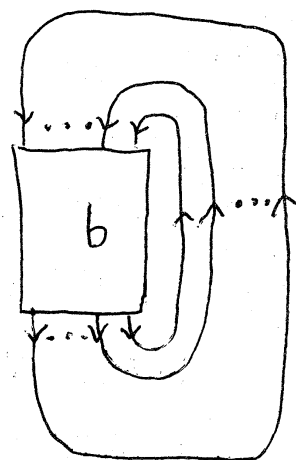


## 数理解析とリンクの多項式不変量

阪大 理 村上 順  
Jun Murakami

序. [W-A 1,2], [Jo] 及び [T] により, いくつかのリンクの多項式不変量が, 場の量子力学や統計物理に関係しててきた Yang-Baxter 方程式の解と深く関係していることが示された。また, このことを用いて [Jo] と [T] で二変数 Jones 多項式や Kauffman 多項式の state model による解釈が与えられた。ここでは, 上記の内容を主に [T] に沿って紹介したい。

1. ブレイドとリンク  $B_n$  を  $n$  本の糸 (string) を持つブレイドのなす群とする。また  $B = \{(b, n) \mid b \in B_n\}$  をブレイド全体の集合とする。ブレイド  $(b, n)$  の上端と下端を右図のように結んでできる (向きをついた) リンクの diagram を  $(b, n)$  の closure と呼び,  $(b, n)^\wedge$  又は  $b^\wedge$  と書く。次の 2 つの定理により, リンクの ambient isotopy 類の分類がブレイドのある同値類の分類に帰着される。



1.1 定理 (Alexander, [B]) 任意の  $\mathbb{R}^3$  中のリンク  $K$  に対し, ある  $(b, n) \in B$  で,  $K$  が  $(b, n)^\wedge$  の表わすリンクと ambient isotopic になるものが存在する。  $\square$

さらに2つのフレイド  $(b_1, n_1)$  と  $(b_2, n_2)$  の closure の表わすリンクが ambient isotopic になる為の条件も知られている。

1.2 定義 (Markov 類) 次の (1), (2) 及び (3) で生成される  $B$  の同値関係  $\sim$  による同値類のことを  $B$  の Markov 類 と呼ぶ。

(1)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b_1, b_2 \in B_n$  に対し,  $(b_1 b_2, n) \sim (b_2 b_1, n)$ ,

(2)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b \in B_n$  に対し,  $(b, n) \sim (b \sigma_n, n+1)$ ,

(3)  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b \in B_n$  に対し,  $(b, n) \sim (b \sigma_n^{-1}, n+1)$ ,

但し,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  を  $B_n$  の標準的な生成元とし,  $B_n$  の  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  を  $B_{n+1}$  の  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  に写す写像により,  $B_n$  を  $B_{n+1}$  の  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  で生成される部分群と同一視する。

1.3 定理 (Markov, [B]) 2つのフレイド  $(b_1, n_1)$  と  $(b_2, n_2)$  について次の (1) と (2) は同値である。

(1)  $(b_1, n_1)^\wedge$  と  $(b_2, n_2)^\wedge$  の表わす  $\mathbb{R}^3$  のリンクが ambient isotopic である。

(2)  $(b_1, n_1)$  と  $(b_2, n_2)$  は  $B$  の同じ Markov 類に属す。  $\square$

1.4 定義  $B$  から複素数体  $\mathbb{C}$  への写像で, Markov 類上では一定となるものを リンクの不変量 と呼ぶ。

## 2. Yang-Baxter 方程式の三角的な解

以下自然数

$n$  と  $d$  とを固定する。  $V$  を  $\mathbb{C}$  上の  $d$  次元線型空間とし、 $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$  ( $n$  個) と書く。  $R$  を  $\text{End}(V \otimes V)$  の1つの元とする。このとき、 $1 \leq i \leq n-1$  に対し、 $R_{n,i} \in \text{End}(V^{\otimes n})$  を、

$$(2.1) \quad R_{n,i} = \underbrace{id_V \otimes \cdots \otimes id_V}_{i-1 \text{ 個}} \otimes R \otimes \underbrace{id_V \otimes \cdots \otimes id_V}_{n-i-1 \text{ 個}}$$

