
講義ノート

フェルミ粒子系超流動の物理

—— BCS-BEC クロスオーバーと新しい物質科学 ——

筑波大学 数理物質科学研究科 物理学専攻 大橋 洋士

(2005 年 8 月 30 日受理)

目 次	頁
1. はじめに：新しいフェルミ粒子系超流動の誕生	160
2. 原子の統計性（ボーズ原子、フェルミ原子）と原子状態	161
3. フェルミ粒子の対形成（分子化）とフェルミ面効果	168
4. 原子間引力相互作用とフェッシュバハ共鳴	178
5. 第二量子化	183
6. フェルミ粒子超流動の基底状態と BCS-BEC クロスオーバー	191
7. フェルミ粒子系超流動の励起状態	203
8. フェッシュバハ共鳴を考慮した場合の超流動状態	218
9. 有限温度における超流動状態と転移温度	228
10. トラップの効果と 1 粒子励起スペクトル	242

*本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

1. はじめに：新しいフェルミ粒子系超流動の誕生

1995年に希薄アルカリ原子ボーズガスでボーズ＝アインシュタイン凝縮 (Bose-Einstein condensation: BEC) が実現して以来、物理学上の次なる大きな目標となっていたものがフェルミ原子ガスの超流動化です。これは、金属超伝導での電子のクーパー対形成とその凝縮を原子によって実現させようとする、非常に野心的・挑戦的な研究で、多大なる努力の結果、ついに2004年、 ^4He , ^6Li (これらはフェルミ原子) に対し相次いで実現されました。

この新しい超流動は、単に、金属超伝導、液体ヘリウム3 (ヘリウム3はフェルミ粒子) に続く「第3のフェルミ粒子系超流動」であるだけでなく、フェッシュバッハ (Feshbach) 共鳴と呼ばれる従来とは全く異なるクーパー対形成機構で実現しているという点で非常に新規性に富んでいます。また、この機構の持つ、「可変な対形成相互作用」、という著しい特徴により、いわゆるBCS-BECクロスオーバー (粒子間の引力相互作用が強くなるにつれ、超流動の性質が超伝導でよく知られたBCS理論的なものから、超流動転移温度以上で形成された分子ボソンのBECへと連続的に移行する現象) が実際に観測できるようになりました。これにより、従来、別々に議論されてきた、「超伝導に代表されるフェルミ粒子系のBCS超流動」と「ヘリウム4に代表されるボーズ粒子系のBEC」が統一的な視点から理解できるようになりました。

フェルミ原子ガスの超流動転移温度 (T_c) は最高でフェルミ縮退温度 (T_F) の20%近くにも到達、これは $T_F = 10,000 \sim 100,000 [\text{K}]$ の金属超伝導に対応させると、転移温度がかかるく室温 (300 K) を突破した超高温超伝導が実現したことに相当しています。室温超伝導の実現は物性物理学の究極の目標の一つであり、産業界にとっても非常に大きなインパクトをもたらすはずです。しかし、現在、金属超伝導における T_c の最高はまだ150 K程度です。今回のフェルミ粒子系超流動の実現は、もしかしたらあるかもしれない「室温超伝導の壁」が実は存在しないことを明らかにしただけでなく、いつの日か室温超伝導が実現した時に、それは一体どのような物性を示すであろうか、という問題を今から研究できるという点で物性物理学にとっても非常に重要であると言えます。

この講義では、この新しいフェルミ粒子系超流動について、その理解の基本となるBCS理論、BEC, BCS-BECクロスオーバーを中心に解説したいと思います。超流動は量子多体効果が巨視的スケールで現れる現象であり、その理解には量子力学、統計力学の助けがどうしても必要です。この講義では、できるだけ基本的なところから説明し、将来皆さんがこの研究分野に参入しやすいようにしたいと思います。この講義をきっかけに皆さんがこの新しい研究領域に興味を持ってくれることを期待します。

2. 原子の統計性（ボーズ原子、フェルミ原子）と原子状態

原子は陽子+中性子+電子という3種類のフェルミ粒子で構成されているおり、この和が偶数の原子はボーズ粒子、奇数の原子はフェルミ粒子として振る舞います。フェルミ原子ガス超流動で使われているLi（原子番号3）、K（原子番号19）を例にとると、

${}^6\text{Li}$: 陽子 (3) + 中性子 (3) + 電子 (3) = 9 : フェルミ原子

${}^7\text{Li}$: 陽子 (3) + 中性子 (4) + 電子 (3) = 10 : ボーズ原子

${}^{39}\text{K}$: 陽子 (19) + 中性子 (20) + 電子 (19) = 58 : ボーズ原子

${}^{40}\text{K}$: 陽子 (19) + 中性子 (21) + 電子 (19) = 59 : フェルミ原子

${}^{41}\text{K}$: 陽子 (19) + 中性子 (22) + 電子 (19) = 60 : ボーズ原子

一般にアルカリ原子 ${}^n\text{A}$ は n が偶数のものがフェルミ原子、奇数のものがボーズ原子になります。

原子のスピン状態 (hyperfine state) F は核スピン (I) と外殻電子スピン (S) の和で与えられます (内殻電子のスピンは全体として0です)。アルカリ原子の場合、外殻電子は1つなので $S=1/2$ となり、

$$F=I \pm S$$

具体的には

${}^6\text{Li}$ ($I=1$) : $F=3/2, 1/2$

${}^{40}\text{K}$ ($I=4$) : $F=9/2, 7/2$

金属超伝導では $S_z=\pm 1/2$ ($\uparrow\downarrow$) 電子間でクーバー対が形成されますが、フェルミ原子ガスの超流動では2種類の原子スピン状態を擬スピン ($\uparrow\downarrow$) と見立てた時、その間でクーバー対が形成されます。上の2つの超流動の場合は次の原子状態が用いられています。

${}^6\text{Li}$: $|F, F_z\rangle = |1/2, \pm 1/2\rangle$

${}^{40}\text{K}$: $|F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle, |9/2, -7/2\rangle$

フェルミ原子、ボーズ原子の違いは2原子の交換性の違いとなって現れます。今、

空間座標、スピン座標をまとめて x と書いて、量子数 n にある原子の波動関数を $\phi_n(x)$ とすると、フェルミ原子の波動関数は 2 原子の入れ替えに対し反対称、ボーズ原子では対称でなくてはなりません。

$$\text{○フェルミ原子： } \Psi(x_1, x_2) = \phi_n(x_1)\phi_m(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_m(x_1) : \Psi(x_2, x_1) = -\Psi(x_1, x_2)$$

$$\text{○ボーズ原子： } \Psi(x_1, x_2) = \phi_n(x_1)\phi_m(x_2) + \phi_n(x_2)\phi_m(x_1) : \Psi(x_2, x_1) = \Psi(x_1, x_2)$$

この性質のため、フェルミ原子では、同じ量子状態を 2 原子が占有することはできません。この性質はパウリの排他原理と呼ばれます：

$$\Psi(x_1, x_2) = \phi_n(x_1)\phi_n(x_2) - \phi_n(x_2)\phi_n(x_1) = 0. \quad (2.1)$$

つまり、2 種類の原子スピン状態 ($\uparrow \downarrow$) のみを考えるならば、各エネルギー状態は最大 2 原子までしか占有できません (量子数 = エネルギー量子数 + スピン)。また、異なる量子状態を占めていたとしても、2 つのフェルミ原子が同一地点 (実空間 + スピン空間) に来ることはできません。

$$\Psi(x_1 = x_2 = x) = \phi_n(x_1 = x)\phi_m(x_2 = x) - \phi_n(x_2 = x)\phi_m(x_1 = x) = 0. \quad (2.2)$$

特に、原子スピン状態が同じ場合は、空間的に同一地点に来れないことにことなります。このように、相互作用がなくても「統計性によって互いに避けあう」性質はボーズ原子間にはなく、フェルミ原子間には「統計的斥力」が働いている、と呼ぶことができます。この排他的性質により、原子ガスのような多粒子系での基底状態はフェルミ原子ガス、ボーズ原子ガスで全く異なったものになります。

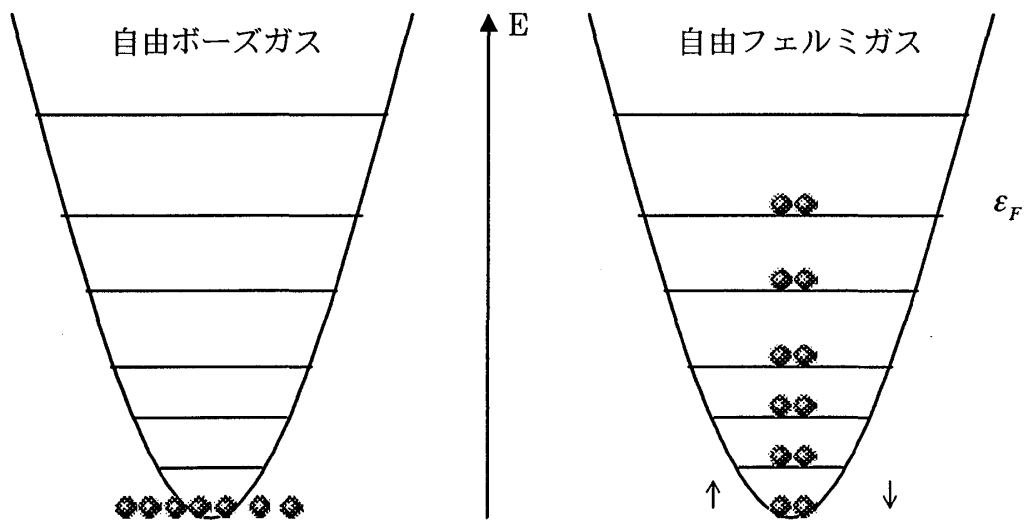


図 2. 1 : 自由ボーズガスと自由フェルミガスの基底状態

自由フェルミ原子の場合、エネルギー準位の下からパウリの原理に従って原子をつめていった場合の一番高いエネルギー準位をフェルミエネルギー ε_F と呼びます。これを温度に換算したものがフェルミ（縮退）温度 T_F で、

$$\varepsilon_F = k_B T_F, \quad (2.3)$$

の関係にあります。ボルツマン定数を 1 とするスケールでは両者は同じものです。また、

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 p_F^2}{2m}, \quad (2.4)$$

と書いた際、 p_F をフェルミ波数、 $\hbar p_F$ をフェルミ運動量と呼びます。 $\hbar=1$ のスケールでは両者は同じです。以下では特に問題ない限り、 $k_B = \hbar=1$ とおくことにします。

有限温度の場合、各状態を占有する原子数はフェルミ分布関数 $f(\varepsilon)$ 、ボーズ分布関数 $n_B(\varepsilon)$ で与えられます：

$$f(\varepsilon - \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \quad (2.5)$$

$$n_B(\varepsilon - \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}. \quad (2.6)$$

ここで $\beta = 1/T$ 、 μ は化学ポテンシャルです。化学ポテンシャルはフェルミ原子の場合、正負いずれの値をとる事もできますが、ボーズ原子の場合、分布関数が正であることから、最低エネルギー準位以下の値しかとれません。例えば、自由ボーズガスの場合、

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} \geq 0; \mu < 0. \quad (2.7)$$

