

Local deformation property for uniform embeddings

矢ヶ崎 達彦 (Tatsuhiko Yagasaki)

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科
(Kyoto Institute of Technology)

1. 概観

一様位相は、関数空間の基本的な位相の 1 つである。この論説では、一様位相の下での距離多様体の一様埋め込みの空間及び一様同相写像の成す群の局所・大域的変形に関して現在までに得られた結果 [5, 6] について報告する。

この研究の目標は、一様位相の下での距離多様体の一様同相写像の群の局所・大域的な位相的性質 (例えば 局所可縮性, ホモトピー型, 無限次元多様体としての局所・大域的な位相型 等) を明らかにすることである。写像の一様連続性及び写像空間の一様位相は距離の選び方に依存するので、この研究では、これらの位相的性質の「多様体のエンドの近傍での距離の性質」への依存を明らかにすることが重要になる。(当然、得られる結論は、ある距離多様体のクラスに関してある結論が成り立つという形になる。)

この目標に対して、第 1 段階として、一様位相の下での距離多様体における一様埋め込みの空間の変形性を考察する。我々は [6] において、一様埋め込みの局所変形性に関する定式化を行い、その基本的な性質を調べ、この性質が一様埋め込みの定義域の制限および加法において保たれる事を示した。これにより、一様埋め込みの局所変形の考察は、より単純な距離多様体のクラスの考察に帰着する。A.V. Cernavskii [2] は、多様体 M がコンパクト多様体 N の内部で、距離 d が N の距離の制限の場合を考察している。我々は [5] においてコンパクト多様体上の距離被覆空間のクラスを考察した。このクラスに対しては、コンパクト空間の埋め込みに対する Edwards-Kirby 局所変形定理及び写像の同等連続な族に対する古典的な Arzela-Ascoli の定理から、一様埋め込みに対する局所変形定理を導くことができる。さらに、一様埋め込みの局所変形の加法性から幾何的作用を持つ距離多様体も一様埋め込みに対する局所変形性を持つことが分かる [6]。

一様埋め込みの大域的な変形に関しては、[5] においてユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ やそのエンドを考察している。ユークリッド空間の特徴的な性質は相似変換の存在である。この相似変換による共役を考えることで、一様埋め込みに対する大域的変形を局所変形から導くことができる。さらに、この大域的変形は Lipschitz 同相で保たれるので、Lipschitz ユークリッドエンドにおける一様埋め込みに対する大域的変形に関する結果が得られることになる。

次の段階として、この一様埋め込みの変形性から一様同相写像の群の変形に関する結果を導く。一様埋め込みの局所変形性は、直ちに一様同相群の局所可縮性を意味するので、上記の結果が直接適用される。大域的な変形については、Lipschitz ユークリッドエンドにおける一様埋め込みに対する大域の変形性から、有限個の Lipschitz ユークリッドエンドを持つ距離多様体の一様同相群の大域の変形定理が得られる [5]。例として、 $\mathbb{R}^n$ の有界一様同相写像の群の可縮性や有限個の Lipschitz ユークリッドエンドのみを持つ任意の非コンパクト 2 次元多様体の一様同相群の連結成分の可縮性が示される。

次の第 2 節では、一様埋め込みに関する変形性、第 3 節では一様同相群の変形性に関して、さらに詳しく説明する。

2. 一様埋め込みの変形性

2.1. 一様埋め込みの局所変形性.

距離空間の間の写像 $f : (X, d) \rightarrow (Y, \varrho)$ は次の条件を満たすとき一様連続であるという：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して、もし $x, x' \in X$ で $d(x, x') < \delta$ ならば $\varrho(f(x), f(x')) < \varepsilon$ が成り立つ。写像 f は、全単射で、 f と f^{-1} が共に一様連続であるとき、一様同相写像と呼ばれる。一様埋め込みとは、その像の上への一様同相写像のことである。距離空間 (X, d) の部分集合 A, B に対して、 B が A のある ε -近傍 $O_\varepsilon(A)$ を含むとき、 B は A の一様近傍であると言い、 $A \subset_u B$ と書く。

