

Positive relativizations of low level complexity classes

国文学研究資料館 戸田誠之助 (Sernosuke Toda)

あらまし

本稿では、ある制限された領域限定 oracle Turing machine (OTM と略す) を用いることによって、低レベルの計算量のクラス間の包含関係が肯定的に相対化できることを示す。

1. 諸定義

本節では、本稿特有の概念のみを定義し、他の基本的概念については [3] に従う。

OTM M は、1本の読み込み専用入力テープ、1本の作業テープ、オラクテープと呼ばれる特別な出力テープと QUERY, YES, NO という特別な3つの状態をもつ Turing machine (TM と略す) である。 M は、オラクル A と入力 x が与えられたとき次のように動作する。まず、 M はオラクルテープに文字を出力しながら通常の TM と同様に動作しながら、ある時点で QUERY に遷移する。QUERY に遷移した M は、オラクルテー

テープ上の語が A に属するとき YES に遷移し、そうでないとき NO に遷移する。その後は、上述の動作を繰り返す。

本稿では、決定性、非決定性と alternating OTM (各々、DOTM, NOTM, AOTM) を扱う。

$\mathbb{N}$ を自然数全体とし、 $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ とする。 M, A, x を各々、任意の OTM, オラクルと M^A の入力とする。 M が S 領域限定 であるとは、 x に関する M^A の計算中に用いる作業テープセル数が高々 $S(|x|)$ 個であるときをいう。但し、オラクルテープは領域限定の対象としない。入力 x に関する M の ID α は、4組 (q, i, j, w) である。ここで、 q は M の状態、 i は入力ヘッドの位置、 j は作業ヘッドの位置、 w は作業テープの内容を表わす。 q が QUERY (YES, NO) のとき、 α を QUERY (YES, NO) ID と呼ぶ。 α が x に関する M の オラクル開始 ID であるとは、 x に関する M の ID β_1, β_2 が存在して、 $\beta_1 \xrightarrow{M, x} \alpha$ かつ $\alpha \xrightarrow{M, x} \beta_2$ かつ β_1 から α への遷移で M はオラクルテープに立字を書かずかつ α から β_2 への遷移で M はオラクルテープにオ1立字目を書くときをいう。(より正確に定義するためには、オラクルテープ上に書かれている立字数を保存するための作業テープを別に用意して、 α に於けるその作業テープの内容が 0 であつ β_2 に於けるその作業テープの内容が 1 のとき、 α をオラクル開始 ID と呼ぶことにすればよい)。このように

定義しても以後の議論に影響はない)。 α_1, α_2 を x に関する M の任意の ID とする。 α_1 から α_2 へ 直接到達可能 であるとは、 x に関する M の計算列 $\alpha_1 \vdash x \alpha_2 \vdash x \dots \vdash x \alpha_2$ が存在して、どの $\alpha_i (1 \leq i \leq l)$ も QUERY ID でないときをいう。また、この計算列を α_1 から α_2 への 直接計算列 と呼ぶ。 $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ とする。 M が h オラクル限定 であるとは、 x に関する M のオラクル開始 ID から QUERY ID への任意の直接計算列に於ける非決定的 (又は alternating) な動作の回数が高々 $h(|x|)$ であるときをいう。 M が h 道限定 であるとは、 x に関する M の任意のオラクル開始 ID α と QUERY ID β に対し、 α から β への相異なる直接計算列の数が高々 $h(|x|)$ であるときをいう。

任意の $r \geq 1$ に対し、 $\log^r = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid (\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq c(\log_2 n)^r \}$ とする。特に、 $\log^1$ を $\log$ で表ゆす。また、 $\text{polylog} = \bigcup_{r \geq 1} \log^r$ とする。 $\text{poly} = \{ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid (\exists c, k > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) \leq cn^k \}$ とする。

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $r \geq 1$ に対し、言語のクラスを次のように定める。