化学ポテンシャルの値は粒子数の方程式から決定されます。先ず、フェルミ原子の場合を考えると、スピン状態が 2 種類 ($\uparrow \downarrow$) ある場合は（フェルミ原子ガス超流動はこの場合に相当します）

$$N = 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu). \quad (2.8)$$

この表式において、運動量の和をエネルギー積分に直すには、周期境界条件の下で、運動量（波数） p_x, p_y, p_z が

$$p_j = \frac{2\pi n_j}{L}, \quad (2.9)$$

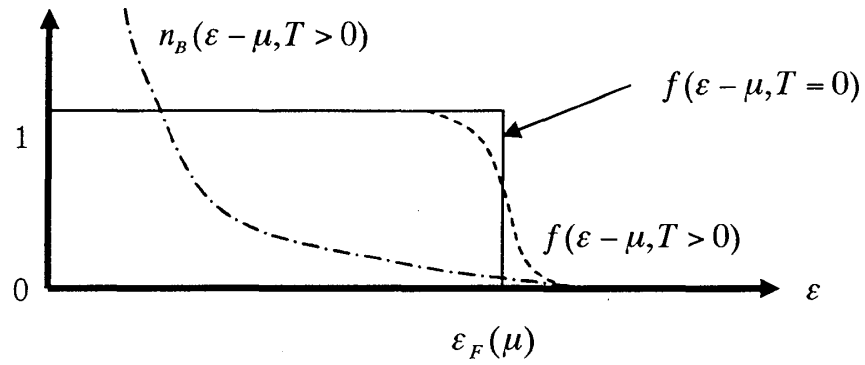


図 2. 2 : フェルミ分布関数とボーズ分布関数のエネルギー依存性と温度依存性の模式図

と書けることに注意すれば良いでしょう。離散的な波数の間隔が $\Delta p = 2\pi/L$ であることに注意して「区分求積法」を用いると、

$$N = 2 \frac{1}{(\Delta p)^3} \sum_p f(\varepsilon_p - \mu) \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int dp_x dp_y dp_z f(\varepsilon_p - \mu). \quad (2.10)$$

積分変数をエネルギーに変換して、

$$n = \frac{N}{\Omega} = 2 \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) f(\varepsilon - \mu). \quad (2.11)$$

ここで、体積 $\Omega = 1$ として、

$$\rho(\varepsilon) = \frac{m\sqrt{2m}}{2\pi^2} \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

は（1スピンあたりの）状態密度と呼ばれ、 $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ 中の状態数を与えます。 $T=0$

の場合、フェルミ分布関数はステップ関数となりますが、これは前述した「基底状態＝フェルミエネルギーまで詰まった状態」を記述しています。 よって、

$$\mu(T=0) = \varepsilon_F. \quad (2.13)$$

これを利用して上の積分を $T=0$ で評価すると、粒子数とフェルミエネルギーの関係が得られます。

$$n = 2 \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \rho(\varepsilon) = \frac{(2m\varepsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2} = \frac{p_F^3}{3\pi^2}. \quad (2.14)$$

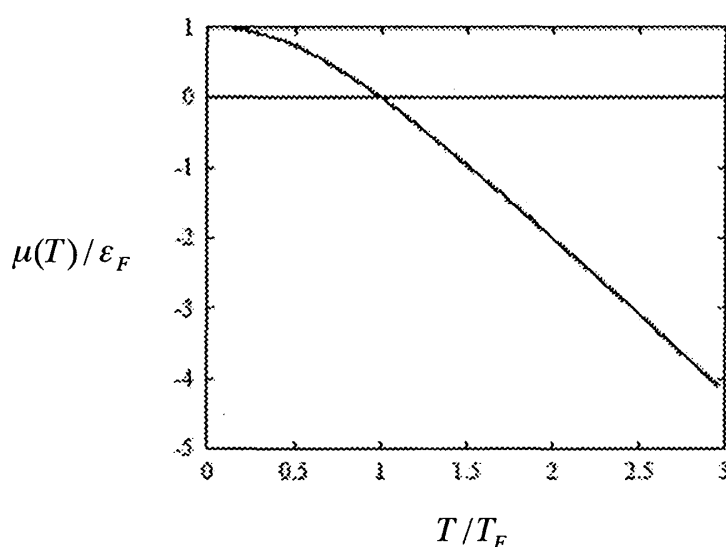


図 2. 3 : 自由フェルミガスにおける化学ポテンシャルの温度変化

$T=0$ で階段関数の形をしていたフェルミ分布関数は有限温度になると、エッジ付近が温度 T にわたり崩れだします。したがってフェルミ温度程度になると階段関数が全域にわたって $f < 1$ となり崩れ、「 ε_F 以下の量子状態が占有されている ($f=1$)」という、 $T=0$ でのフェルミ粒子独特の性質ははっきりしなくなってしまいます。つまり、フェルミ縮退温度 T_F はフェルミ統計の効果が顕著になる特徴的な温度を表します。

温度の効果は化学ポテンシャルにも影響します。十分低温ではゾンマーフェルト展開によって、

$$\mu(T) = \varepsilon_F \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \right), \quad (2.15)$$

が得られ、より高温では上図のように負の値をとります。このような状況ではフェルミ分布関数は古典統計のボルツマン因子に帰着します：

$$f(\varepsilon - \mu) \approx e^{-\beta|\mu|} e^{-\beta\varepsilon}. \quad (2.16)$$

次にボーズ粒子の場合を考えます。化学ポテンシャルはやはり粒子数の式

$$n = \frac{1}{\Omega} \sum_p n_B(\varepsilon - \mu) = \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) n_B(\varepsilon - \mu), \quad (2.17)$$

から求めますが（スピン自由度はないとしました）、 $\mu \leq 0$ でなくてはならないこと

に注意すると、右辺はある温度以下になると、右辺を最大にする $\mu = 0$ の値を代入しても N に届かなくなります。これは、この温度以下で最低エネルギー状態に巨視的な数のボーズ粒子が凝縮するボーズアインシュタイン凝縮 (B E C) が起こったため、この状態では $\mu = 0$ 、また、

$$n_0 = n - \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) n_B(\varepsilon), \quad (2.18)$$

が凝縮した原子数密度を与えることになります。 $T = 0$ では $n_0 = n$ となります。

B E C の転移温度は、上式で $n_0 = 0$ とおいた式から決定され、結果は

$$T_c = \frac{2\pi}{(\zeta(3/2))^{2/3}} \frac{\eta^2}{m}. \quad (2.19)$$

ここで $\zeta(3/2) = 2.612$ ツェータ関数です (導出は教科書を見てください)。

このように、

○フェルミ原子ガス：フェルミ縮退温度

○ボーズ原子ガス：B E C 転移温度

と、それぞれについて、「特徴的な温度」が出てきましたが、両者に共通点はあるのでしょうか？ これを見るために、量子力学のキーワードである「粒子の波動性」という観点からこれらの温度をながめてみます。

ドブロイの物質波の考えによれば、運動量 p の粒子は $p = h/\lambda$ 程度の広がりを持った波としての性質を有しています。温度 T にある系において、運動量と温度の関係は

$$T \approx \frac{p^2}{2m}, \quad (2.20)$$

ですからこれより熱的ドブロイ波長として $\lambda = h/\sqrt{2mT}$ が得られます。(熱的ドブロイ波長のきちんとした定義は $\lambda = h/\sqrt{2\pi mT}$ ですが数因子の差異はここでは重要ではありません。) フェルミガスの場合、フェルミ温度近傍でこれを評価すると、

$$\lambda \sim 1/p_F. \quad (2.21)$$

これは先の粒子数密度の式から分かるように平均粒子間距離 ($d \sim 1/n^{1/3} \sim 1/p_F$) に相当していることが分かります。つまり、この程度の温度になると、フェルミ粒子の量子力学は広がりが粒子間距離程度にまでなり、波動性が無視できなくなることが分かります。

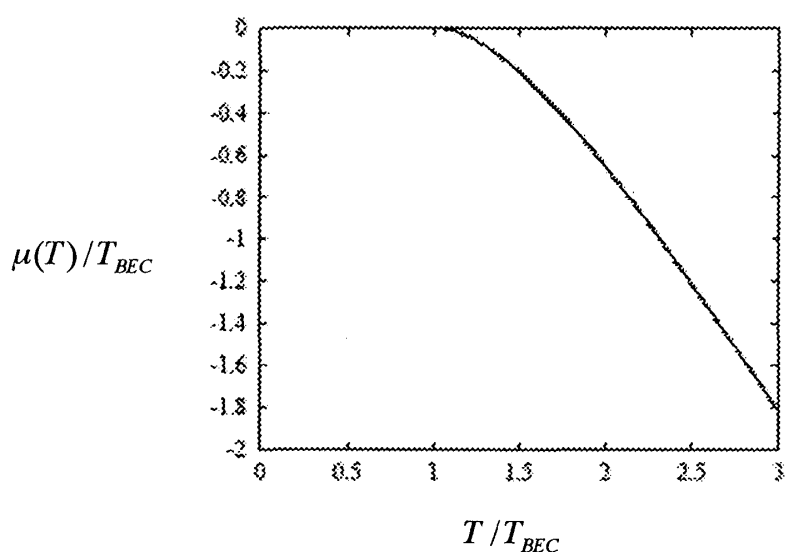


図2.4：理想ボーズガスにおける化学ポテンシャルの温度変化

同様に、今度はボーズガスのBEC転移温度で評価すると数因子は除いて

$$\lambda \sim 1/n^{1/3} \sim 1/d. \quad (2.22)$$

やはり、この温度程度になるとは粒子の波動性が重要になってきていることが分かります。

このように、統計性の違いによって T_F , T_{BEC} で起こる現象は異なりますが、共に粒子の量子力学的効果が顕著になる温度である、という共通の物理が潜んでいることが分かるでしょう。

十分高温領域では図2.4のようにボーズガスの化学ポテンシャルは負で大きくなり、ボーズ分布関数はフェルミ分布関数同様、ボルツマン分布に近づきます。

$$n_B(\varepsilon - \mu) \sim f(\varepsilon - \mu) \approx e^{-\beta|\mu|} e^{-\beta\varepsilon}. \quad (2.23)$$

3. フェルミ粒子の対形成（分子化）とフェルミ面効果

前章で見たように、自由ボーズガスはそれ自体でBEC状態になるのに対し、自由フェルミガスはフェルミ温度という特徴的な温度はあるものの、相転移は示しませんでした。これは、パウリの原理により、最低エネルギー状態を巨視的な数の粒子が占有できないことによるものです。しかし、よくよく考えてみると、ボーズ原子も陽子、中性子、電子というフェルミ粒子からなっており、それらがある意味、「分子化」してボーズ粒子になってBEC状態になるわけですから、フェルミ粒子系であっても分子化してボソンになりさえすれば同様の相転移が期待できそうに思えます。この場合、各フェルミ原子自体は最低エネルギー状態（運動量0）を巨視的な数だけ占有することはできませんが、分子の重心運動量 K は $K=0$ の状態を（パウリの原理に抵触することなく）たくさんの分子が占有することができ、BECへの困難は回避できます。

このシナリオは実際に金属超伝導や液体ヘリウム3の超流動、更にはフェルミ原子ガス超流動で起こっており、クーパ対が正にこの分子ボソンに相当しています。

フェルミ粒子の対形成を見るために、引力相互作用する2つのフェルミ原子（原子スピン状態は異なる（ $\uparrow\downarrow$ ）とします）を考えます。シュレーディンガー方程式は、

$$-\frac{1}{2m}[\nabla_1^2 + \nabla_2^2]\Psi + V(r_1 - r_2)\Psi = E\Psi. \quad (3.1)$$