で定義する。すなわち、 $R_{n,i}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes R(v_i \otimes v_{i+1}) \otimes v_{i+2} \otimes \cdots \otimes v_n$  である。スペクトラルパラメータと呼ばれる複素数  $\lambda$  でパラメトライズされた  $\text{End}(V \otimes V)$  の元  $R(\lambda)$  が、次の方程式を満たし、さらに各成分が  $\lambda$  の多項式になっているとき、 $R(\lambda)$  は Yang-Baxter 方程式の三角的な解である。

$$(YB) \quad R_{3,1}(\lambda) R_{3,2}(\lambda y) R_{3,1}(y) = R_{3,2}(y) R_{3,1}(\lambda y) R_{3,2}(\lambda)$$

(YB) の三角的な解は [3] で系統的に構成されている。

2.2 (YB) の三角的な解  $R(\lambda)$  に対し、 $\lambda = 0, 1$ , または  $\infty$  と特殊化することにより、次の関係式が得られる。

$$R_{3,1}(x) R_{3,2}(x) R_{3,1}(x) = R_{3,2}(x) R_{3,1}(x) R_{3,2}(x)$$

よって  $B_n$  の生成元  $\sigma_i$  に対し  $R_{n,i}(x)$  を対応させることにより、 $B_n$  の  $\text{End}(V^{\otimes n})$  への表現が得られる。(但し、 $R(x)$  は可逆と仮定する。) [Ji] で得られている解のいくつかを  $x=0$  に特殊化し、適当に  $q$  に関して変数変換して符号を調整したものの  $R$  は次のようになる。但し  $q$  は 0 でない複素数とする。

記号  $V$  の基底を  $u_1, u_2, \dots, u_d$  とし、 $E_{ij} \in \text{End}(V)$  の基底  $u_1, u_2, \dots, u_d$  に関する行列単位とする。すなわち

$$E_{ij} u_k = \delta_{jk} u_i \quad (\delta_{jk} = 1 \text{ 若 } j=k, 0 \text{ 若 } j \neq k) \text{ である。}$$

2.3  $A_r^{(1)}$  型に対応する場合.  $d = \dim V = r+1,$

$$R = -q \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i \neq j} E_{i,j} \otimes E_{j,i} + (q^{-1} - q) \sum_{i < j} E_{ii} \otimes E_{j,j},$$

但し、 $i, j = 1, 2, \dots, d$  とする。

2.4  $B_r^{(1)}, C_r^{(1)}, D_r^{(1)}, A_r^{(2)}$  型に対応する場合

それぞれ型に応じて  $(d, \chi) = (2n+1, -1), (2n, 1), (2n, -1), (n+1, -1)$  とおく。

$i = 1, 2, \dots, d$  に対し  $i' = d+1-i$  とし、

$$\bar{i} = \begin{cases} i - \alpha/2 & \text{if } 1 \leq i < (d+1)/2 \\ i & \text{if } i = (d+1)/2 \\ i + \alpha/2 & \text{if } (d+1)/2 < i \leq d \end{cases} \quad \text{とし,}$$

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i \leq (d+1)/2 \\ -\alpha & \text{if } (d+1)/2 < i \leq d \end{cases} \quad \text{とする。}$$

すると

$$\begin{aligned} R = & \sum_{\substack{i \\ i \neq i'}} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{\substack{i \\ i = i'}} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, j'}} E_{i,j} \otimes E_{j,i} \\ & + q^{-1} \sum_{\substack{i \\ i \neq i'}} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} + (q - q^{-1}) \sum_{i < j} E_{i,i} \otimes E_{j,j} \\ & + (q^{-1} - q) \sum_{i < j} \varepsilon(i) \varepsilon(j) q^{\bar{i} - \bar{j}} E_{i,j'} \otimes E_{i',j} \end{aligned}$$

となる。2.3と2.4で述べた  $R$  はすべて可逆であり、これを用いてフレック群の表現が定まる。

2.5 2.3と2.4の  $R \in \text{End}(V \otimes V)$  に対し、 $M_n$  を

単位元と  $R_{n,i}, R_{n,i}^{-1}$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) で生成される