$DL^r(A)$ = オラクル A を用いる $\log^r$ 領域限定 DDTM で受理される言語のクラス

$NL_h(A)$ = オラクル A を用いる $\log$ 領域限定かつ h オラクル限定 NOTM で受理される言語のクラス

$\text{co-NL}_h(A) = \text{NL}_h(A)$ に属する言語の補集合全体

$\text{AL}_h(A)$ = オラクル A を用いる $\log$ 領域限定かつ h オラクル
限定 AOTM で受理される言語のクラス

$\text{ALP}_h(A)$ = オラクル A を用いる $\log$ 領域限定かつ h 道限定
AOTM で受理される言語のクラス

$\text{POLYLOG}(A) = \bigcup_{r \geq 1} \text{DL}^r(A)$

$\text{DL}^r = \text{DL}^r(\phi)$, $\text{NL} = \text{NL}_0(\phi)$, $\text{co-NL} = \text{co-NL}_0(\phi)$,
 $P = \text{AL}_0(\phi)$, $\text{POLYLOG} = \text{POLYLOG}(\phi)$.

特に, $\text{DL}^1(A)$ を $\text{DL}(A)$, DL^1 を DL で表わす。また, 上記
のクラスは h を関数族としたときも自然に定義される。

2. 肯定的相対化

まず, 本節の典型的な結果を示す。

[定理 2.1] $\text{DL} = \text{NL} \Leftrightarrow \text{DL}(A) = \text{NL}_{\log}(A)$ for any A .

(略証) $(\Leftarrow)$ 明らか。 $(\Rightarrow)$ 任意のオラクル A に対して,
 $\text{NL}_{\log}(A) = \text{NL}_0(A)$ となることは容易に示せる。また, $\text{DL}(A)$
 $\subseteq \text{NL}_0(A)$ は明らかである。従って, 以下では, $\text{DL} = \text{NL}$ を仮
定して, $\text{NL}_0(A) \subseteq \text{DL}(A)$ となることを示せばよい。

A を任意のオラクル, M を任意の $\log$ 領域限定かつ 0 オラ
クル限定 NOTM, x を M^A の任意の入力とする。まず, 証明に
必要な概念と記法を定める。 x に関する M の任意の ID は,
 $\{0, 1\}^*$ 上の語に適当に符号化される。 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を x に

関する M の全てのオラクル開始 ID とし, $d_1, d_2, \dots, d_m$ とする。ここで, $\prec$ は $\{0, 1\}^*$ 上の語の間の辞書式順序である。

$\widetilde{\alpha_{M,x}} = \#d_1\#d_2\cdots\#d_m$ とする。代入 $f: \{0, 1, \#\}^* \rightarrow 2^{\{0, 1, \#, Y, N\}^*}$

を $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\#) \in \{\#Y, \#N\}$ と定める。任意の $\sigma = \#x_1d_1\#x_2d_2\#\cdots\#x_md_m \in f(\widetilde{\alpha_{M,x}})$ に対し, $\text{oracle}(\sigma) = \{y \mid \text{ある } i (1 \leq i \leq m) \text{ が存在し, } x_i = Y \text{ かつ } y \text{ は } d_i \text{ から始まり}$

QUERY ID で終る x に関する M の計算でオラクルテープに出力される $\}$ と定める。 σ が (M, x, A) -valid であるとは, $\text{oracle}(\sigma) \subseteq A$ かつ $(\forall \sigma' \in f(\widetilde{\alpha_{M,x}})) [\text{oracle}(\sigma) \subseteq \text{oracle}(\sigma') \Rightarrow \sigma = \sigma']$ となるときをいう。

$\widetilde{L}_M = \{x\sigma \mid \sigma \in f(\widetilde{\alpha_{M,x}}) \text{ かつ } x \text{ は } M^{\text{oracle}(\sigma)} \text{ によって受理される}\}$ と定める。 $\widetilde{L}_M \in \text{NL}$ となることは次のアルゴリズムによって示される。

input $x\#x_1d_1\#x_2d_2\#\cdots\#x_md_m$;

$r \leftarrow x$ に関する M の初期 ID ;

while r は x に関する M の停止 ID でない do

if $r = d_i$ for some $i (1 \leq i \leq m)$

then begin

d_i から QUERY ID に到達するまで M を x に関して simulate し, 到達した QUERY ID を β とおく (但し, オラクルテープへの出力動作は全て無