波動関数の空間成分は、簡単のため重心運動量0の状態を考えて次のようにおきます：

$$\Psi(r_1, r_2) = \sum_k g(k) e^{ik(r_1 - r_2)}. \quad (3.2)$$

全体の波動関数はこれにスピン成分をかけたものですが、今の場合、スピン波動関数は2つのスピンを合成したシングレットかトリプレットに分類できます。前者はスピンの交換に対し反対称、後者は対称です。フェルミ粒子の波動関数は全体として2粒子の入れ替えに対し反対称でなくてはならないので、

スピンシングレット（ $\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow$ ）の場合： Ψ は対称 $\Rightarrow g(-k) = g(k)$

スピントリプレット（ $\uparrow\uparrow, \downarrow\downarrow, \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow$ ）の場合： Ψ は反対称 $\Rightarrow g(-k) = -g(k)$

波動関数を方程式に代入すると g の方程式が得られます：

$$\frac{k^2}{m}g(k) + \sum_{k'} V_{kk'}g(k') = Eg(k). \quad (3.3)$$

$$V_{kk'} = \int d^3r V(r) e^{ik \cdot r}. \quad (3.4)$$

特に、相互作用として接触型の引力（ $V(r) = -V\delta(r)$ ）を用いると $V_{kk'} = -V$ となるので

$$\left(\frac{k^2}{m} - E\right)g(k) = V \sum_k g(k'). \quad (3.5)$$

2つの原子スピンのトリプレット状態の場合、 g の反対称性から右辺は0になります。結果、エネルギー固有値は単なる2つの自由粒子の運動エネルギーの和

$$E = \frac{k^2}{m} = 2\varepsilon_k, \quad (3.6)$$

になりますが、これは、トリプレット状態の場合、空間成分が反対称であるために2つの粒子は空間上の同一地点にくることができず、上で考えたような接触型の相互作用が機能しないことに因ります。シングレットの場合、 g は k に対し対称のため右辺は0とはならず、この場合はエネルギーの方程式として

$$1 = V \sum_k \frac{1}{2\varepsilon_k - E} = V \int d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{1}{2\varepsilon_k - E}, \quad (3.7)$$

が得られます。引力によって2つの粒子が分子化すれば、この方程式から $E < 0$ の束縛状態が得られるはずですが、実は右辺の積分は収束しません（紫外発散）。これは、デルタ関数型の相互作用を用いたことによるもので、とりあえずカットオフ（ ω_c ）を導入してこれを防ぐと（この問題は後で議論します）、 $E < 0$ の方程式として

$$\frac{1}{V\rho(\omega_c)} = \left[1 - \sqrt{\frac{|E|}{2\omega_c}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2\omega_c}{|E|}} \right] \quad (3.8)$$

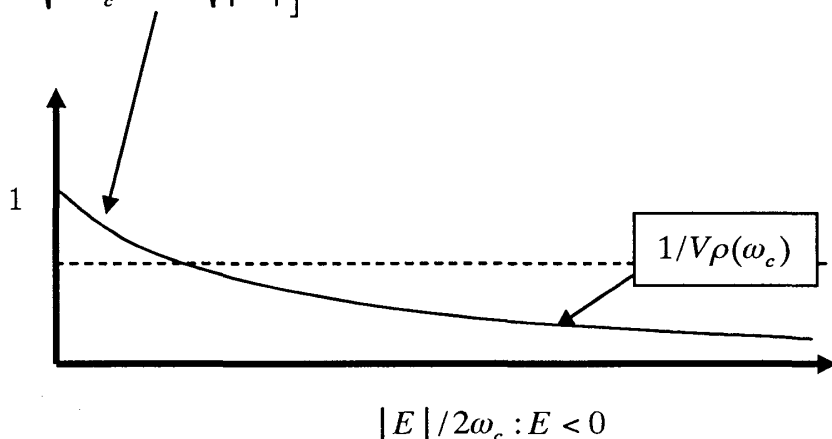


図3. 1 : 束縛状態の解

この結果から、 $V\rho(\omega_c) > 1$ であれば束縛状態、つまり、2つのフェルミ原子が分子化した状態が存在することが分かります。

上の議論で出てきたカットオフの実態は为什么呢？ 何とか理屈をつけようとすれば、これは、「核反応がおきて原子が分解してしまったりイオン化してしまう

ような非常に高いエネルギー領域では、原子自体が存在できないはずなので、原子の核分裂のエネルギー程度のカットオフ」と言えなくもありませんが、今考えている低エネルギー（ μK 程度）の物理において、そのような非常に大きなエネルギースケールを持ち込むのは便利とは言えません。そこで、この「よく分からない」量を持ち込むことなく、観測可能な物理量のみを用いてこの問題を記述する方法を考えます。

この処方箋は繰り込み理論と呼ばれるもので、そのアイデアは、観測可能量である（低エネルギー極限の）原子の2体散乱長 a_s にカットオフを吸収させ、見かけ上カットオフの効果を消去してしまう、というものです。2体の散乱長は下図で与えられる散乱行列（ t -行列） Γ の長波長、低エネルギー極限と次のように関係しています。

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \Gamma(0,0). \quad (3.9)$$

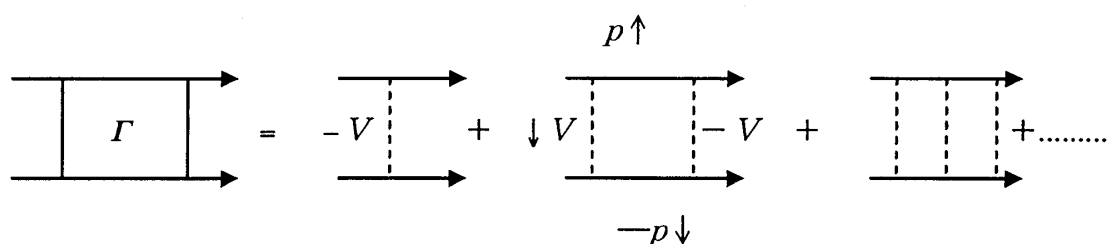


図3. 2 : t -行列 Γ のダイアグラム表現

具体的に計算すると、通常の散乱理論にしたがって

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \Gamma(0,0) = -V + (-V) \sum_p \frac{\omega_\varepsilon}{0 - 2\varepsilon} (-V) + \dots = -\frac{V}{1 - V \sum_p \frac{\omega_\varepsilon}{2\varepsilon}}. \quad (3.10)$$

この式にもカットオフが現れていますが、散乱長をこの式で決定しようとは思わずに、散乱長は「実験的に」決める、と「決心 (!)」します。すると、上の式は逆にカットオフを観測量である散乱長から決めることができ、これを最初のエネルギー固有値のカットオフに代入すれば、これを消去することが可能になります。ただ、上の式からカットオフを計算するのは面倒なので、同じ方法ですが、ちょっとしたトリックを行います。まず、エネルギー固有値の方程式を次のように変形します：

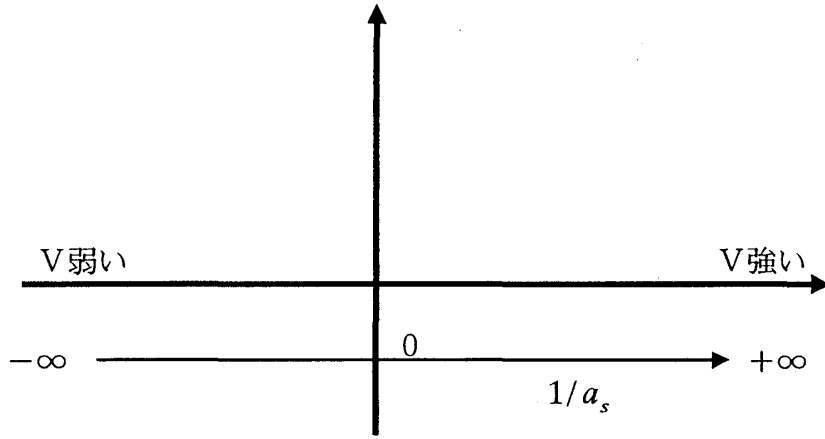


図3.3：引力相互作用 V と2体散乱長の関係

$$1 = V \sum_p^{\omega_\epsilon} \left[\frac{1}{2\epsilon - E} - \frac{1}{2\epsilon} \right] + V \sum_p^{\omega_\epsilon} \left[\frac{1}{2\epsilon} \right], \quad (3.11)$$

$$1 = \frac{V}{1 - V \sum_p^{\omega_\epsilon} \left[\frac{1}{2\epsilon} \right]} \sum_p^{\omega_\epsilon} \left[\frac{1}{2\epsilon - E} - \frac{1}{2\epsilon} \right] = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_p^{\omega_\epsilon} \left[\frac{1}{2\epsilon - E} - \frac{1}{2\epsilon} \right]. \quad (3.12)$$

右辺最終項にはまだカットオフが残っていますが、この和は収束するのでカットオフを ∞ として構いません。前の式でカットオフに依存していた部分は「実験で決める」とした散乱長に完全に吸収されてしまいました。かくして、束縛状態のエネルギーは

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) \left[\frac{1}{2\epsilon - E} - \frac{1}{2\epsilon} \right]. \quad (3.13)$$

これを解くと、 $a_s > 0$ の場合に束縛状態が得られ、そのエネルギーは

$$E = -\frac{1}{ma_s^2}. \quad (3.14)$$

束縛状態の波動関数は

$$g(k) = \frac{C}{2\epsilon_k - E}, \quad (3.15)$$

であることに注意すると、 $R = r_1 - r_2$ において次のように求まります：

$$\Psi(R = r_1 - r_2) \propto \sum_k \frac{1}{2\epsilon_k - E} e^{ik \cdot R} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi a_s}} \frac{e^{-R/a_s}}{R}. \quad (3.16)$$

つまり、分子の大きさは散乱長 a_s 程度です。こうして、 $a_s > 0$ の場合に、結合エネルギーが E 、広がり散乱長程度の分子が形成されることが分かりました。

散乱長を導入すると実態が良く分からないカットオフの存在を気にしなくて良くなる分、相互作用が最初に導入した V で記述されていないため、物理量の相互作用依存性を考える際にちょっと不便です。相互作用を散乱長で表す場合、散乱長の逆数で表記することが多く、その場合の V との対応関係は

$$\frac{m}{4\pi a_s} = -\frac{1}{V} + \rho(\omega_c), \quad (3.17)$$

となり、図示すると図 3. 3 のようになります。2 体散乱長が正であっても実際の相互作用 V は引力であることに注意して下さい。

以上は真空中の 2 つのフェルミ原子の場合でしたが、実際のフェルミ原子ガスは多くの粒子からなり、フェルミ面が形成されています。そこで、今度はこのフェルミ面の影響を調べるために、フェルミ面の外側に 2 つのフェルミ原子をつける場合を考えます。簡単のため、引力相互作用はこの 2 つのフェルミ原子間にのみ働いているとしましょう。多粒子系のうち、特定の 2 粒子のみに相互作用が働く、というのは非現実的ですが、この問題は Cooper 問題と呼ばれ、BCS 理論誕生に大きな影響を与えた、という経緯があります。

