

球面に近い超曲面について

名工大 工 本 宮 寛 爾

§ 0. 序

$n+1$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} の凸な閉超曲面の中で, 球面を特徴づけることがいくつ知られている。

その中の一つとして, 次のことが成り立つ [1]。

凸な閉超曲面で, $K_{n-1}/K_n = \gamma$ (定数) であるものは, 半径 γ の球面である。ここで, K_{n-1} は $(n-1)$ -平均曲率, K_n はガウス曲率である。

そのとき, 関数 K_{n-1}/K_n の値が, どれ位, 超曲面に影響を与えるかを考えよう。その一つとして, 次のことが成り立つことを証明しよう。

定理. $M \subset R^{n+1}$ の凸な閉超曲面とする ($n \geq 2$)。 M 上の関数 K_{n-1}/K_n が十分定数 γ に近いならば, M は半径 γ の球面に近い, 即ち, M が半径が $\gamma - \varepsilon$, $\gamma + \varepsilon$ の同心球の間に含まれることがいえる。ここで, ε は関数 K_{n-1}/K_n の値のとり方により,

小さくとれる。

D. Koutroufiotis は, [2] で $n=2$ のとき, 即ち, 卵形面の場合に証明している。

§1. 簡単のため, 以下, 考える多様体や写像は皆 C^∞ 級とする。

R^{n+1} を $n+1$ 次元ユークリッド空間とする。

連結な n 次元多様体 M とはめこみ $x: M \rightarrow R^{n+1}$ で超曲面が与えられる。これを (M, x) で表わす。

M を向きづけ可能とすると, M の各点 p に対して, $x(p)$ での一意的な単位法線ベクトル $\xi(p)$ が決まる。第1, 第2基本形式 I, II は,

$$I = dx \cdot dx, \quad II = -d\xi \cdot dx$$

で与えられる。第2基本形式 II の第1基本形式 I に関する固有値, 即ち, 主曲率を $k_1, \dots, k_n$ とおく。 l -平均曲率 ($1 \leq l \leq n$) は,

$$\binom{n}{l} K_l = \sum_{i_1 < \dots < i_l} k_{i_1} \dots k_{i_l}$$

で与えられる。特に, $K_n = k_1 \dots k_n$ をガウス曲率という。

これからは, 凸な閉超曲面 (即ち, コンパクトで, ガウス曲率が M 上いたるところで正なもの) を考え, 法線ベクトル ξ は, 内部へ向かうものをとることにする。

S^n を R^{n+1} の中の単位球面とする。 g_0 を S^n 上の R^{n+1} から

導かれる自然なリーマン計量とする。

ガウス曲率 K_n が M 上いたるところ 0 でないから，球面表示 $\xi: M \rightarrow S^n$ は，微分同型写像である。

$$S^n \xrightarrow{\xi^{-1}} M \xrightarrow{x} R^{n+1}$$

$X = x \circ \xi^{-1}$ とおく。

以下，超曲面は (S^n, X) で考える。

そのとき，超曲面 (S^n, X) の l -平均曲率 $\widehat{K}_l$ と超曲面 (M, x) の l -平均曲率 K_l は，次の関係がある。

$$\widehat{K}_l(v) = K_l(\xi^{-1}(v)) \quad , \quad v \in S^n.$$

従って，簡単のため， $\widehat{K}_l(v)$ を同じ文字 $K_l(v)$ で表す。

次に，超曲面 (S^n, X) の支持関数 φ を

$$\varphi(v) = -X(v) \cdot v \quad , \quad v \in S^n$$

で定義する。ここで， $\cdot$ は R^{n+1} の中の内積を表す。

そのとき，支持関数 φ は次の微分方程式を満たす。

$$(1.1) \quad \Delta \varphi + n\varphi = n K_{n-1} / K_n$$

ここで， Δ は S^n のリーマン計量 g_0 に関する Laplace-Beltrami 作用素である。

実際， $\{X_1, \dots, X_n\}$ を接空間 $T_v(S^n)$ の正規直交基底とし， H をヤン基本形式 Π に対応する $(1,1)$ 型の対称テンソル場とする。

そのとき,

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= \sum_{i=1}^n \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \varphi = - \sum \nabla_{X_i} X \cdot \nabla_{X_i} \varphi - X \cdot \sum \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \varphi \\ &= \sum \nabla_{H^{-1}X_i} \varphi \cdot \nabla_{X_i} \varphi - X \cdot \Delta \varphi = \sum g_0(H^{-1}X_i, X_i) + n X \cdot \varphi \\ &= \text{Trace } H^{-1} - n \varphi = n K_{n-1}/K_n - n \varphi\end{aligned}$$