$\text{End}(V^{\otimes n})$  の部分 algebra とする。  $A_1^{(1)}$  型の解に対応

する場合には  $M_n$  は、Jones の  $\mathbb{Z}_2$  型 factor からその sub-factor への射影から作られた algebra と同型になる。

$A_r^{(1)}$  型に対応する  $M_n$  は、 $A_n$  型の Invariant's Hecke algebra の商 algebra と同型になる。そして  $B_r^{(1)}, C_r^{(1)}, D_r^{(1)}$  型に

対応する場合には,  $M_n$  は Brauer の centralizer algebra  $[W]$  の  $q$ -analogue にあたるものになる。

### 3. Markov トレース と リンクの 不変量

$R \in \text{End}(V \otimes V)$  を,

$$R_{3,1} R_{3,2} R_{3,1} = R_{3,2} R_{3,1} R_{3,2} \quad \text{を満たす可逆元とする。}$$

$R$  に関し Markov トレース と呼ばれる良い性質を持つ  $\text{End}(V^{\otimes n})$  から  $\mathbb{C}$  への線形関数が存在するとき、これを用いて、リンクの不変量が構成できる。

3.1  $u_1, u_2, \dots, u_d$  を  $V$  の基底とする。まず,  $l_n: \text{End}(V^{\otimes n}) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes(n+1)})$  を,  $A \in \text{End}(V^{\otimes n})$  に対し,  $A \otimes \text{id}_V \in \text{End}(V^{\otimes(n+1)})$  を対応させる準同型とする。また,  $S_p: \text{End}(V^{\otimes(n+1)}) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes n})$  を次で定める。

$$\text{End}(V^{\otimes(n+1)}) \ni A = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{n+1} \\ j_1, \dots, j_{n+1}}} a_{i_1, \dots, i_{n+1} | j_1, \dots, j_{n+1}} E_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_{n+1}, j_{n+1}}$$

に対し

$$S_p(A) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n \\ j_1, \dots, j_n}} \left( \sum_k a_{i_1, \dots, i_n, k | j_1, \dots, j_n, k} \right) E_{i_1, j_1} \otimes \dots \otimes E_{i_n, j_n} \quad \square$$

行列のトレースが基底のとりかたによらないのと同様,  $S_p$  も  $V$  の基底のとりかたによらない写像である。また,  $S_p \circ l_n = \text{id}_{\text{End}(V^{\otimes n})}$  となる。

3.2 定義 (Markov トレース) 線型関数  $T_n: \text{End}(V^{\otimes n}) \rightarrow \mathbb{C}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) が次の条件を満たすとき, Markov トレース と呼ぶ。  
 $M_n$  を  $R$  に関して 2.5 で定義された  $\text{End}(V^{\otimes n})$  の部分 algebra とする。

- (1)  $\forall a, b \in M_n$  に対し,  $T_n(ab) = T_n(ba)$
- (2)  $\exists \tau_+ \in \mathbb{C}^\times, \forall a \in M_n, T_n(a) = \tau_+ T_{n+1}(\tau_n(a) R)$
- (3)  $\exists \tau_- \in \mathbb{C}^\times, \forall a \in M_n, T_n(a) = \tau_- T_{n+1}(\tau_n(a) R^{-1})$

但し,  $\tau_+, \tau_-$  は  $n$  にもよらない。

3.3 2.3 と 2.4 での  $R$  に対しては, Markov トレース  $T_n$  が存在する。まず,  $i=1, 2, \dots, d$  に対し,

$$M_i = q^{2i-d-1} (A_r^{(i)} \text{型}), \quad q^{2i-d-1} (\text{その他の型})$$

とし,  $\mu \in \text{End}(V)$  を  $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_d \end{pmatrix}$  (対角行列) と

おく。そして  $a \in \text{End}(V)$  に対し,  $T_n(a) = \text{trace}(\mu^{\otimes n} a)$  とおくと,  $T_n$  は Markov トレース となる。そして

$$S_{P_2}(\mu^{\otimes 2} R) = \tau_+ \mu, \quad S_{P_2}(\mu^{\otimes 2} R^{-1}) = \tau_- \mu$$

となる。  $\tau_+ = \tau_-^{-1} = -q^d (A_r^{(1)} \text{型}), q^{d+\alpha}$  (その他) である。