ここでも 2 原子の重心運動量は 0 として、先と同じ波動関数を用います。ただし、今の場合、フェルミ準位までは粒子が詰まっているので

$$g(k < k_F) = 0, \quad (3.18)$$

という条件が課されます。固有エネルギーをフェルミエネルギーとそこからのずれに分けて $E + 2\varepsilon_F$ とかくと、シュレーディンガー方程式は

$$-\frac{1}{2m}[\nabla_1^2 + \nabla_2^2]\Psi + V(r_1 - r_2)\Psi = (E + 2\varepsilon_F)\Psi. \quad (3.19)$$

g の方程式は先の 2 粒子の場合で $E \Rightarrow E + 2\varepsilon_F$ としたものになり、

$$\left(\frac{k^2}{m} - E\right)g(k) = V \sum_{k > k_F} g(k'). \quad (3.20)$$

固有値の方程式は

$$1 = V \sum_{k > k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k - 2\varepsilon_F - E} = V \int_{\varepsilon > \varepsilon_F} d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{1}{2\varepsilon_k - 2\varepsilon_F - E}. \quad (3.21)$$

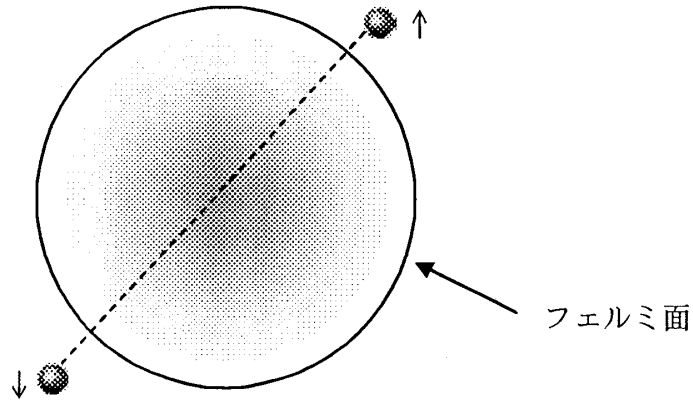


図3. 4 : クーパー問題。 フェルミ面外側に相互作用する2粒子を付け加える。

和の制限はフェルミ面が存在することに起因する (g に課された制限) ことに注意してください。 この積分はやはり紫外発散するので、先ほどのように散乱長で処理することにします。 ただし、今の場合、フェルミ面以下の状態は実質使えない (既に詰まっている) ので、フェルミ面まで繰り込んだ2体の散乱長 $a_s(\varepsilon_F)$ を導入します：

$$\frac{4\pi a_s(\varepsilon_F)}{m} = - \frac{V}{1 - V \sum_{p > k_F}^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (3.22)$$

先ほどの散乱長との関係は容易に得られて、

$$\frac{4\pi a_s(\varepsilon_F)}{m} = - \frac{V}{1 - V \sum_{p>0}^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon} + V \sum_{p>0}^{\varepsilon_F} \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{- \frac{V}{1 - V \sum_{p>0}^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}}{1 + \frac{V}{1 - V \sum_{p>0}^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}} \sum_{p>0}^{\varepsilon_F} \frac{1}{2\varepsilon}} = \frac{\frac{4\pi a_s}{m}}{1 - \frac{4\pi a_s}{m} \sum_{p>0}^{\varepsilon_F} \frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (3.23)$$

最後の式の名分母の和は上限がフェルミエネルギーなので、先ほどの不明なカットオフを含む和とは異なり、原理的には既知の量です。 これを用いて、カットオフに依存しない固有値方程式を作ると

$$1 = - \frac{4\pi a_s(\varepsilon_F)}{m} \int_{\varepsilon_F}^{\infty} d\varepsilon \rho(\varepsilon) \left[\frac{1}{2\varepsilon - 2\varepsilon_F - E} - \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad (3.24)$$

$$1 = -\frac{4\pi a_s(\varepsilon_F)}{m} \rho(\varepsilon_F) \frac{\sqrt{\varepsilon_F + E/2}}{2\sqrt{\varepsilon_F}} \log \frac{\sqrt{\varepsilon_F} - \sqrt{\varepsilon_F + E/2}}{\sqrt{\varepsilon_F} + \sqrt{\varepsilon_F + E/2}}. \quad (3.25)$$

束縛状態のエネルギー ($E < 0$) が小さい (弱結合) の場合は $|E| \ll \varepsilon_F$ の条件より

$$E = -8\varepsilon_F e^{\frac{\pi}{k_F a_s(\varepsilon_F)}}. \quad (3.26)$$

束縛状態のエネルギーの大きさがフェルミエネルギーよりも十分大きい強結合の場合は

$$E = -\frac{1}{ma_s(\varepsilon_F)^2}, \quad (3.27)$$

となります。強結合は引力相互作用が強い場合に得られるはずですから、散乱長の表記では $a_s \rightarrow 0$ に対応します。この場合、先の式から

$$\frac{4\pi a_s(\varepsilon_F)}{m} = \frac{\frac{4\pi a_s}{m}}{1 + \frac{4\pi a_s}{m} \sum_{p>0} \frac{1}{2\varepsilon}} \approx \frac{4\pi a_s}{m}, \quad (3.28)$$

となるので、強結合での分子の結合エネルギーは2原子で考えたものと一致します。

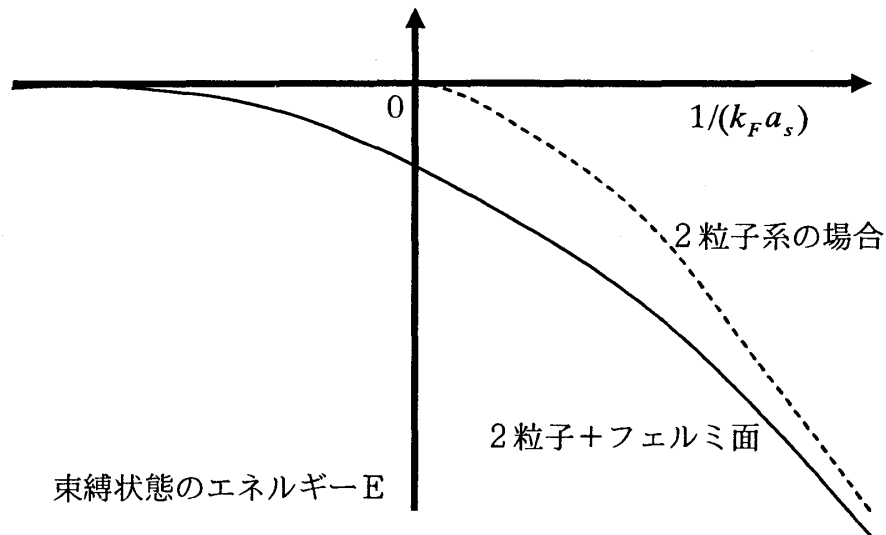


図3.5： 束縛状態のエネルギー

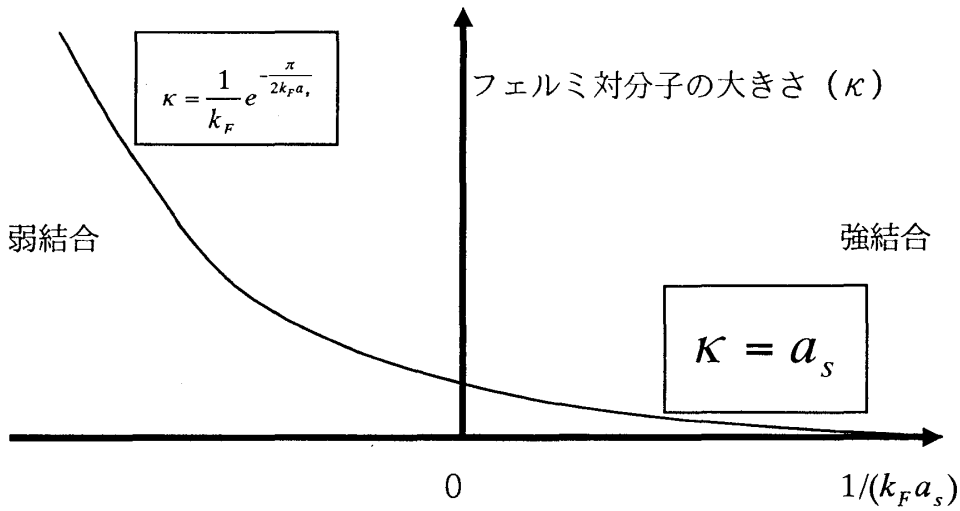


図 3. 6 : 形成されたフェルミ対分子の大きさ

分子の大きさは上で求まった E を g に代入、束縛状態の波動関数を計算して

$$\Psi(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \frac{e^{-R/\kappa}}{R}. \quad (3.29)$$

ここで弱結合では ($1/k_F a_s < 0$)

$$\kappa = \frac{1}{k_F} e^{-\frac{\pi}{2k_F a_s}}. \quad (3.30)$$

強結合では ($1/k_F a_s > 0$)

$$\kappa = a_s. \quad (3.31)$$

平均原子間距離が $1/k_F$ であることに注意すると、弱結合領域 ($a_s \rightarrow -0$) では分子は非常に大きく、他方強結合極限 ($a_s \rightarrow +0$) では非常に小さくなります。

フェルミ面がある場合の著しい特徴は、引力相互作用の大きさにかかわらず束縛状態が存在する、という点です。これは Cooper instability と呼ばれ、フェルミ面が無限小の引力に対し不安定であることを示しています。また、この結果生じる分子はクーパー対と呼ばれます。 $1/(k_F a_s) < 0$ の領域での分子 (クーパー対) 形成にはこのフェルミ面の不安定性が本質的に重要で、2 体レベルでは分子形成はできません。これに対し、相互作用が強い場合は、フェルミ面がある場合でも、束縛状態は「2 粒子 + 真空」の場合と実質同じ束縛エネルギーを持ち、フェルミ面の効果は重要ではありません。

この講義のテーマは「フェルミ原子ガス超流動におけるBCS-BECクロスオーバー」ですが、その物理的なイメージはここまでの理解でも十分描くことができます。ここまでの話で分かったことは

- (1) 各ボーズ粒子の持つ量子力学的波動関数の広がり（前章ではこれは熱的ドブロイ波長程度）が互いに重なり合うようになるとBECが起こる。
- (2) フェルミ面があると、引力相互作用があれば分子化（クーパー対形成）が起こる。

有限温度を考えた場合、温度 T が分子の結合エネルギー E 程度になると、分子は熱的に解離してしまうと考えられます。したがって、上で求めた結合エネルギーはそのまま「分子形成温度 (T^*)」を与えます。弱結合領域の場合、温度を下げていき、 $T \sim |E|$ 程度になり（クーパー対）分子が形成が起こるようになると、この分子の大きさ（波動関数の広がり： κ ）は平均原子間距離（ $d \sim 1/n^{1/3} \sim 1/k_F$ ）に比べ非常に大きいため、上の（1）の議論から形成と同時に直ちにボーズ凝縮してしてしまうでしょう。まさにこれが弱結合BCS理論における超流動転移に相当し、

$$T_c \sim \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{k_F a_s(\varepsilon_F)}}. \quad (3.32)$$

また、クーパー対は T_c で形成と同時に凝縮します。

この描像は分子の広がり κ が原子間距離程度まで正しく、その領域は κ の式から

$$1/(k_F a_s) \sim 1, \quad (3.33)$$

までとなります。これよりも強結合領域に入ると分子形成が起こっても分子の広がりが分子間隔程度になるまで温度を下げなくては凝縮は起こりません。つまり、強結合領域では分子生成温度（ $T^* \sim |E|$ ）とBECの相転移温度（ T_{BEC} ）は一致しなくなり、前者の方が高くなります。相転移温度は $n/2$ 個の分子（ n はフェルミ原子数）に対し、

