盾
する。従って $x > 0$ 。次にもし $y \leq 0$ ならば、一次系
 $|L| \supset |x(-K_{W'})| + |-yS'| \supset |x(-K_{W'})|$ が定める射の像が 3 次
元となって矛盾。従って $y > 0$ 。最後に L を $\text{Pic } W'$ の
生成元にとれば x と y は互いに素。

(3) C-型 のとき $y = 1$ または 2、

D-型 のとき $y = 1, 2$ あるいは 3。

$L = \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1)$ について示せばよい。 W'_v を α の一般フ
ァイバーとすると、C-型 のとき W'_v は有理 2 次曲線で、D-型
のとき W'_v は del Pezzo 曲面である。 $\text{Pic } W'$ をファイバーに
制限すると $\text{Pic } W'/\mathbb{Z} \cdot L \subset \text{Pic } W'_v$ で $-K_{W'}|_{W'_v} = -K_{W'_v}$
である。従って

$$\mathbb{Z}/y\mathbb{Z} \cong \text{Pic } W'/(\mathbb{Z} \cdot L + \mathbb{Z} \cdot (-K_{W'})) \subset \text{Pic } W'_v/\mathbb{Z} \cdot (-K_{W'_v})$$

より、 $-K_{W'_v}$ は y で割り切れる。故に W'_v が有理 2 次曲線

のとき $g = 1$ または 2 、 W' が del Pezzo 曲面のとき $g = 1, 2$ あるいは 3 である。

(4) L と $-K_{W'}$ 及び S' との交点数に関して、次を得る。

$$C\text{-型: } L^3 = 0$$

$$L^2(-K_{W'}) = 2$$

$$L(-K_{W'})^2 = 12 - \deg \Delta$$

(但し Δ は 2 次曲線束 $\alpha: W' \rightarrow \mathbb{P}^2$ の discriminant locus)。

$$D\text{-型: } L^2(-K_{W'}) = 0$$

$$L^2 S' = 0$$

$$L(-K_{W'})^2 = (-K_{W'}^2)_{W'} = \deg W'.$$

2.4. E-型 について。この場合 W' 上に例外因子 D がある。

$$(1) \operatorname{Pic} W' = \mathbb{Z} \cdot (-K_{W'}) \oplus \mathbb{Z} \cdot S' = \mathbb{Z} \cdot L \oplus \mathbb{Z} \cdot D$$

$$\text{ここで } L = \alpha^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \text{ である。}$$

$$(2) \text{ 互いに素な正整数 } z, u \text{ があって } D = z(-K_{W'}) - uS'.$$

証明は 2.3 (2) と同様である。

(3) E_1 -型 (非特異曲線 $\wedge$ の blow-down)、 E_2 -型 (非特異点 $\wedge$ の blow-down) については $\operatorname{Pic} V' \cong \mathbb{Z}$ で $-K_{V'}$ が正だから V' は第一種 3 次元 Fano 多様体になる。更に、

$$\operatorname{Pic} W' = \alpha^*(\operatorname{Pic} V') \oplus \mathbb{Z} \cdot D$$

$$\mathbb{Z}/u\mathbb{Z} \cong \operatorname{Pic} W' / (\mathbb{Z} \cdot D + \mathbb{Z} \cdot (-K_{W'})) \cong \operatorname{Pic} V' / \mathbb{Z} \cdot (-K_{V'})$$

であるから u は V' の指数に等しい。従って $u = 1, 2, 3$ あるいは 4。

(4) 交点数の関係を考えると、

$$E_1\text{-型: } (-K_{W'} + D)^3 = (-K_{V'})^3$$

$$(-K_{W'} + D)^2 D = \alpha^* (-K_{V'})^2 D = 0$$

$$\begin{aligned} (-K_{W'} + D) D^2 &= \alpha^* (-K_{V'}) D^2 = -(-K_{V'} \cdot \Gamma) \\ &= -u \cdot \deg \Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-K_{W'}) D^2 &= (-K_{W'} + D) D^2 - D^3 \\ &= -(-K_{V'} \cdot \Gamma) + c_1(\mathcal{N}_{\Gamma/V'}) \\ &= 2g(\Gamma) - 2 \end{aligned}$$