距離多様体とは、第 2 加算位相多様体 (境界を持っても良い) で、距離が固定されたものを意味する。 (M, d) を距離多様体とする。 M の部分集合 X 及び C に対して、 $\mathcal{E}_*^u(X, M; C)$ で、適正 (proper) な一様埋め込み $f : (X, d|_X) \rightarrow (M, d)$ で $f = \text{id}$ on $X \cap C$ を満たすものの全体の空間を表す。この空間には、次の sup-距離 から定まる一様位相を与える。

$$d(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \in [0, \infty] \quad (f, g \in \mathcal{E}_*^u(X, M; C)).$$

定義 2.1. M の部分集合 A が以下の条件を満たすとき、 A は (M, d) の中で一様埋め込みに対して局所変形性を持つと言い、 $A : (\text{LD})_M$ と書く。

- (*) A の任意の部分集合 X , X の (M, d) における任意の一様近傍 $W' \subset W$, M の任意の部分集合 $Z \subset_u Y$ に対して、埋め込みの空間 $\mathcal{E}_*^u(W, M; Y)$ における包含写像 $i_W : W \subset M$ の近傍 W 及びホモトピー $\varphi : W \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{E}_*^u(W, M; Z)$ が存在して次の条件を満たす。

- (1) 各 $h \in W$ に対して
 - (i) $\varphi_0(h) = h$, (ii) $\varphi_1(h) = \text{id}$ on X ,
 - (iii) $\varphi_t(h) = h$ on $W - W'$ かつ $\varphi_t(h)(W) = h(W)$ ($t \in [0, 1]$),
 - (iv) もし $h = \text{id}$ on $W \cap \partial M$ ならば $\varphi_t(h) = \text{id}$ on $W \cap \partial M$ ($t \in [0, 1]$).
- (2) $\varphi_t(i_W) = i_W$ ($t \in [0, 1]$).

$A = M$ の場合には、添字 M を省き、 $M : (\text{LD})$ と書く。

この記号を用いると、Edwards-Kirby 局所変形定理 [3] は次の様に記述される。

Edwards-Kirby 局所変形定理. M の任意の相対コンパクト部分集合 K は条件 $(LD)_M$ を満たす。

条件 $(LD)_M$ は、次の基本的な性質を持つ。

命題 2.1. ([6])

- (1) (一様同相不変性) (M, d) と (N, ϱ) が一様同相のとき,

$$(M, d) : (LD) \iff (N, \varrho) : (LD)$$
- (2) (制限) (i) $A \subset B \subset M$ のとき, $B : (LD)_M \implies A : (LD)_M$
(ii) $A \subset_u N \subset M$ で N が n 次元多様体のとき, $A : (LD)_N \iff A : (LD)_M$
- (3) (有限加法性) (i) $A \subset_u U \subset M, B \subset M$ のとき, $U, B : (LD)_M \implies A \cup B : (LD)_M$
(ii) $M = A \cup B$ で A, B が n 次元多様体 かつ $A - B \subset_u A$ のとき,

$$A, B : (LD) \implies M : (LD)$$
- (4) (相対コンパクト部分集合) K が M の相対コンパクト部分集合のとき, 任意の $A \subset M$ に対して $A : (LD)_M \iff A \cup K : (LD)_M$
- (5) (エンドの近傍) $M = K \cup \bigcup_{i=1}^m L_i$, K は M の相対コンパクト部分集合, 各 L_i は M の閉集合でそれ自身 n 次元多様体, $d(L_i, L_j) > 0$ ($i \neq j$) とする。このとき,

$$M : (LD) \iff L_i : (LD) \quad (i = 1, \dots, m).$$

性質 (LD) を持つ距離多様体の具体例を以下にリストする。

例 2.1. (距離被覆射影)