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m T_c}} \sim \frac{1}{(n/2)^{1/3}}. \quad (3.34)$$

これより強結合領域の T_c は

$$T_c \sim \varepsilon_F, \quad (3.35)$$

となります。これがフェルミ原子ガス超流動の分子BEC領域の超流動転移温度です。

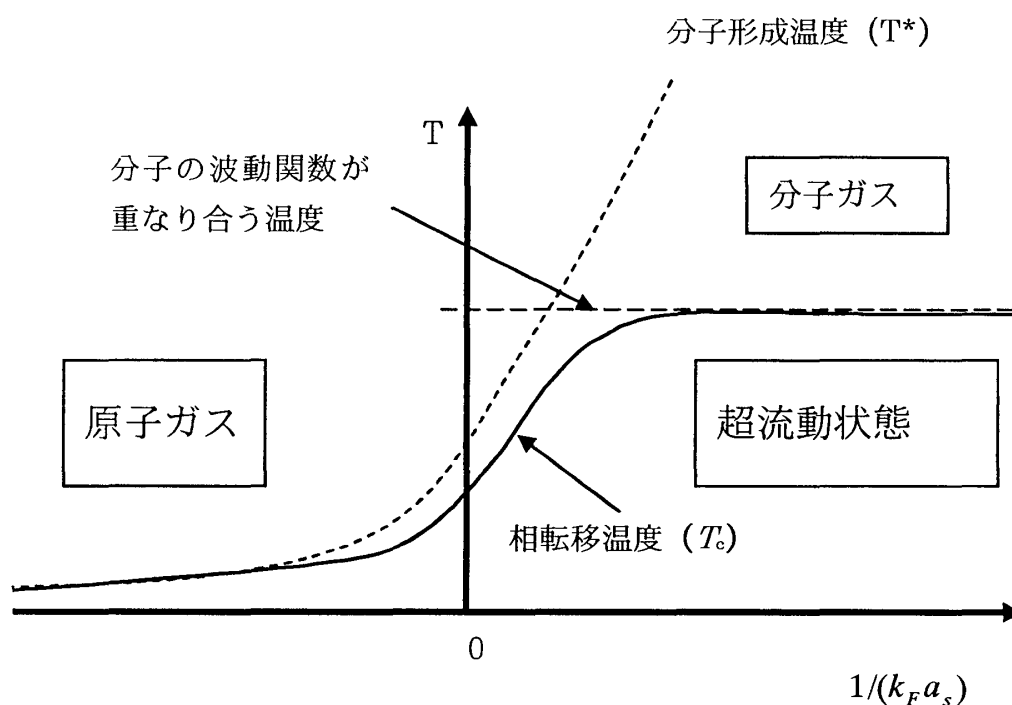


図 3. 7 : BCS-BEC クロスオーバーの相図

上のイメージ図のうち、BEC 領域については、よくよく考えてみると、実は通常のボーズ「原子」ガス BEC とある意味同じ状況であることに注意しましょう： 非常に高温では、原子は陽子、中性子、電子という 3 種類のフェルミ粒子に分解しており、ある種のフェルミガス状態です。これがだんだん冷えてきてくっついたものがボーズ原子、と考えると、これは今考えてきた分子に相当しています。くっついてボーズ粒子になった温度(=原子核、イオンの結合エネルギー)は非常に高いので、まだ分子の波動関数の広がり(=分子間距離)ほどではなく、凝縮はしません。そしてより温度を下げて重なりが無視できなくなったところで BEC がおこるわけです。

4. 原子間引力相互作用とフェッシュバツハ共鳴

フェルミ原子がクーパー対を形成するには引力相互作用は不可欠です。もし、これが原子間の直接相互作用であれば話は簡単ですが、現在実現しているフェルミ粒子系超流動は、いずれも何らかのボソンの手助けによって生じた相互作用によって対形成が起こっています：

金属超伝導：フォノン（格子振動）、反強磁性的スピン揺らぎ等（A 型）

液体ヘリウム3：強磁性的スピン揺らぎ（A 型）

原子ガス超流動：フェッシュバツハ共鳴（B 型）

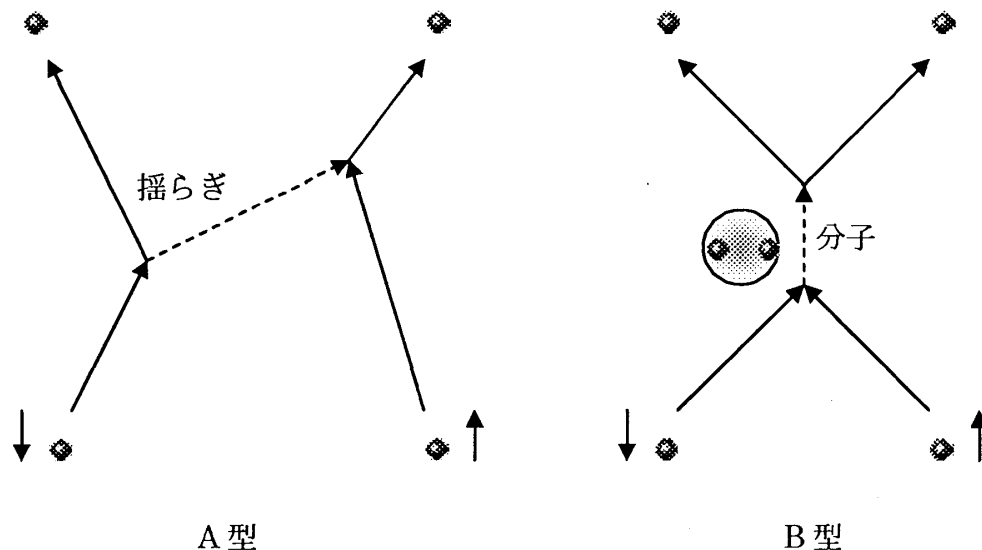


図4. 1： ボソンによって媒介（伝達）されるフェルミ粒子間相互作用

このうち A 型はフォノン等の揺らぎ（ボソン）によって媒介された相互作用で、原子ガス超流動の発見以前のフェルミ粒子系超流動はいずれもこの機構に因っています。B 型はフェルミ原子ガス超流動に特有の機構で、フェッシュバツハ共鳴によって2つの原子が分子(ボソン)を形成、再び解離することを通じて2原子間に引力相互作用が発生するものです。

A 型の典型例としてフォノンを考えます。電子と格子との衝突で格子がエネルギー ω_D の励起状態（光学フォノンを考えるとこれはデバイ周波数程度）になったとして、 t -行列を2次摂動の範囲で求めると

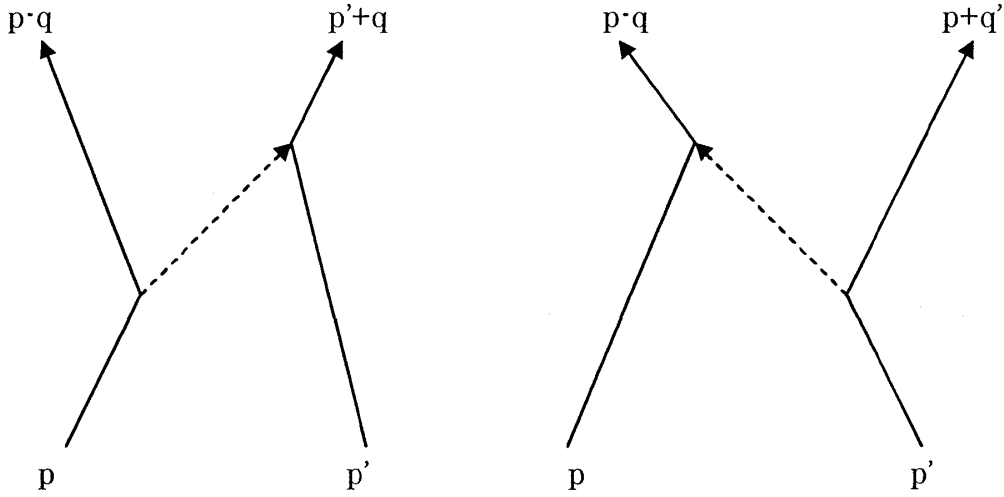


図4. 2：フォノンで媒介される相互作用。 実線は電子、鎖線はフォノン。

$$\begin{aligned}\Gamma(p, p' \rightarrow p-q, p'+q) &= J^2 \frac{1}{(\varepsilon_p + \varepsilon_{p'}) - (\varepsilon_{p-q} + \varepsilon_{p'} + \omega_D)} + J^2 \frac{1}{(\varepsilon_p + \varepsilon_{p'}) - (\varepsilon_p + \varepsilon_{p'+q} + \omega_D)} \\ &= J^2 \frac{1}{(\varepsilon_p - \varepsilon_{p-q}) - \omega_D} + J^2 \frac{1}{(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{p'+q}) - \omega_D}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

ここで、 J は電子—格子相互作用の結合定数です。 特に低エネルギー粒子：

$$|\varepsilon_p - \varepsilon_{p-q}| \ll \omega_D, \quad |\varepsilon_{p'} - \varepsilon_{p'+q}| \ll \omega_D, \quad (4.2)$$

の場合は、この散乱過程から引力の有効相互作用が得られます。

$$V_{\text{eff}} = -2 \frac{J^2}{\omega_D} < 0. \quad (4.3)$$

次にフェッシュバッハ共鳴による有効相互作用（B型）を考えます。 フェッシュバッハ共鳴とは、2原子の散乱の際、共鳴束縛状態としての分子が形成される現象です（始、終状態を open channel、分子状態を closed channel と呼ぶことがあります）。原子間の相互作用ポテンシャルは、電子間相互作用による近距離の斥力、ファンデルワールス力による遠距離での引力（及び、2つの原子の外殻電子が互いにシングレットである場合は共有結合効果による引力が加わります）の結果、図のようなレナードジョーンズポテンシャルの形となり、共鳴束縛状態がこのポテンシャルのくぼみ部分に形成されます。これに加え、フェッシュバッハ共鳴では、電子スピンと核スピン間の超微細構造相互作用