視する) ;

if $x_i = Y$ then $r \leftarrow \beta$ に対応する YES ID
else $r \leftarrow \beta$ に対応する NO ID

end

else x に関して M を r から 1 step だけ simulate し, 新たに得られた ID を r とおく ;

if r は M の受理 ID then accept else halt

仮定より, $L_M \in DL$ であるから, L_M を受理する log 領域限定 DTM を M_1 とおく。そこで, $L(M^A)$ を受理する log 領域限定 DOTM M_2 を次のように構成する。

input x ;

$I_{head} M_1 \leftarrow 1$; $I_{head} M_1$ は M_1 の入力ヘッドの位置を表わす ;

$r \leftarrow x$ に関する M_1 の初期 ID ;

while r は M_1 の停止 ID でない do

if $I_{head} M_1 > |x|$

then begin

(M, x, A) -valid な $a \in f(\alpha_M, x)$ の $I_{head} M_1 - |x|$ 番目の文字 a を次のように求める ;

$j \leftarrow I_{head} M_1 - |x|$;

$i \leftarrow 0$; $z \leftarrow \lambda$; $\alpha_0 \leftarrow \lambda$;

repeat

$i \leftarrow i + 1$; $j \leftarrow j - |Z|$;

d_i から QUERY ID に到達するまで x に関して M を simulate し, オラクル A に query する ;

if answer = "yes" then $z \leftarrow \#Y_{d_i}$

else $z \leftarrow \#N_{d_i}$

until $j \leq |Z|$;

$a \leftarrow z$ の j 番目の立字 ;

M_1 の入力ヘッドが立字 a を見ているものとして,
 r から M_1 を 1 step だけ simulate する ;

新たに得られた M_1 の ID を r とおく ;

else r から M_1 を 1 step だけ simulate して, 新たに得られた M_1 の ID を r とおく ;

if r が M_1 の受理 ID then accept else reject ;

L_M の定義と M_2 の構成より, M_2^A が x を受理する $\Leftrightarrow (M, x, A)$ -valid な $\sigma \in f(\widetilde{\alpha_M}, x)$ に対して $x\sigma \in L_M \Leftrightarrow M^A$ が x を受理する, となる。よって, $NL_0(A) \subseteq DL(A)$ である。■

定理 2. 1 と同様の証明方法によって次の定理が得られる。

[定理 2. 2] 任意の $\alpha \geq 1$ に対し, 次が成り立つ。

(1) $NL \subseteq DL^\alpha \Leftrightarrow NL_{\log^\alpha}(A) \subseteq DL^\alpha(A)$ for any A .

(2) $NL = co-NL \Leftrightarrow NL_{\log}(A) = co-NL_{\log}(A)$ for any A .

(3) $P \subseteq DL^\alpha \Leftrightarrow AL_{\log^\alpha}(A) \subseteq DL^\alpha(A)$ for any A .

(4) $P \subseteq \text{POLYLOG} \Leftrightarrow \text{AL}_{\text{poly log}}(A) \subseteq \text{POLYLOG}(A)$ for any A .

[定理 2.3] $DL = P \Leftrightarrow DL(A) = \text{ALP}_{\text{poly}}(A)$ for any A .

(略証) $(\Leftarrow)$ 明らか。 $(\Rightarrow)$ $DL = P$ を仮定して, $\text{ALP}_{\text{poly}}(A) \subseteq DL(A)$ を示せばよい。 M, A, x を各々, $\log$ 領域限定かつ P 道限定 AOTM, 任意のオラクルと M の入力とする。ここで, P はある多項式である。以下では, M のオラクルテープアルファベットを $\{0, 1\}$ とする。また, x に関する M の任意の計算列に於いて, 同じ ID が 2 度以上現われなと仮定する。このように仮定しても一般性を失うことはない。

ある多項式 g が存在して, x に関する M の ID の数及び query される語の長さは高々 $g(|x|)$ であり, M が query する語の数は高々 $g(|x|)^2 \cdot P(|x|)$ である。そこで, 言語 $S_{M,x} \subseteq \{0, 1, \#\}^*$ を次のように定める。 $\alpha = \#d_1\#d_2\#\dots\#d_t$ ($d_i \in \{0, 1\}^*$, $1 \leq i \leq t$) に對し, $\alpha \in S_{M,x} \Leftrightarrow (\forall i, j) [i < j \Rightarrow d_i \neq d_j]$ かつ $t \leq g(|x|)^2 \cdot P(|x|)$ かつ $(\forall i) [|\alpha_i| \leq g(|x|)]$ である。代入 $f: \{0, 1, \#\}^* \rightarrow \Sigma^*$ を $f(0) = 0, f(1) = 1, f(\#) \in \{\#\Upsilon, \#N\}$ と定める。 $\sigma = \#x_1d_1\#\dots\#x_td_t \in f(S_{M,x})$ に對し, $\text{oracle}(\sigma) = \{d_i \mid x_i = \Upsilon\}$ と定める。 σ が (M, x, A) -valid であるとは,