(但し $\Gamma = \alpha(D)$ は blow-up α の中心の曲線である)。

$E_2 - E_5$ -型:	E_2 -型	E_3, E_4 -型	E_5 -型
D^3	= 1	2	4
$D^2(-K_{W'})$	= -2	-2	-2
$D(-K_{W'})^2$	= 4	2	1

2.5. さて 2.3(2) 或いは 2.4(2) を用いて 2.3(4) 或いは 2.4(4) の各々の式の L, D を消去し、2.1 の値を代入すると、未知正整数 $\alpha, \gamma, \varepsilon, u, g, e$ に関する不定方程式系が得られる。例えば D -型で (A) の場合は、

$$\begin{cases} (2g-10)x^2 - 8xy - 2y^2 = 0 \\ 4x^2 + 4xy + (1-e)y^2 = 0 \\ (2g-10)x - 4y = \deg W_v' \end{cases}$$

である。これから、条件 2.3 (2)、(3) 或いは 2.4 (2)、(3) を満足するような解を求める。上の例では

$$(x, y, g, e, \deg W_v') \\ = (1, 1, 10, 9, 6) \quad \text{または} \quad (1, 2, 17, 4, 16)$$

である。このようにして得られた解から $\deg \Delta$ 、 $\deg W_v'$ 、 $\deg \Gamma$ 、 $g(\Gamma)$ 等の幾何学的意味を考慮すれば、次の一覧表ができる（上の場合 $\deg W_v' \leq 9$ より後者は不適当）。表中 #印が実際に構成される（双）有理写像である（次節参照）。また $g > 13$ となる解はないことも注意しておく。

2.6. (A) の場合、即ち $\sigma: W \rightarrow V$ が点の blow-up の場合。

g	e	L	D	型	V'	その他の情報
13	5	$-K_{W'} - S'$	$2(-K_{W'}) - 3S'$	E_1	Q_2	$\deg \Gamma = 6$ 、 $g(\Gamma) = 0$
#12	6	$-K_{W'} - S'$	$3(-K_{W'}) - 4S'$	E_1	$\mathbb{P}^3$	$\deg \Gamma = 6$ 、 $g(\Gamma) = 0$
11	7	$-K_{W'} - S'$		C	$\mathbb{P}^2$	$\deg \Delta = 4$
#10	9	$-K_{W'} - S'$		D	$\mathbb{P}^1$	$\deg W_v' = 6$
	3	$2(-K_{W'}) - S'$	$-K_{W'} - S'$	E_1	V_{22}	$\deg \Gamma = 6$ 、 $g(\Gamma) = 1$
#9	12	$3(-K_{W'}) - 2S'$	$-K_{W'} - S'$	E_2	V_{16}	

9	11	$2(-K_W')-S'$	$-K_W'-S'$	E_1	V_{14}	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$
8	15	$2(-K_W')-S'$	$5(-K_W')-3S'$	E_1	Q_2	$\deg \Gamma = 10, g(\Gamma) = 7$
#	16	$2(-K_W')-S'$	$3(-K_W')-2S'$	E_1	B_3	$\deg \Gamma = 4, g(\Gamma) = 0$
7	30	$5(-K_W')-2S'$	$2(-K_W')-S'$	E_2	V_{12}	
#	24	$3(-K_W')-S'$	$5(-K_W')-2S'$	E_1	B_5	$\deg \Gamma = 12, g(\Gamma) = 7$
	29	$3(-K_W')-S'$	$2(-K_W')-S'$	E_1	V_{10}	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$
#6	90	$9(-K_W')-2S'$	$4(-K_W')-S'$	E_2	V_{10}	
	85	$5(-K_W')-S'$	$9(-K_W')-2S'$	E_1	B_4	$\deg \Gamma = 10, g(\Gamma) = 6$
	89	$5(-K_W')-S'$	$4(-K_W')-S'$	E_1	V_8	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$
	59	$6(-K_W')-S'$	$5(-K_W')-S'$	E_1	V_{22}	$\deg \Gamma = 14, g(\Gamma) = 5$