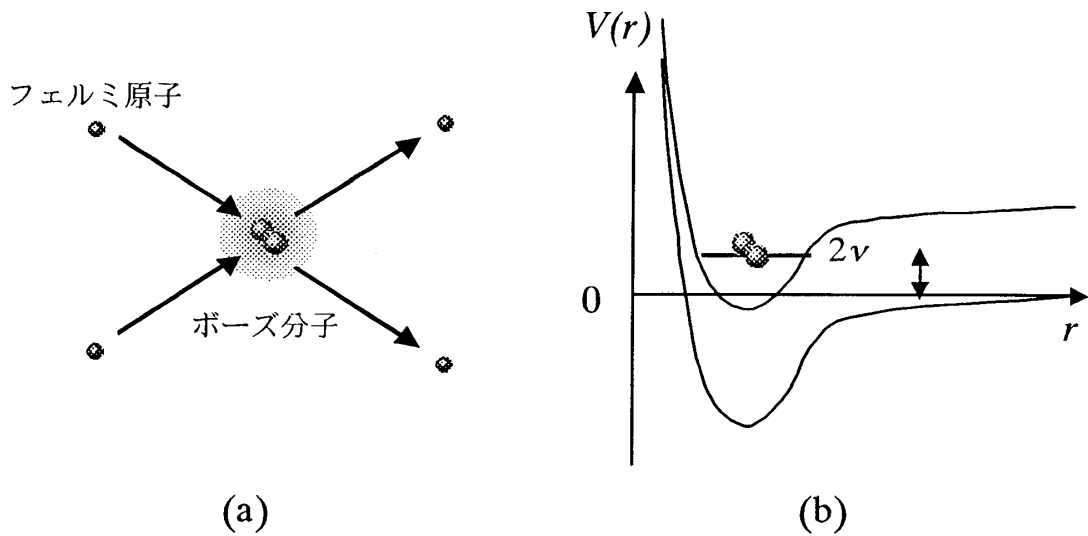


図4.3 : (a) フェッシュバッハ共鳴によって生じる引力相互作用
(b) 共鳴束縛状態形成の模式図

$$H_{\text{HF}} = JS\mathbf{A}I, \quad (4.4)$$

外部磁場によるゼーマン効果、及び電子と核とのボーア磁子大きさの違いが重要な役割を果たします。超微細構造相互作用には電子スピンと核スピンの大きさを片方を+1、もう片方を-1だけ変化させる効果があり ($S \pm I + S \pm I$)、これにより中間状態の原子状態には散乱の始状態とは異なる原子スピン状態が含まれるようになります。

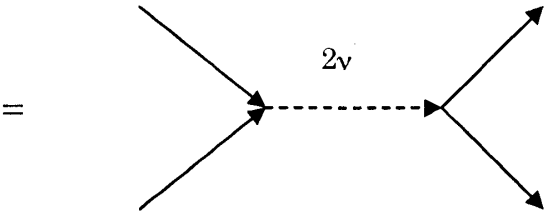
例えば、 ^4K の超流動の場合、

$$\text{open channel: } |F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle + |9/2, -7/2\rangle$$

$$\text{closed channel } |F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle + |7/2, -7/2\rangle$$

すると電子のボーア磁子は核のそれに比べはるかに大きいため、外部磁場によって始状態と中間状態とではゼーマンエネルギーによるエネルギー差が生じ、中間状態での相互作用ポテンシャルの「くぼみ」にできた共鳴準位のエネルギー 2ν が磁場に依存することになり

ます。以上の点をおさえたうえで、2つの原子が中間状態としてエネルギー 2ν の共鳴束縛状態を形成、再び解離して2原子状態にもどる過程を2次摂動で評価してみます。すると、低エネルギーで考えると、

$$V_{eff} = -g^2 \frac{1}{2\nu}$$

(4.5)

ここで g はフェッシュバッハ共鳴の結合定数（原子から分子状態への遷移振幅）です。特に、共鳴準位（ $=2\nu$ ）と解離した原子状態でのエネルギー（ $=0$ ）が一致するフェッシュバッハ共鳴磁場 B_0 近傍では $2\nu = \alpha(B - B_0)$ と書けることから、

$$V_{eff} = -\frac{g^2}{\alpha(B - B_0)}.$$
(4.6)

よって強い相互作用が共鳴磁場近傍で得られると共に、共鳴磁場を境に相互作用が引力から斥力に反転します。実際には、準位の線幅などにより、共鳴磁場（ $B=B_0$ ）で無限大の相互作用が得られることはありませんが、例えば、 ^{40}K では、 $|F, F_z\rangle = |9/2, -9/2\rangle$ と $|9/2, -5/2\rangle$ において、フェッシュバッハ共鳴磁場近傍で $k_F a_s \approx 11 \gg 1$ が得られています。フェルミ原子ガスでは平均原子間隔は

$$d \sim \frac{1}{k_F},$$
(4.7)

なので、 $k_F a_s \sim 1$ が強相関領域、弱相関領域を分ける目安です。したがって、この結果はフェッシュバッハ共鳴近傍で非常に相関の強い粒子系が実現していることになります。また、磁場によって相互作用が制御できることで、前章で見た、BCS-BEC クロスオーバーを観測することが可能になるのです。

一般には、フェッシュバッハ共鳴以外にも弱い原子間散乱が存在し、それを加えると（そうした残留相互作用が引力だとして）

$$V_{eff} = -U - g^2 \frac{1}{2\nu}.$$
(4.8)

この場合、2つの項が相殺するように磁場を調整すると、相互作用がない自由フェルミガ

スを実現することが可能です。

フェッシュバツハ共鳴による可変な相互作用が求まったところで、もう一度繰り込みについて触れておきます。この相互作用に対する低エネルギー領域における散乱長は

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \frac{V_{eff}}{1 + V_{eff} \sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}} = - \frac{U + \frac{g^2}{2\nu}}{1 - (U + \frac{g^2}{2\nu}) \sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (4.9)$$

ここで共鳴磁場を考えると、 $2\nu = 0$ において

$$\frac{4\pi a_s}{m} = \frac{1}{\sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}} (?). \quad (4.10)$$

先ほどは発散していたのに今度は有限になってしまいました。実はこの問題ははじめの相互作用中のパラメータ (U , g , ν) を直接観測量 (磁場) と結びつけてしまったことに因るもので、本当はこれらも「繰り込まれた」量であるとしなくてはなりません。今の場合、散乱長の式の右辺をちょっと変形すると、

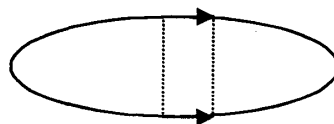
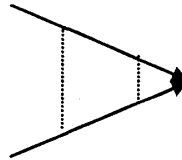
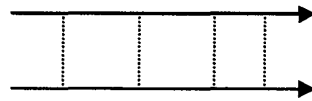
$$\frac{4\pi a_s}{m} = \tilde{U} + \frac{\tilde{g}^2}{2\tilde{\nu}}. \quad (4.11)$$

これは元々の相互作用と同じ形をしています、各パラメータは次式で与えられる「繰り込まれた量」で置き換わっています：

$$\tilde{U} = \frac{U}{1 - U \sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}, \quad (4.12)$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{1 - U \sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (4.13)$$

$$2\tilde{\nu} = 2\nu - g^2 \frac{\sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}{1 - U \sum_p^{\omega_c} \frac{1}{2\varepsilon}}. \quad (4.14)$$



共鳴磁場はこの繰り込まれた共鳴準位が0になるところで与えられ、その場合、散乱長は確かに共鳴磁場で発散、符号が反転します。

5. 第二量子化

前章では、フェルミ原子のクーパ対形成を“フェルミ面+2原子”、として扱いましたが、実際は全ての原子間に相互作用がはたらいています。相互作用する沢山の原子を取り扱い、またフェルミ粒子系超流動に必須である BCS 理論を理解するには、第二量子化について知っておく必要があります。これにより、理論的扱いが容易になるだけでなく、「多粒子系=沢山の波動関数の集まり」、といった分かりにくい描象から、「量子力学的粒子=量子の運動」、という直観的理解が可能になります。

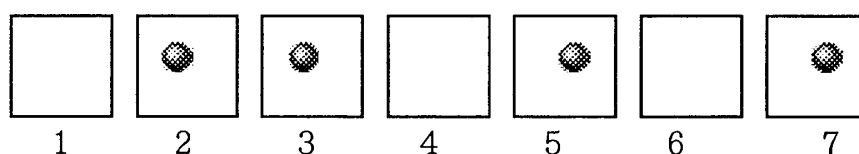
○ステップ1 生成消滅演算子：波から粒（量）子へ

フェルミ原子ガスについて、1粒子の完全規格化直交系 $\{\phi_n(x)\}$ を考えます。状態 1,2,3 に原子がある場合、波動関数はフェルミ統計を考慮して

$$\Psi = \sum_P (-1)^P \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_1(x_2) & \phi_1(x_3) \\ \phi_2(x_1) & \phi_2(x_2) & \phi_2(x_3) \\ \phi_3(x_1) & \phi_3(x_2) & \phi_3(x_3) \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

「座標 x 」は空間、スピン座標をまとめたものです。 P は粒子に関する置換を表し、奇置換である時は $(-1)^P = -1$ (偶では 1) とします。最後の式は Slater 行列式と呼ばれます。この波動関数は、2粒子の交換に対しマイナスが生じ反対称性を満たしますが、具体的に書くと、座標を置換した項が 6 個現われ、物理量の期待値計算などを考えるとちょっと複雑な感じ（計算が面倒そう！）がします。

そこで、見方を変えます： あらかじめ、状態 1, 2, 3.....の「箱」を用意し、どの箱に粒子が入っているかないかで状態を表しましょう（勿論 1つの箱には 1個までしか入れることはできません。）。



$$\Psi = |n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, \dots\rangle = |0110101\dots\rangle. \quad (5.2)$$

この表記法はデジタル的でどの状態に電子がいるか即座に分かりますが、例えば 5 4 7 番目の状態に原子があると

$$\Psi = |000000\dots(546) = 0,1,0000000\dots\rangle, \quad (5.3)$$

となりちょっと不便です。そこでもう一工夫して、生成消滅演算子を導入します： 系

に状態 j の粒子を 1 個つける生成演算子 $c_j^\dagger$ を考えます。この演算子は c_j という消滅演算子（こう呼ぶ理由は後に説明します。）のエルミート共役です。これを用いて、

$$\Psi = |1110000\rangle = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger |0\rangle. \quad (5.4)$$

$|0\rangle$ は原子が 1 個もない真空状態を表します。真空状態はそれ自体規格化 ($\langle 0|0\rangle = 1$) されているとします。“粒子の入れ替えに対する反対称性”を演算子の入れ替え操作で表現すると、次の「反交換関係」が満たされれば良いことが分かるでしょう：

$$[c_j^\dagger, c_i^\dagger]_+ = c_j^\dagger c_i^\dagger + c_i^\dagger c_j^\dagger = 0. \quad (5.5)$$

複数のフェルミ粒子が同一状態を占めることができない、という性質もこの反交換関係で $i=j$ とおいたものが成立すれば自動的に満たされます ($c^\dagger c^\dagger = 0$)。

ある 1 粒子状態 $|1\rangle$ を考えます。この状態の規格化条件から

$$1 = \langle 1|1\rangle = \langle 0|c_1 c_1^\dagger |0\rangle. \quad (5.6)$$

($\langle 1| = \langle 1|^+ = \langle 0|c_1$)。ここで $|A\rangle = c_1 c_1^\dagger |0\rangle$ という状態を考えると、真空との内積が 1 であることから $|A\rangle = |0\rangle$ が得られます。 $c_1^\dagger$ が粒子を 1 つ付け加える演算子ですから、 c_1 は $c_1^\dagger$ で作った粒子を消滅させる演算子である、と理解できます。消滅演算子は生成演算子のエルミート共役なので、やはり反交換関係を満たします：

$$[c_j, c_i]_+ = c_j c_i + c_i c_j = 0. \quad (5.7)$$

消滅演算子を真空に作用させると、何もない状態からさらに粒子を消すので 0 になります：

$$c_j |0\rangle = 0. \quad (5.8)$$

実際は、「全ての消滅演算子に対し $c|0\rangle = 0$ となる状態」として真空を定義しますが、今の場合は上の導入の仕方で十分です。真空でなくとも、状態 j に粒子がない状態に対しては $c_j |\Psi(j = \text{empty})\rangle = 0$ です。