3.4 ブレイド  $(b, n)$  に対し  $w(b)$  を  $b$  の交点の符号の和

とする。但し, 符号は  $\nearrow \searrow$  を  $+1$ ,  $\searrow \nearrow$  を  $-1$  とする。また,

$$\alpha = (\tau_+/\tau_-)^{1/2}, \quad \beta = \tau_+/\alpha \quad \text{とおく。このとき, Markov}$$

トレースを用いて

$$f(b, n) = \alpha^{-w(b)} \beta^{-n} T_n(b)$$

とする。

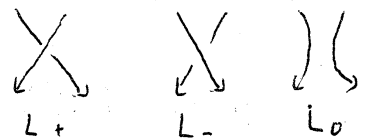
定理 ([T] 3.2.1)  $f$  はリンクの不変量である。

3.5 2.3と2.4での  $R$  から上のようして定義されるリンクの不変量  $f$  は、二変数 Jones 多項式又は Kauffman 多項式を特殊化したものである。

定義  $\ell, m \in \mathbb{C}^*$  とする。二変数 Jones 多項式  $P$  は、次の関係式で再帰的に定義されるリンクの不変量である。

$$\ell P(L_+) - \ell^{-1} P(L_-) = m P(L_0),$$

$$P(\bigcirc) = 1.$$



Kauffman 多項式  $F$  を定義する為にまず  $D$ -多項式を定義する。  $a, \lambda \in \mathbb{C}^*$  とする。  $D$ -多項式とは、次の関係式で定義される向きのついていないリンクの diagram の regular isotopy の不変量である。

$$D(\times) - D(\times) = \lambda (D(\cap) - D(\cup)),$$

$$D(\cap) = a D(\cap), \quad D(\cup) = a^{-1} D(\cap).$$

リンクの diagram  $K$  に対し、 $|K|$  を  $K$  から向きを忘れたものとする。 $K$  の交点の符号の和を  $w(K)$  とおく。このとき

$$F(K) = a^{-w(K)} D(|K|)$$

とみると、 $F$  はリンクの不変量となる。これを Kauffman 多項式と呼ぶ。

3.6 定理 ([T] 4.2.1, 4.3.4)  $A_n^{(1)}$  型に対応する不変量  $f$  は、二変数 Jones 多項式  $P$  で、 $a = q^d$ ,  $m = q - q^{-1}$  とおき、 $(q^d - q^{-d}) / (q - q^{-1})$  をかけたものに等しい。また、他の型に対応する不変量  $f$  は、Kauffman 多項式  $F$  で、 $a = q^{d+x}$ ,  $x = q - q^{-1}$  とおいたものに、 $(-1)^{c(K)+1} (-x + (q^{d+x} - q^{-d-x})) / (q - q^{-1})$  をかけたものに等しい。但し、 $c(K)$  は  $K$  の連結成分の個数を表わす。

## 4. state models (YB)-方程式の解から §3 の

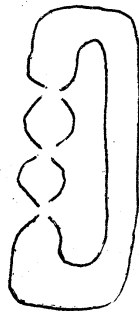
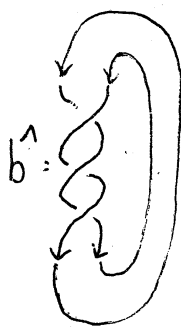
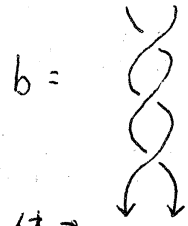
ようにして作られたリンクの不変量に対し、state model と呼ばれる方法を用いて、不変量をリンクの diagram から直接計算することができる。ここでは、簡単のため、closed braid に対してどのようにするかを説明する。2.3 または 2.4 の  $R$  からできる不変量  $f$  を一つ固定する。記号は §2, §3 のものを使う。 $b$  を  $B_n$  の元とする。 $b^\wedge$  の string の連結

