

加重一様分布の条件

市立習志野高

大久保 幸夫

§ 1. (a_n) は、非減少な自然数列で、ギャップ^oを持たないものとする。即ち、

$$(a_n) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{l_0}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{l_1}, \dots, \underbrace{i, i, \dots, i}_{l_i}, \dots)$$

ここに、 a_n は、値 i を l_i 個とるものとする ($l_i \geq 1$)。

さて、この数列 (a_n) に対し次の問題が考えられる。

$(a_n x)$ がすべての無理数 x に対して、mod 1 で一様分布するのは、 (a_n) がいかなる条件を満たすときか？

また、いかなる実数 x に対しても $(a_n x)$ が一様分布しないのは、 (a_n) がどんな数列のときか？

これらの問題を扱ったのが、Dress [1] と Topuzoglu [2] である。Dress は次の結果を得ている。

定理 A. (a_n) は非減少な自然数列で、

$$a_n = o(\log n)$$

を満たすならば、いかなる実数 x に対しても、 $(a_n x)$ は、 $\bmod 1$ で一様分布することはない。

定理 B. $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^+$) は実数値関数で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log n} = \infty$$

を満たすならば、ある非減少な整数列 (a_n) が存在し、

$a_n = O(f(n))$ で、すべての無理数 x に対して、 $(a_n x)$ は $\bmod 1$ で一様分布する。

定理 A. を一般化した Topuzoglu [2] による次の結果がある。

定理 C. (a_n) は非減少な自然数列で、

$$a_n = O(\log n)$$

を満たすならば、 $(a_n x)$ は、いかなる実数 x に対しても、 $\bmod 1$ で一様分布することはない。

この結果は、Dress による定理 B の意味から最良であることがわかる。

§ 2. 我々は定理 B, C を加重一様分布の場合に一般化する。

(p_n) は次の条件を満たす数列とする。

$$p_n \geq 0, \quad p_1 > 0$$

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty \text{ のとき})$$

この時、 (x_n) が (M, p_n) -一様分布 (mod 1) (以後 (M, p_n) -u. d. mod 1 と略記する。) であるとは、

すべての $0 \leq x \leq 1$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k C_x(\{x_k\}) = x$$

が成り立つことである。ここに、 $\{x_k\}$ は x_k の小数部分を $C_x(t)$ は $[0, x)$ の特性関数を表すものとする。

Weyl の基準にあたる次の結果がある。

定理 D. (x_n) が (M, p_n) -u. d. mod 1 であるための必要十分条件は、すべての $h \in \mathbb{N}^+$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n p_k e^{2\pi i h x_k} = 0$$

が成り立つことである。

さて、実数値関数 $p(t)$ は次の条件を満たすとする。

- i) $p(t) > 0$
- ii) $p(t)$ は、 t に関して非増加。
- iii) $p'(t)$ は、 $1 \leq t < \infty$ に対して連続。
- iv) $t p(t) = O(1)$
- v) $\int_1^\infty p(t) dt = \infty$

この $p(t)$ について、 $p_n = p(n)$ とおき、 (M, p_n) -一様分布 (mod 1) について考察する。

我々は次の結果を得る。

定理 1. $g(t)$ は $1 \leq t < \infty$ で定義され、正数値をとる連続関数で、次の条件を満たす。

- i) $g(t)$ は増加する凹関数。
- ii) $g(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$ のとき)
- iii) $g'(t) \neq 0$ ($t \in [1, \infty) - E$)
- iv) $g'(t) \rightarrow 0$ ($[1, \infty) - E$ を通り、 $t \rightarrow \infty$ のとき)
- v) $g'(t)/p(t)$ は単調 ($t \in [1, \infty) - E$)
- vi) $\frac{g'(t)}{p(t)} \int_1^t p(x) dx \rightarrow \infty$ ($[1, \infty) - E$ を通り、
 $t \rightarrow \infty$ のとき)

ここに、 $E = \{1 \leq t < \infty : g'(t) \text{ は存在しない} \}$ とする。

このとき、 $([g(n)]x)$ は、すべての無理数 x に対して、

$(M, P_n) - u.d. \bmod 1$ である。

また、定理 B に対応する結果として、

定理 2. $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^+$) は、実数値関数で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log \log n} = \infty$$

を満たすならば、ある非減少な整数列 (a_n) が存在し、

$$a_n = O(f(n))$$

を満たす。更に、 $(a_n x)$ はすべての無理数 x に対して、

$(M, 1/n) - u.d. \bmod 1$ である。

定理 3. k は 2 以上の整数とする。 $f(n)$ ($n \in \mathbb{N}^+$) は、実数値関数で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\log_{k+1} n} = \infty$$

(ここに、 $\log_1 n = \log n$, $\log_{k+1} n = \log(\log_k n)$ ($k \geq 1$ に対して) と定義する。) を満たすならば、ある非減少な整数列 (a_n) が存在し、 $a_n = O(f(n))$ を満たし、更に、 $(a_n x)$ は、すべての無理数 x に対して、 $(M, 1/n \log n \dots \log_{k-1} n)$ - u. d. mod 1 である。

一方、Topuzoğlu による定理 C に対応する結果として、我々は次の定理を得る。

定理 4. (a_n) は非減少の自然数列で、

$$a_n = O(\log \log n)$$

を満たすとする。このとき、いかなる実数 x に対しても、

$(a_n x)$ は $(M, 1/n)$ - u. d. mod 1 でない。

定理 4' k を 2 以上の整数とする。 (a_n) は非減少な自然数列で、

$$a_n = O(\log_{k+1} n)$$

を満たすならば、いかなる実数 x に対しても、 $(a_n x)$ は $(M, 1/n \log n \dots \log_{k-1} n)$ - u. d. mod 1 でない。

定理4, 4'は、定理2, 3の意味でそれぞれ最良の結果と言える。

最後に、 $([g(n)]x)$ がすべての無理数 x に対して、 $(M, g'(n)) - u.d. \bmod 1$ となるための十分条件と、その応用例を与える。

定理5. $g(t)$ は、 $1 \leq t < \infty$ で定義された正值の増加関数で、

- i) $g'(t)$ は連続。
- ii) $g(t) \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$ のとき)
- iii) $g'(t) \rightarrow 0$ (t に関して単調)
- iv) $t g'(t) = O(1)$

を満たすならば、すべての無理数 x に対して、 $([g(n)]x)$ は、 $(M, g'(n)) - u.d. \bmod 1$ である。

例1. $([\log n]x)$ は、すべての無理数 x に対して、 $(M, 1/n) - u.d. \bmod 1$ である。

例2. k を 2 以上の整数とする。そのとき、すべての無理数 x に対して、 $([\log_k n]x)$ は、 $(M, 1/n \log n \cdots \log_{k-1} n) - u.d. \bmod 1$ である。

参 考 文 献

[1] F. Dress : Sur l'équirépartition de certaines

suites (x_n) , Acta Arithmetica. XIV
(1968), 169-175.

- [2] A. Topuzoğlu : On u.d. mod 1 of sequence
 $(a_n x)$, Indag. Math. 43 (1981), 231-236.