2.7. (B) の場合、即ち $\sigma: W \rightarrow V$ が有理 2 次曲線からの blow-up の場合。

g	e	L	D	型	V'	その他の情報
#12	4	$-K_W'-S'$	$2(-K_W')-3S'$	E_1	Q_2	$\deg \Gamma = 6, g(\Gamma) = 0$
	11	$-K_W'-S'$	$3(-K_W')-4S'$	E_1	$\mathbb{P}^3$	$\deg \Gamma = 6, g(\Gamma) = 0$
#10	6	$-K_W'-S'$		C	$\mathbb{P}^2$	$\deg \Delta = 4$
#9	8	$-K_W'-S'$		D	$\mathbb{P}^1$	$\deg W_{V'} = 6$
	2	$2(-K_W')-S'$	$-K_W'-S'$	E_1	V_{22}	$\deg \Gamma = 6, g(\Gamma) = 1$
8	11	$3(-K_W')-2S'$	$-K_W'-S'$	E_2	V_{16}	
#	10	$2(-K_W')-S'$	$-K_W'-S'$	E_1	V_{14}	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$

#7	14	$2(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-3S'$	E_1	Q_2	$\deg \Gamma = 10, g(\Gamma) = 7$
	15	$2(-K_{W'})-S'$	$3(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_3	$\deg \Gamma = 4, g(\Gamma) = 0$
6	29	$5(-K_{W'})-2S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{12}	
	23	$3(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_5	$\deg \Gamma = 12, g(\Gamma) = 7$
#	28	$3(-K_{W'})-S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{10}	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$
5	89	$9(-K_{W'})-2S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{10}	
	84	$5(-K_{W'})-S'$	$9(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_4	$\deg \Gamma = 10, g(\Gamma) = 6$
#	88	$5(-K_{W'})-S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_1	V_8	$\deg \Gamma = 2, g(\Gamma) = 0$
	58	$6(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{22}	$\deg \Gamma = 14, g(\Gamma) = 5$

上の2つの表 2.6、2.7 において、 Q_2 は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異 2 次超曲面、 B_d ($d=3, 4$ または 5) は $\mathbb{P}^{d+1}$ 内の指数 2 の 3 次元 Fano 多様体を表わす。

§.3. 候補の吟味

3.0. 前節の最後に挙げた2つの表の(双)有理写像が実際に幾何学的に実現されるかどうかと調べる。表 2.6 の $g=13$ の場合が実現されないこと (3.1 参照) を示せば、序で述べた定理の主張 (1) が従う。 $g=12$ の場合、表 2.6、2.7 の情報を幾何学的に読みなおすと定理の (4) を述べたことになる。