次に、ある多粒子状態に $c_i^\dagger c_i + c_i c_i^\dagger$ 作用させたとします。この場合、次の 2 つの場合が考えられます：

(1) 多粒子状態は i 状態を含まない：この時、作用させる 2 つの演算子のうち 2 項目は 0 を与えます。1 項目は i 状態を生成し、直後に消滅させるので、もとの状態に

戻ります。

(2) 多粒子状態は i 状態を含む: 今度は 2 項目のみ寄与があります。この時、

$$c_i^\dagger c_i |\Psi\rangle = (c_i^\dagger c_i) c_1^\dagger \dots c_i^\dagger \dots |0\rangle = (-1)^P (c_i^\dagger c_i) c_i^\dagger c_1^\dagger \dots (i=x) \dots |0\rangle = (-1)^P c_i^\dagger c_1^\dagger \dots (i=x) \dots |0\rangle. \quad (5.9)$$

よって、 $c_i^\dagger$ を元の位置に戻すことで最初の波動関数に戻ります。

結局 (1)、(2) の場合ともに、この演算子は状態に 1 を作用させたものと等価となりました。よって、この演算子は次のように考えて良いことがわかります：

$$[c_i, c_i^\dagger]_+ = c_i c_i^\dagger + c_i^\dagger c_i = 1. \quad (5.10)$$

同様に、 $c_i^\dagger c_j + c_j c_i^\dagger$ に (i, j は異なる) 対しては、

$$[c_i, c_j^\dagger]_+ = c_i c_j^\dagger + c_j^\dagger c_i = 0. \quad (5.11)$$

以上がフェルミ粒子に対する生成消滅演算子の基本的な性質です。まとめると、生成消滅演算子は次の反交換関係を満たします。

$$[c_j^\dagger, c_i^\dagger]_+ = [c_j, c_i]_+ = 0. \quad (5.12)$$

$$[c_i, c_j^\dagger]_+ = \delta_{ij}. \quad (5.13)$$

波動関数は

$$\Psi = c_1^\dagger c_2^\dagger c_3^\dagger \dots c_n^\dagger |0\rangle. \quad (5.14)$$

この表記方法を用いると、量子力学を「i 状態の原子が何個」、という粒子（正確には「量子」）描象で捉えることができます。また、フェルミ統計による波動関数の反対称性が演算子の反交換関係に吸収されているため、Slater 行列式で書くよりスマートです。加えて、生成演算子を真空中に作用させていくことで任意の粒子系を容易に作れる点も特長です。

ボーズ粒子に対しても、同じように生成消滅演算子を導入し、多粒子系を記述することができます。違いはボーズ粒子の波動関数は粒子の入れ替えに対し対称である、という点で、これを反映し、生成消滅演算子は以下の「交換」関係を満たします：

$$[b_j^\dagger, b_i^\dagger]_- = [b_j, b_i]_- = 0, \quad (5.15)$$

$$[b_i, b_j^\dagger]_- = \delta_{ij}. \quad (5.16)$$

特に一様な系では状態 $|i\rangle$ として平面波がよく用いられます。この場合、状態の指定は運動量 p 、スピン σ で行われます：

$$|p\sigma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{ip\vartheta} |\sigma = \uparrow\downarrow\rangle = c_{p\sigma}^\dagger |0\rangle. \quad (5.17)$$

○ステップ2 生成消滅演算子による物理量の表現

次に、物理量（＝演算子）を生成消滅演算子でどのように表現するか考えます。

A：1粒子演算子

運動エネルギー、ポテンシャル等、各粒子個別に作用する1粒子演算子を考えます：

$$F = \sum_i f_i. \quad (5.18)$$

f_i は i 番目の粒子に作用する演算子です。例えば、ポテンシャルであれば多粒子系では

$$V = \sum_i V_i = \sum_i V(r_i). \quad (5.19)$$

これを多粒子状態に作用させますが、

$$f_i |\phi_\mu(x_i)\rangle = \sum_\nu |\phi_\nu(x_i)\rangle \langle \phi_\nu(x_i) | f_i | \phi_\mu(x_i) \rangle = \sum_\nu f_{\nu\mu} |\phi_\nu(x_i)\rangle, \quad (5.20)$$

を用いると、次のようになることがわかります（ $f_{\nu\mu}$ は i に依存しないこと注意）：

$$\begin{aligned} F|\Psi\rangle &= F \sum_P (-1)^P [\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\dots] \\ &= \sum_P (-1)^P [f_1\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\dots] + \sum_P (-1)^P [\phi_1(x_1)f_2\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)\dots] + \dots \\ &= \sum_{nm} f_{nm} c_1^\dagger c_2^\dagger \dots c_{m-1}^\dagger c_n^\dagger c_{m+1}^\dagger \dots |0\rangle \\ &= \sum_{nm} f_{nm} c_1^\dagger c_2^\dagger \dots c_{m-1}^\dagger c_n^\dagger (c_m c_m^\dagger) c_{m+1}^\dagger \dots |0\rangle \\ &= \sum_{nm} f_{nm} (c_n^\dagger c_m) c_1^\dagger c_2^\dagger \dots c_{m-1}^\dagger c_m^\dagger c_{m+1}^\dagger \dots |0\rangle \\ &= \sum_{nm} f_{nm} c_n^\dagger c_m |\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (5.21)$$

この結果から、演算子 F は生成消滅演算子で次のように表現できます。

$$F = \sum_{nm} f_{nm} c_n^\dagger c_m. \quad (5.22)$$

例として、原点にある不純物ポテンシャルを考えると

$$F = \sum_i V \delta(r_i) \Leftrightarrow f = V \delta(r). \quad (5.23)$$

ϕ として平面波を用いると

$$F = \frac{V}{\Omega} \sum_{p, p', \sigma} c_{p', \sigma}^\dagger c_{p, \sigma}. \quad (5.24)$$

これは、「不純物により p 状態から p' に散乱された」、という粒子描象で解釈することができます。

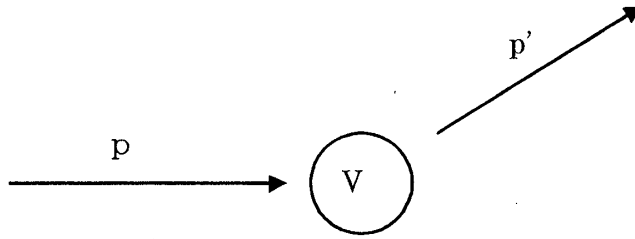


図5. 1 : 1粒子ポテンシャルの第二量子化での描像

運動エネルギーも1粒子演算子で、その場合は

$$H_0 = - \sum_{i, \sigma} \frac{\Delta_i}{2m} \Leftrightarrow f = - \frac{\Delta}{2m}. \quad (5.25)$$

$$H_0 = \sum_{p, \sigma} \varepsilon_p c_{p, \sigma}^\dagger c_{p, \sigma}. \quad (5.26)$$

この式に現れた $n = c^\dagger c$ という演算子は、作用させる波動関数中にその状態が何個あるかを与え、“数演算子”、と呼ばれます。 実際、

$$c_{p, \sigma}^\dagger c_{p, \sigma} |p\rangle = 1 |p\rangle. \quad (5.27)$$

従って、上の式は、「全エネルギー＝(固有エネルギー) × (状態を占める粒子数)」というもっともらしい形になっています。 また、全粒子を与える演算子は

$$N = \sum_{p, \sigma} c_{p, \sigma}^\dagger c_{p, \sigma}. \quad (5.28)$$

B : 相互作用

相互作用に代表される 2 粒子演算子は次のような形をしています

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} g_{ij} \quad (5.29)$$

接触型相互作用の場合は、 $g_{ij} = V\delta(r_i - r_j)$ です。これに対しても一粒子演算子の場合

同様に、ある多粒子波動関数に作用することで、生成消滅演算子での表式が得られます：

$$G = \frac{1}{2} \sum_{i,j,m,n} \langle mn | g | ij \rangle c_m^\dagger c_n^\dagger c_j c_i \quad (5.30)$$

ここで添え字の順番に注意してください。相互作用として接触型のものを考えた場合、フェルミ粒子では始状態のスピンの等しい場合の寄与は 0 になります。これはスピンが同じ場合、2 粒子は同一地点に来られない（パウリの原理）ために、デルタ関数型の相互作用は機能しないことに因ります。スピンが反平行の場合は、

$$G = \frac{V}{\Omega} \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \quad (5.31)$$

これは、「相互作用により (p, p') の粒子が $(p+q, p'-q)$ に散乱された」、という粒子描像で捉えることができます。また、散乱前後で、2 粒子の全運動量が保存していますが、これは相互作用が 2 粒子の相対座標にのみ依存していることの帰結です。

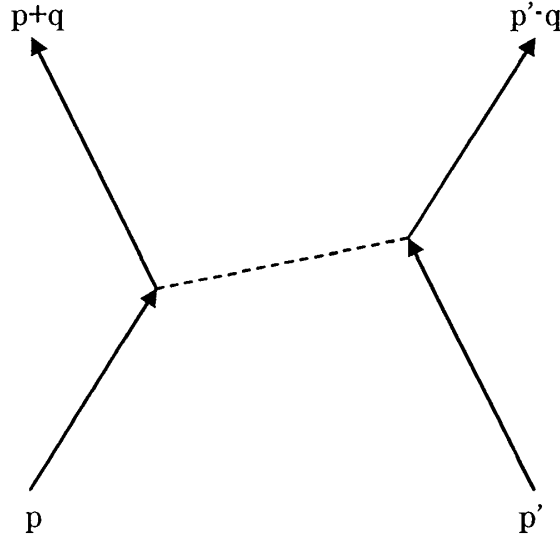


図 5. 2 : 相互作用の第二量子化での描像

○ステップ 3 多粒子系 Hamiltonian の生成消滅演算子による表現

以上の結果から、接触型の相互作用を有する多粒子系のハミルトニアンは、生成消滅演算子の表記法で次のように表されます（以下では体積 $\Omega = 1$ ととります）：

フェッシュバツハ共鳴分子

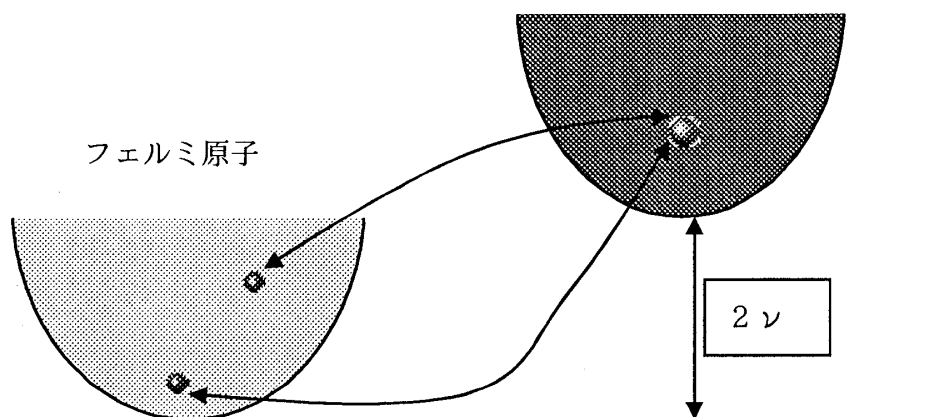


図5. 3 : フェッシュバツハ共鳴

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} + V \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow}. \quad (5.32)$$