次の定義は、リーマン被覆射影の自然な距離版である。

定義 2.2. 距離空間の間の写像 $\pi : (X, d) \rightarrow (Y, \varrho)$ が次の条件を満たすとき距離被覆射影と呼ぶ。

- (h)₁ Y の開被覆 $\mathcal{U}$ で 次の条件を満たすものが存在する:
各 $U \in \mathcal{U}$ に対して逆像 $\pi^{-1}(U)$ は互いに素な開集合の和であり, その各開集合は π によって U 上に等長的に写される。
- (h)₂ 各 $y \in Y$ に対して逆像 $\pi^{-1}(y)$ は X において一様離散
- (h)₃ 任意の $x, x' \in X$ に対して $\varrho(\pi(x), \pi(x')) \leq d(x, x')$

ここで, X の部分集合 A が一様離散であるとは, ある $\varepsilon > 0$ があって, 任意の異なる 2 点 $x, y \in A$ に対して $d(x, y) > \varepsilon$ が成り立つことである。もし Y が n 次元多様体ならば X も n 次元多様体になり, $\partial X = \pi^{-1}(\partial Y)$ となる。

Edwards-Kirby 局所変形定理 [3] 及び Arzela-Ascoli 定理 から, 一様埋め込みに対する次の局所変形定理を導くことができる [5, Theorem 1.1]。

定理 2.1. $\pi : (M, d) \rightarrow (N, \varrho)$ が距離被覆射影で N がコンパクト多様体ならば, (M, d) は条件 (LD) を満たす。

例 2.2. (幾何的群作用)

定理 2.1 は、被覆変換群の言葉では、群の自由作用の場合に対応している。非自由作用の場合に対しては、幾何的群作用の形で一般化される。離散群 G の距離空間 X 上での作用 Φ が幾何的であるとは、 Φ が proper, cocompact かつ 等長的であることであつた (cf. [1])。これを少し一般化して、次の用語を導入する。

- (i) 作用 Φ が局所等長的 $\iff$ 各 $x \in X$ に対して $\varepsilon > 0$ が存在して各 $g \in G$ は $O_\varepsilon(x)$ を $O_\varepsilon(gx)$ 上に等長的に写す。
- (ii) 作用 Φ が局所幾何的 $\iff \Phi$ は proper, cocompact かつ 局所等長的。

系 2.1. ([6, Theorem 4.1]) 距離多様体 (M, d) は、局所幾何的群作用を許容すれば、条件 (LD) を満たす。

例 2.3. (基本的なモデル空間)

(1) 標準距離を持つユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は、群 $\mathbb{Z}^n$ の標準的な幾何的作用及び付随する平坦トーラスへのリーマン被覆射影 $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ を許容する。したがって、 $\mathbb{R}^n$ は条件 (LD) を満たす。さらに、命題 2.1 から、ユークリッドエンド $\mathbb{R}_r^n = \mathbb{R}^n - O_r(0)$ ($r > 0$) 及び半空間 $\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ も条件 (LD) を満たすことが分かる。

(2) 双曲空間 $\mathbb{H}^n$ も、コンパクト双曲多様体上へのリーマン被覆射影を持つので、条件 (LD) を満たす。

(3) コンパクト距離多様体 (N, ϱ) 上のシリンダーとは、次の距離多様体のことである：

$$M = (N \times \mathbb{R}, d) \quad d((x, t), (y, s)) = \sqrt{\varrho(x, y)^2 + |t - s|^2}$$

M は、群 $\mathbb{Z}$ の自然な幾何的作用を持つので、条件 (LD) を満たす。したがって、シリンダーエンド $(N \times [0, \infty), d)$ も条件 (LD) を満たす。

2.2. 一様埋め込みの大域的変形.