(1) 任意の i ($1 \leq i \leq t$) に對し, x に関する M のオラクル開始 ID I と QUERY ID Q が存在して, d_i は I から Q へのある直

接計算列に於いてオラクルテープに出力される, かつ,
 (ii) x に関する M のオラクル開始 ID から始まり QUERY ID
 で終る任意の直接計算列に於いてオラクルテープに出力され
 る語 y に対し, $i (1 \leq i \leq m)$ が存在して, $\alpha_i = y$, かつ,
 (iii) $\text{oracle}(\sigma) \subseteq A$ かつ $(\forall \sigma' \in f(S_M, x)) [\text{oracle}(\sigma) \subseteq$
 $\text{oracle}(\sigma') \text{ かつ } \sigma \text{ が (i), (ii) を満たす} \Rightarrow \sigma = \sigma']$,
 が成り立つときをいう。明らかに, (M, x, A) -valid な $\sigma \in$
 $f(S_M, x)$ は一意である。そこで, $\widehat{L}_M = \{x\sigma \mid \sigma \in f(S_M, x)\}$
 かつ x は $\text{Oracle}(\sigma)$ によって受理される σ とすると, $\widehat{L}_M \in$
 P となることは, 容易に確かめられる。次に, $\widehat{\sigma}_{M,x}$ を $f(\widehat{\sigma}_M, x)$
 が (M, x, A) -valid であるような $\{0, 1, \#\}$ 上の語とする。 $V_M =$
 $\{(x, i, a) \mid \widehat{\sigma}_{M,x} \text{ の } i \text{ 番目の文字は } a \text{ である}\}$, $\widehat{V}_M = \{(x, i, a) \mid$
 $f(\widehat{\sigma}_M, x) \text{ の } i \text{ 番目の文字は } a \text{ である}\}$ とする。
 $V_M \in P$ となることは容易に示せる。このことと仮定より,
 $\widehat{V}_M \in DL(A)$ となる。仮定より, $\widehat{L}_M \in DL$ であるから,
 $\widehat{V}_M \in DL(A)$ という事実を用いれば, 定理 2.1 と全く同様
 にして $L(MA) \in DL(A)$ が示せる。

3. 否定的相対化

定理 2.1 と 2.2 で用いたオラクル限定を若干ゆるめる
 ことによって, 次の定理が得られる。

[定理 3.1] 任意の正数 $\alpha, \beta (1 \leq \alpha < \beta)$ に対して,

次が成り立つ。

- (1) $NL_{\log^P}(A) \not\subseteq DL^\alpha(A)$ for some A .
- (2) $NL_{\log^P}(A) \neq co-NL_{\log^P}(A)$ for some A .
- (3) $AL_{\log^P}(A) \not\subseteq DL^\alpha(A)$ for some A .
- (4) $\text{poly log} = o(h)$ を満たす任意の $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対して,
 $AL_h(A) \not\subseteq \text{POLYLOG}(A)$ for some A . ■

定理3.1は, 2節の結果を保持したままオラクル限定をゆるめることは非常に困難であることを示している。

<参考文献>

- [1] T. Baker, J. Gill & R. Solovay: Relativizations of The $P=?$ NP Question, SIAM J. Comput., 4(1975), 431-442.
- [2] R.V. Book: Bounded Query Machines: on NP and PSPACE, Theo. Comp. Sci., 15(1981), 27-39.
- [3] J.E. Hopcroft & J.D. Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation, Addison-Wesley, 1979.
- [4] M. Izumi: Controlled relativizations of Simultaneous Resources Bounded Complexity Classes and Related Problems, manuscript.
- [5] R.E. Ladner & N.A. Lynch: Relativization of Questions about Log Space Computability, Math. Sys. Theo., 10(1976).