また $g=13$ のときと同様の方法で、表 2.7 の $g=11$ の場合が実現されないことがわかり、定理の主張 (2) を得る。

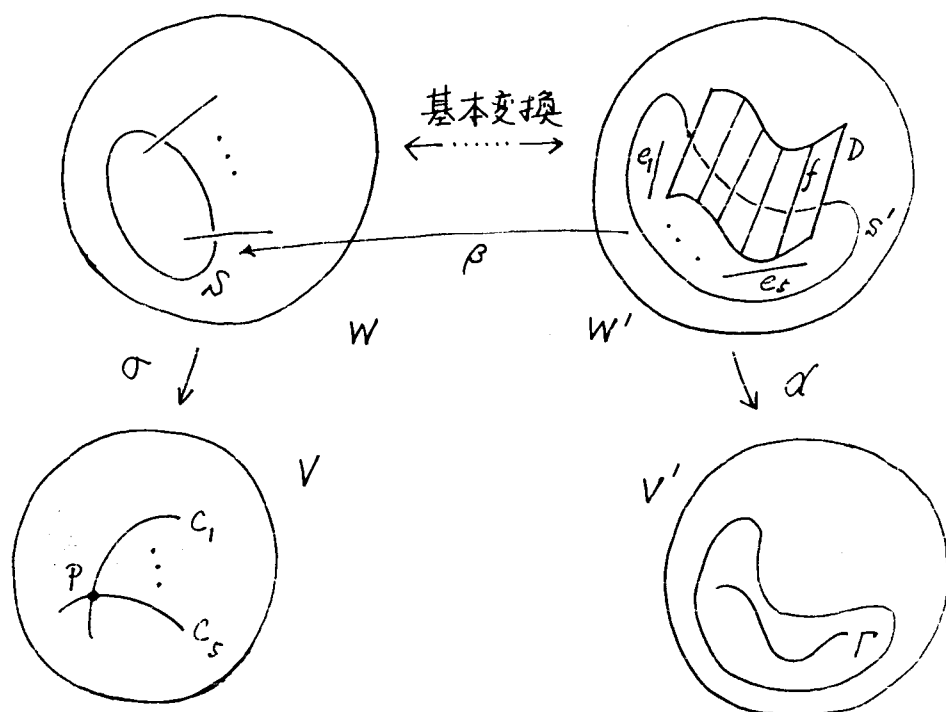
直線の存在 (即ち、序の定理の主張 (3)) は次のようにして得られる。まず、2.0 で述べたように、定理 1.4 (3) により、(A) で $g \geq 8$ のとき基本変換するのは P を通る有理 2 次曲線の強変換像だけであり、その本数を e が表わしていることに注意すれば、 $g \geq 8$ ならば必ず、有理 2 次曲線を含むことがわかる。次に注意 1.2 より、これらの有理 2 次曲線 C の法線束 $\mathcal{N}_{C/V}$ は $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ または $\mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C(1)$ なので、1.3 (B) の条件を満たしている。従って、表 2.7 の各々の (双) 有理写像 (#) が得られ、再び定理 1.4 (3) と e の意味から、直線の存在が従う。

3.1. $V = V_{24} \subset \mathbb{P}^{14}$ ($g=13$) が存在しないこと。

表 2.6 と 2.0 で述べたことから、 V の点 P を通る 5 本の有理 2 次曲線 $C_1, \dots, C_5$ があり、 V の P での blow-up W をこれらの有理 2 次曲線の強変換像に沿って基本変換して W' を得、 W' の端射線の縮約が V' である。

さて、点 P を充分一般にとれば、5 本の有理 2 次曲線は P で互いに横断的に交わっており、これらの法線束はみな $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ の形があると仮定してよい。 $S = \sigma^{-1}(P) \subset W$ の

W' での像を $\mathcal{S}'$ とすると、 $\beta: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S} \cong \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の 5 点 blow-up に他ならない。その例外曲線 $e_1, \dots, e_5$ が恰度 W' の (-2) -曲線である。



W' の例外因子 $D (\sim 2(-K_{W'}) - 3S')$ は線織面であるが、その一般ファイバーを f とすると、

$$f \cdot D = -1$$

$$f \cdot (-K_{W'} - S') = f \cdot \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1) = 0$$

より $f \cdot S' = 1$ である。従って $d' = D \cap S'$ は D の切断と有限本のファイバーである。簡単のため $d' \subset S'$ が切断 (即ち既約曲線) とし、 $d = \beta(d') \subset \mathcal{S} = \mathbb{P}^2$ とおく。 ℓ は $\mathcal{S} = \mathbb{P}^2$ 上の直線とし、 $\ell' = \beta^* \ell$ とする。交点数を計

算すると、

$$\begin{aligned}
 (d \cdot l)_S &= (d' \cdot l')_{S'} = D \cdot l' \\
 &= 2(-K_W) \cdot l' - 3S' \cdot l' = 4 + 3 = 7 \\
 (d' \cdot e_i)_{S'} &= D \cdot e_i = 2(-K_W) \cdot e_i - 3S' \cdot e_i = 3 \\
 &\quad (\text{但し } i = 1, \dots, 5)
 \end{aligned}$$