部分集合で、交点と端点とし、交点の中に

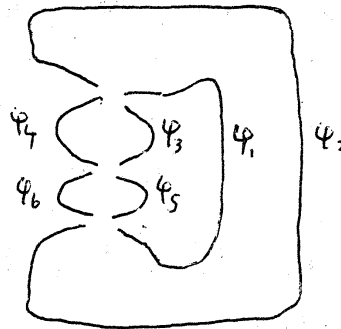
含まないものを edge と呼ぶ。  $b^\wedge$  の edge

全体の集合を  $\mathcal{E}$  と書く。そこから  $\{1, 2, \dots, d\}$

への写像  $\varphi$  を state と呼ぶ。  $b^\wedge$  の state 全体を



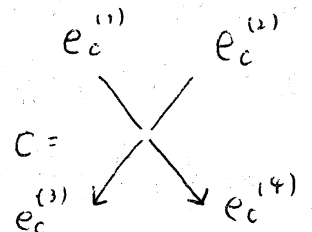
$b^\wedge$  の edges



$b^\wedge$  の state

$$1 \leq \varphi_i \leq d$$

$$(i=1, 2, \dots, b)$$



と書く。  $b^\wedge$  の交点全体の集合を  $\mathcal{C}$  と書く。  $b^\wedge$  の交点  $c$

に対し、その符号を  $\varepsilon(c)$  で表わす。また、  $c$  のまわりの

4個の edge  $e_c^{(1)}, e_c^{(2)}, e_c^{(3)}, e_c^{(4)}$  を上図のように定

める。1つの state  $\varphi \in \mathcal{F}$  の重み  $W(\varphi)$  を次で定める。

$$W(\varphi) = \prod_{c \in \mathcal{C}} R_{\varphi(e_c^{(1)}), \varphi(e_c^{(2)}), \varphi(e_c^{(3)}), \varphi(e_c^{(4)})}^{(\varepsilon(c))} \prod_{i=1}^n \mu_{\varphi(s_i)}$$

但し、  $s_1, \dots, s_n$  は  $b^\wedge$  の edge で  $b$  の上端のそれぞれ1番目

から  $n$  番目までの点を通るものとし、  $R_{kl}^{(i)}$  は  $R^{\pm 1}$  の

成分を表わす。すなわち  $R^{\pm 1}(u_i \otimes u_j) = \sum_{k, l} (R_{kl}^{(\pm 1)} u_k \otimes u_l)$  である。

上記の例では

$$W(\varphi) = R_{\varphi_2 \varphi_1}^{\varphi_2 \varphi_1} R_{\varphi_4 \varphi_3}^{\varphi_4 \varphi_3} R_{\varphi_6 \varphi_5}^{\varphi_6 \varphi_5} \mu_{\varphi_2} \mu_{\varphi_1}$$

となる。このとき、次が成り立つ。

定理.  
[T].5.2) 
$$\int (b, n) = \sum_{\varphi \in \mathcal{S}} W(\varphi)$$

## 5. リンクの不変量の平行バージョン リンクを

平行化する事により、二変数 Jones 多項式や Kauffman 多項式から、別のリンクの不変量が [M] で構成されている。これらの不変量に対しても、§3, §4 で述べた事が成り立つ。この事については、同じく数理解析研究所で 1987 年 9 月に行われたシンポジウム“数理解析物理の諸問題”に詳しく書かれているので、そちらを見て下さい。なお、一変数 Jones 多項式、すなわち  $A_1^{(1)}$  型に対応するリンクの不変量の場合には、[W-A.1.2] により詳しく言及されている。

### [文献]

- [B] Birman, J. S.: Braids, Links, and Mapping Class Groups, Annals of Math. Studies 82, Princeton, 1974.

- [F-Y-H-L-M-O] Freyd, P.; Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millet, K., and Ocneanu, A.: A polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 239-246.
- [J:] Jimbo, M.: Quantum R-Matrix for the generalized Toda system, preprint, March 1985.
- [Jo] Jones, V. F. R.: Kauffman の 4 分岐
- [K] Kauffman, L. H.: State models and the Jones Polynomial, preprint.
- [M] Murakami, J.: The parallel versions of link polynomial invariants, preprint.
- [W-A.1]  
Akutsu, Y., Wadati, M.: Knots invariants and the critical statistical systems, Journal of the Phys. Soc. of Japan, 56 (1987), 839-842.
- [W-A.2] Akutsu, Y., Deguchi, T., Wadati, M.: Exactly solvable Models and new link polynomials II.  
Link polynomials for closed 3-braids, preprint.