今, U_1, U_2 を次のように S^n の開集合とする。

$$U_1 = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > -\frac{1}{2} \},$$

$$U_2 = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} < \frac{1}{2} \}.$$

この2つの開集合は, S^n の一つの開被覆を与える。以下,

この開被覆とその座標系 $(y_1, \dots, y_n)$ とおく) を固定する。

次に, S^n 上の関数について, いくつかのノルムを定義しよう。
 S^n 上の連続関数 f に対して

$$\|f\| = \max_{v \in S^n} |f(v)|$$

ある正数 p , $1 < p < \infty$ とある正整数 k に対して, S^n 上の C^k 級の関数 f のノルムを

$$\|f\|_{k,p} = \left\{ \int_{U_1} \sum_{|d| \leq k} |D^d f|^p dU_1 \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{U_2} \sum_{|d| \leq k} |D^d f|^p dU_2 \right\}^{1/p}$$

で定義する。ここで, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_n^{\alpha_n}}$$

§ 2. [定理の証明]

考える超曲面 Σ (S^n, X_0) とおく。

この超曲面の支持関数 φ_0 は次の 2 階楕円型微分方程式を満たす。

$$\Delta \varphi + n\varphi = nK_{n-1}/K_n$$

$$\varphi_0 = \gamma + \psi_0 \text{ とおく。}$$

そのとき, ψ_0 は次の微分方程式を満たす。

$$(2.1) \quad \Delta \psi + n\psi = n(K_{n-1}/K_n - \gamma)$$

これの同次方程式 $\Delta \psi + n\psi = 0$ の解は, 球面調和関数の理論から, 一次関数 $\psi = a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}$ を球面へ制限したものであることがわかっている。

従って, 非同次方程式 (2.1) の解は

$$\psi = \psi_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n+1} x_{n+1}$$

で与えられる。

これらの解の中で, 同次方程式の解と直交するのは, 唯一つで, それは $a_1, \dots, a_{n+1}$ が次のように与えられるものである。

$$(2.2) \quad a_1 = \frac{-\int_{S^n} \psi_0 x_1 dw}{\int_{S^n} x_1^2 dw}, \dots, a_{n+1} = \frac{-\int_{S^n} \psi_0 x_{n+1} dw}{\int_{S^n} x_{n+1}^2 dw}$$

そのとき, Banach の定理と, Banach 空間上の Fredholm の理論から, かつる一意的な ψ に対して, その選り方から, 次の評価式が得られる。

$$(2.3) \quad \|\psi\|_{2,p} \leq C_1 \|K_{n-1}/K_n - \gamma\|_{0,p}$$

こゝで, C_1 は p だけに依存する定数である.

次に, Sobolev の不等式 から, $p > n/2$ のとき,

$$(2.4) \quad \|\psi\| \leq C_2 \|\psi\|_{2,p}$$

が成り立つ. こゝで, C_2 も p だけに依存する定数である.

従って,

$$(2.5) \quad \|\psi\| \leq C_1 C_2 \|K_{n-1}/K_n - \gamma\|_{0,p}$$

が成り立つ.

こゝで, 今まで考えた超曲面 (S^n, X_0) を平行移動した超曲面 (S^n, X) を考える.

$$X = X_0 - a$$

こゝで, $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ で, $a_1, \dots, a_{n+1}$ は (2.2) で与えられる定数である.

そのとき, その超曲面の支持関数 φ は

$$\varphi = \gamma + \psi$$

で与えられる.

不等式 (2.5) から, 任意の与えられた正数 ε に対して, $\|K_{n-1}/K_n - \gamma\|_{0,p}$ を十分小さくとると, $\|\psi\| < \varepsilon$ がいえる.

従って,

$$\gamma - \varepsilon < \varphi < \gamma + \varepsilon.$$

点 P_1 を超曲面 (S^n, X) の点で, 原点 O から最長距離にある点

P_2 を最短距離にある点とする。点 P_1, P_2 のとり方から線分 OP_1, OP_2 は超曲面と直交している。

従って,

$$|OP_1| = \varphi(v_1), \quad |OP_2| = \varphi(v_2).$$

従って, 超曲面上の任意の点 P に対して,

$$\gamma - \varepsilon < \varphi(v_2) = |OP_2| \leq |OP| \leq |OP_1| = \varphi(v_1) < \gamma + \varepsilon$$

故に, 超曲面 (S^n, X) は, 原点を中心とする半径が $\gamma - \varepsilon$,

$\gamma + \varepsilon$ の同心球の間に含まれることがわかる。

Q.E.D.

参考文献

[1] S.S. Chern : Integral formula for hypersurfaces in euclidean space and their application to uniqueness theorems.

J. Math. Mech. 8 (1959) , 947-955.

[2] D. Koutroufiatis : Ovaloids which are almost spheres.

Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971) , 289-300.