一様同相群のホモトピー型を調べるためには、一様埋め込みの大域的変形に関する結果が必要となる。基本的なモデル空間であるユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は、相似変換

$$k_\gamma: \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n: k_\gamma(x) = \gamma x \quad (\gamma > 0)$$

を持ち、ユークリッドエンド $\mathbb{R}_s^n = \mathbb{R}^n - O_s(0)$ ($s > 0$) の $\mathbb{R}^n$ への一様埋め込みに対しては、この相似変換による共役を考えることで、局所変形性から大域的変形性を導く事ができる [5]。 $s > r \geq 0$, $\varepsilon > 0$ に対して、記号 $\mathcal{E}^u(i_{s,r}, \varepsilon; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}_r^n)$ で、空間 $\mathcal{E}^u(\mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}_r^n)$ における包含写像 $i_{s,r}: \mathbb{R}_s^n \subset \mathbb{R}_r^n$ の開 ε -近傍を表す。

命題 2.2. 任意の $c, s_0 > 0$ 及び $\beta > \alpha > 1$ に対して $s > s_0$ 及び ホモトピー

$$\psi: \mathcal{E}^u(i_s, c; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}^n) \times [0, 1] \longrightarrow \mathcal{E}^u(i_s, s; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}^n)$$

で次の条件を満たすものが存在する：

- (1) 各 $h \in \mathcal{E}^u(i_s, c; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}^n)$ に対して
 - (i) $\psi_0(h) = h$, (ii) $\psi_1(h) = \text{id on } \mathbb{R}_{\beta s}^n$, (iii) $\psi_t(h) = h \text{ on } \mathbb{R}_s^n - \mathbb{R}_{\alpha s}^n$ ($t \in [0, 1]$),

- (2) $\psi_t(i_s) = i_s \quad (t \in [0, 1])$,
 (3) $\psi(\mathcal{E}^u(i_s, c; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}_r^n) \times [0, 1]) \subset \mathcal{E}^u(i_s, s; \mathbb{R}_s^n, \mathbb{R}_r^n)$ for any $r < s$.

このような一様埋め込みの大域的変形性は Lipschitz 同相で保たれるので, Lipschitz ユークリッドエンドにおける大域的変形性が得られる。ここで, Lipschitz ユークリッドエンドは次の様に定義される。距離空間の間の写像 $h: (X, d) \rightarrow (Y, \varrho)$ は, 次の条件を満たすとき Lipschitz 写像であると言われる: ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $x, x' \in X$ に対して $\varrho(h(x), h(x')) \leq Cd(x, x')$ が成り立つ。写像 h は, 全単射で, h, h^{-1} が共に Lipschitz 写像であるとき, Lipschitz 同相写像と呼ばれる。

定義 2.3. 距離空間 (X, d) の Lipschitz n 次元 ユークリッドエンドとは, X の閉集合 L で, Lipschitz 同相写像 $\theta: \mathbb{R}_1^n \approx (L, d)$ で $\theta(\partial\mathbb{R}_1^n) = \text{Fr}_X L$ となるものを持つものを意味する。 $L_r = \theta(\mathbb{R}_r^n)$ ($r \geq 1$), $L' = \theta(\mathbb{R}_2^n)$, $L'' = \theta(\mathbb{R}_3^n)$ と置く。 $d(X - L, L_r) \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$) のとき, エンド L は孤立していると言う。

3. 一様同相写像の変形性

(X, d) を距離空間とし, A を X の部分集合とする。 $\mathcal{H}_A^u(X, d)$ は (X, d) からそれ自身の上への一様同相写像で A の各点を固定するもの全体の成す群に一様位相を与えたものを表す。 $\mathcal{H}_A^u(X, d)_0$ は $\mathcal{H}_A^u(X, d)$ における恒等写像 id_X の連結成分を表す。有界一様同相写像全体の成す部分群

$$\mathcal{H}_A^u(X, d)_b = \{h \in \mathcal{H}_A^u(X, d) \mid d(h, \text{id}_X) < \infty\}$$

は $\mathcal{H}_A^u(X, d)$ の開部分群なので, $\mathcal{H}_A^u(X, d)_0 \subset \mathcal{H}_A^u(X, d)_b$ となる。

3.1. 一様同相写像の局所的変形.