である。従って、 $d \subset S = \mathbb{P}^2$ は 5 つの 3 重点を持つ平面 7 次曲線である。

ところで、平面上に任意に 5 点をとるとき、その 5 点を通る 2 次曲線が必ず存在するので、曲線 d の 5 つの 3 重点を通る 2 次曲線 C と考える。交点数は $C \cdot d = 14$ であるが、5 つの 3 重点を通っているのだから、2 次曲線 C は 7 次曲線 d に含まれなければならない。従って d は可約曲線となる。ところが d' は既約であったから、これは矛盾である。

d' が一般の場合も、切断について考えれば、同じように矛盾が生じる。従って $g = 13$ となるものは存在しないことがわかった。

$g = 12$ および 11 の場合については、既に述べた $(3, 0)$ ので、以下では $g \leq 10$ の各々の場合について、矛盾が生じて実現できないものを除き、候補をひとつに絞る過程を述べる。

3.2. $g = 10$ の場合。

(A) 一次系 $| -K_{W'} - S' |$ の次元を考える。基本変換の性質より、
 $\dim H^0(\mathcal{O}_{W'}(-K_{W'} - S')) = \dim H^0(\mathcal{O}_W(-K_W - S))$ であり、
 $-K_W = \sigma^*(-K_V) - 2S$ を使えば、

$$\begin{aligned} \dim H^0(\mathcal{O}_{W'}(-K_{W'} - S')) &= \dim H^0(\mathcal{O}_W(\sigma^*(-K_V) - 3S)) \\ &\geq \dim H^0(\mathcal{O}_V(-K_V)) - 10 \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。従って $\dim | -K_{W'} - S' | \geq 1$ となり、 $-K_{W'} - S'$ と例外因子 D とが線型同値であるという第2の可能性は否定される。

(B) もっとも可能性はひとつだけである。

3.3. $g = 9$ の場合。

(A) 先に3.0で述べたように、 V_{16} 上には直線が存在する。その直線 Z からの二重射影と考えると、 $\pi_{22}: V_{16} \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ であり、 π_{22} が双有理写像になっているので、 V_{16} は有理多様体である。一方、 V_{14} は後に述べるように、3次元3次超曲面 B_3 と双有理であるが、 B_3 は非有理多様体なので、 V_{14} も非有理である。従って、 V_{16} と V_{14} が双有理写像で結ばれることはなく、第2の可能性は否定される。

(B) 3.2 (A) と同様に第2の候補は矛盾を生じる。

3.4. $g = 8$ の場合.

(A) 3次元3次超曲面 $B_3 \subset \mathbb{P}^4$ と、その上にある正規有理4次曲線 Γ について、2.0 及び 2.2 の操作を考察すると、物事は全とうまく進み、2.6 に対応する2組の数値が得られる。このとき、数 e は恰度、有理4次曲線 Γ の B_3 内の弦(chord)の本数を表わしていることもわかる。一方、全く別の方法で、 B_3 上の有理4次曲線の弦の本数が計算される。その値と e を比較して、双有理写像がひとつ決定できる。その逆写像として、第2の候補が具体的に実現される。

(B) 3.3 (A) で述べたように、 V_{16} は有理で、 V_{14} は非有理だから、第1の候補は矛盾を生ずる。

$g \leq 7$ の場合も同様にして決定していき、2.6、2.7の表の(井)を得る。

注意 3.5. V_{14} と B_3 とが双有理同値であることは、既に Fano、Iskovskih [2] により知られていたが、3.4 (A) で作られた双有理写像は、彼らの与えたものとは異っている。

参 考 文 献

- [1] V. A. Iskovskih, Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties; English transl. in J. Soviet Math. 13 (1980), 745-814.
- [2] ———, Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties; English transl. in J. Soviet Math. 13 (1980), 815-868.
- [3] M. Reid, Lines on Fano 3-folds according to Shokurov, preprint (1980).
- [4] ———, Minimal models of canonical 3-folds, Advanced Studies in Pure Math. 1 (1983), Algebraic Varieties and Analytic Varieties, 131-180.
- [5] K. Takeuchi, Some birational maps of non-trigonal Fano 3-folds, preprint (1987).