距離多様体 (M, d) が条件 (LD) を満たすときには, 定義 2.1 において $X = M$ にとって, 一様同相写像の局所変形が得られる。特に, 群 $\mathcal{H}^u(M, d)$ は局所可縮になる。したがって, 第 2.1 節の例で挙げた条件 (LD) を満たす距離多様体については, 一様同相群の局所可縮性が従う。

3.2. 一様同相写像の大域的変形.

第 2.2 節の Lipschitz ユークリッドエンドにおける一様埋め込みの大域的変形性から一様同相群に関する次の大域的変形定理が得られる ([5, Theorem 1.2]).

定理 3.1. X を距離空間とし, $L_1, \dots, L_m$ を X の互いに素な孤立した Lipschitz ユークリッドエンドとする。 $L' = L'_1 \cup \dots \cup L'_m$, $L'' = L''_1 \cup \dots \cup L''_m$ と置く。このとき, $\mathcal{H}^u(X)_b$ から $\mathcal{H}_{L''}^u(X)$ 上への強変形レトラクト φ_t ($0 \leq t \leq 1$) で

$$\varphi_t(h) = h \quad \text{on } h^{-1}(X - L') - L' \quad \text{for any } (h, t) \in \mathcal{H}^u(X)_b \times [0, 1].$$

を満たすものが存在する。

この定理から次の例が得られる。

例 3.1. 任意の $n \geq 1$ に対して $\mathcal{H}^u(\mathbb{R}^n)_b$ は可縮である。実際, $\mathcal{H}^u(\mathbb{R}^n)_b$ から $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^n}^u(\mathbb{R}^n)$ 上への強変形レトラクトが存在するが, 後者は Alexander's trick により可縮である。

例 3.2. N はコンパクト連結 2 次元多様体で境界は空でないとし, $C = \cup_{i=1}^m C_i$ は N のいくつかの境界円の和 ($\neq \emptyset$) とする。もし非コンパクト連結 2 次元多様体 $M = N - C$ に, 距離 d で, 各境界円 C_i に対応する M のエンド L_i が (M, d) の孤立 Lipschitz ユークリッドエンドとなるものをとれば, 群 $\mathcal{H}^u(M, d)_0$ は可縮となる。実際, $\mathcal{H}^u(M, d)_0 \simeq \mathcal{H}_{L''}^u(M)_0 \approx \mathcal{H}_C(N)_0 \simeq *$ が成り立つ。

$\mathcal{H}^u(\mathbb{R})_b$ は ℓ_∞ と同相である [4]。例 3.1 により, 任意の $n \geq 1$ について $\mathcal{H}^u(\mathbb{R}^n)_b$ が ℓ_∞ と同相になることが予想される。

今後の研究の指針として, 次の問題を挙げてこの論説を終える。

問題 3.1. 距離多様体 (M, d) が双曲空間 $\mathbb{H}^n$ やシリンダー (エンド) の場合に 群 $\mathcal{H}^u(M, d)_0$ のホモトピー型 (or ホモトピー群) を調べよ。

問題 3.2. リーマン多様体の一様微分同相群の一様 C^∞ 位相の下でのホモトピー型を調べよ。

REFERENCES

- [1] M.R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, GMW 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [2] A.V. Cernavskiĭ, Local contractibility of the group of homeomorphisms of a manifold, (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)*, **79 (121)** (1969) 307–356.
- [3] R. D. Edwards and R. C. Kirby, Deformations of spaces of imbeddings, *Ann. of Math. (2)* **93** (1971), 63–88.
- [4] K. Mine, K. Sakai, T. Yagasaki and A. Yamashita, Topological type of the group of uniform homeomorphisms of the real lines, *Topology Appl.*, **158** (2011), 572–581.
- [5] T. Yagasaki, Groups of uniform homeomorphisms of covering spaces, to appear in *J. Math. Soc. Japan* (Article in Press JMSJ 6460), (arXiv:1203.4028).
- [6] T. Yagasaki, On local deformation property for uniform embeddings, *preprint*, (arXiv:1301.3265).

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, KYOTO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, KYOTO, 606-8585, JAPAN