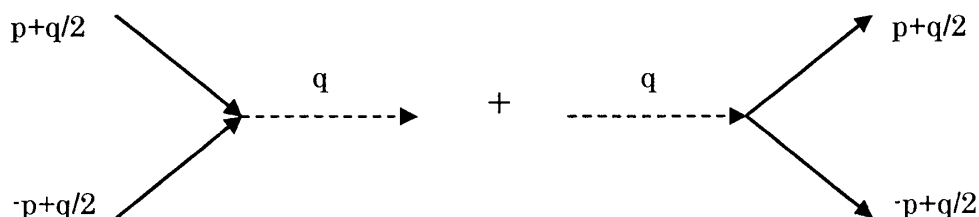
ボーズ粒子系の場合も同様の議論で求めることができ、スピンがない場合、

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p b_p^\dagger b_p + \frac{V}{2} \sum_{p,p',q} b_{p+q}^\dagger b_{p'-q}^\dagger b_p b_{p'}. \quad (5.33)$$

となります。

前章で考えたフェッシュバツハ共鳴も、生成消滅演算子を用いると非常に明快到に記述することができます。共鳴による分子状態状態をボソン演算子 b で表現すると、分子形成、解離は次のように書くことができます。

$$H_{F.R.} = g \sum_{p,q} \left[b_q^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} b_q \right]. \quad (5.34)$$



現在、フェルミ原子ガス超流動の研究では、2種類のモデルが用いられています。一つは前章で求めた引力相互作用をその起源は問わずに有効相互作用（ $-U$ ）として扱うもので、single-channel model (BCS model)と呼ばれます。グランドカノニカルで考えて、

$$H = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow}. \quad (5.35)$$

化学ポテンシャルは粒子数が N である、という条件から決定します。

もう一つはフェッシュバツハ共鳴、また、それにより生じた分子ボソンを加味したもので、two-channel model (coupled fermion-boson model)と呼ばれます。

$$\begin{aligned} H = & \sum_{p\sigma} \varepsilon_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \\ & + g \sum_{p,q} \left[b_q^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger b_q \right] \\ & + \sum_q (\varepsilon_q^B + 2\nu) b_q^\dagger b_q. \end{aligned} \quad (5.36)$$

フェッシュバツハ共鳴による分子のエネルギーは、原子の運動エネルギーに比べ閾値 2ν だけずれています。この閾値は先ほど述べたように磁場により制御できます。ボソンはフェルミオン2つ分で作られていることを反映し、

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}, \quad \varepsilon_q^B = \frac{q^2}{2M} : M = 2m. \quad (5.37)$$

簡単のため、分子ボソン間の相互作用は入れてありません。また、このモデルにおける「共鳴分子ボソン」は、フェッシュバツハ共鳴における共鳴束縛状態を表すもので、前章の“クーパー対分子”とは別物であることに注意して下さい。このモデルを考える際、1 ボーズ分子 = 2 フェルミ原子、という「全フェルミ原子数の保存則」課す必要があります（ $N = N_{\text{Fermion}} + 2N_{\text{Boson}}$ ）。この拘束条件は化学ポテンシャルを導入し、グランドカノニカル（ $H - \mu N$ ）で考えることによりハミルトニアンに吸収できます。すると

$$\begin{aligned} H = & \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \\ & + g \sum_{p,q} \left[b_q^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger b_q \right] \\ & + \sum_q (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) b_q^\dagger b_q. \end{aligned} \quad (5.38)$$

1 分子 = 原子 2 個を反映し、ボソンの化学ポテンシャルは $\mu_B = 2\mu$ となっています。

6. フェルミ粒子超流動の基底状態と BCS—BEC クロスオーバー

Cooper instability—フェルミ面上に付け加えられたフェルミ粒子間に引力が存在すると分子化する—で考えた波動関数を第二量子化で表すと、

$$\Psi(r_1, r_2) = \sum_{k > k_F} g_k e^{ik \cdot (r_1 - r_2)} |F\rangle \rightarrow \sum_{k > k_F} g_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |F\rangle. \quad (6.1)$$

$|F\rangle$ はフェルミ面まで $\uparrow\downarrow$ スピンの粒子が詰まった状態で、次のように、対の集まりとして書くことができます。

$$|F\rangle = \left(\sum_{p_1} \tilde{g}_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right) \left(\sum_{p_2} \tilde{g}_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right) \dots \left(\sum_{p_{N/2}} \tilde{g}_{p_{N/2}} c_{p_{N/2}\uparrow}^\dagger c_{-p_{N/2}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (6.2)$$

$\tilde{g}$ は $k < k_F$ で 1、それ以外で 0 です。 Ψ 中の k の和の制限は、生成消滅演算子の性質から、その制限をはずし、かわりに $g(k < k_F) = 1$ としても同じです（フェルミ面以下の既に詰まった状態に更に粒子を付け加えても、全て 0 になります。）。 よって、

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_k g_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \right) \left(\sum_{p_1} \tilde{g}_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right) \left(\sum_{p_2} \tilde{g}_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right) \dots \left(\sum_{p_{N/2}} \tilde{g}_{p_{N/2}} c_{p_{N/2}\uparrow}^\dagger c_{-p_{N/2}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (6.3)$$

Cooper の議論は、2 粒子のみを特別扱いするものでした。「すべての粒子間に引力が働いて Cooper 対を作ったとしたらどうなるか」、と考えた時、次のような状態が類推されるでしょう。

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{p_1} g_{p_1} c_{p_1\uparrow}^\dagger c_{-p_1\downarrow}^\dagger \right) \left(\sum_{p_2} g_{p_2} c_{p_2\uparrow}^\dagger c_{-p_2\downarrow}^\dagger \right) \dots \left(\sum_{p_{N/2}} g_{p_{N/2}} c_{p_{N/2}\uparrow}^\dagger c_{-p_{N/2}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (6.4)$$

g は Cooper の議論で求めたものと類似の構造（フェルミエネルギーより上でも有限）をしていると期待されます。この式は $N/2$ 個の Cooper 対の集合体という意味では分かりやすい構造をしていますが、実際に使用するにはちょっと複雑です。実際、規格化定数を計算するのも容易ではありません。

Bardeen, Cooper, Schrieffer はこの波動関数より扱い安い、超伝導状態を記述する状態として次のものを提案しました（BCS 波動関数）。

$$|BCS\rangle = C \prod_k \left[1 + g_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle. \quad (6.5)$$

これは粒子 0 から無限個までが混じった状態ですが、その中から N 粒子数の部分を抜き出すと $|\Psi\rangle$ となります。

$$C = \prod_k u_k v_k, \quad (6.6)$$

$$g_k = v_k / u_k. \quad (6.7)$$

とおくと、

$$|BCS\rangle = \prod_k \left[u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle. \quad (6.8)$$

規格化条件 $\langle BCS | BCS \rangle = 1$ から

$$u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (6.9)$$

ここでは、暗に (u, v) は実数としていますが、そうして良いことは後で分かります。

いろいろな粒子数が混じった状態、というのはちょっと気味の悪いものです。しかし、BCS 波動関数を展開した際、ほとんどが N 個の状態であるならば、そのまわりの「揺らいている」項はあまり問題とはならないと期待できます。後述するように、粒子数期待値 N とその揺らぎの比は

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\sqrt{\langle N \rangle^2 - \langle N^2 \rangle}}{N} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (6.10)$$

となり、多粒子系（原子ガスでは $N=10^6 \sim 10^8$ 程度）では、ほとんど粒子数は確定しているとみなせます。

$|BCS\rangle$ の (u, v) は粒子数期待値一定のもと、エネルギー期待値最小の条件から決定されます。この、条件付き極小問題は Lagrange の未定乗数法を用いて $H - \mu N$ を最小にすることで実行出来ます。これはまさに前章の BCS モデル

$$H = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow}, \quad (6.11)$$

の期待値を最小化することに相当します。実際にこれを計算すると

$$\langle BCS | H | BCS \rangle = 2 \sum_p (\varepsilon_p - \mu) v_p^2 - U \sum_{p,p'} [u_p v_p u_{p'} v_{p'} - v_p^2 v_{p'}^2]. \quad (6.12)$$

全粒子数期待値は

$$\langle N \rangle = \sum_{k\sigma} \langle c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} \rangle = 2 \sum_p v_p^2, \quad (6.13)$$

なので

$$\langle BCS | H | BCS \rangle = 2 \sum_p (\varepsilon_p - \mu) v_p^2 - U \sum_{p,p'} u_p v_p u_{p'} v_{p'} - U \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle^2. \quad (6.14)$$

これを、粒子数期待値一定の条件下で、 $u^2 + v^2 = 1$ に注意しつつ v で変分すると、

$$2\xi_p u_p v_p = \Delta(u_p^2 - v_p^2), \quad (6.15)$$

が得られます。ここで $\xi_p = \varepsilon_p - \mu$ 、

$$\Delta = U \sum_p u_p v_p, \quad (6.16)$$

は BCS 秩序パラメータと呼ばれ、フェルミ粒子系超流動を特徴づけるパラメータです。これを解くと、 (u, v) は、はじめに設定したように実数として求まり、

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{|\xi_p|}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{|\xi_p|}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right). \quad (6.17)$$

$|BCS\rangle$ を物理的に考えた場合、 p の大きいところでは粒子はいないはずですから v は 0、逆に k が小さいところでは粒子は完全につまっているので、 $v = 1$ になるべきです。よって、

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}} \right). \quad (6.18)$$

$\Delta = 0$ の場合、 $|BCS\rangle$ は自由フェルミガスの基底状態に帰着します。 (u, v) を Δ の式に代入すると、

$$\Delta = U \sum_p \frac{\Delta}{2E_p}, \quad E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}. \quad (6.19)$$

両辺 Δ で割ると、秩序パラメータの決定方程式（ギャップ方程式）が得られます。

$$1 = U \sum_p \frac{1}{2E_p}. \quad (6.20)$$

ただし、この和は積分に直すとやはり紫外発散します。これを避けるために、今度も

先と同じトリックを用いて、

$$1 = -\frac{4\pi a_s}{m} \sum_p \left[\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\varepsilon_p} \right]. \quad (6.21)$$

これと粒子数の方程式、

$$N = 2 \sum_p v_p^2 = \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right], \quad (6.22)$$

を連立させることで (Δ, μ) を自己無撞着に決定します。積分化して、エネルギーをフェルミエネルギー ε_F でスケールすると、

$$\frac{1}{k_F a_s} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{2E} - \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad (6.23)$$

$$1 = \frac{3}{4} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[1 - \frac{\xi}{E} \right]. \quad (6.24)$$

ここまでの議論は、Cooper instability の多粒子系への拡張、という意味では「分子化」を考慮していますが、式の中にはっきりとは見えていません。この、「分子性」は、実は秩序パラメータの中に潜んでいます。上で定義した Δ は実は次の対相関から求まることが実際に計算してみると分かります：

$$\Delta = U \sum_p \langle BCS | c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger | BCS \rangle. \quad (6.25)$$

これは、まさに $(k\uparrow)$ と $(-k\downarrow)$ のフェルミ原子が対を作って分子化していることを示しています。

ギャップ方程式と粒子数の方程式を弱結合、強結合の場合についてそれぞれ解くと、

○ 弱結合 BCS 領域： $1/(k_F a_s) \rightarrow -\infty$

$$\Delta = \frac{8}{e^2} \varepsilon_F e^{-\frac{\pi}{2k_F a_s}}, \quad \mu = \varepsilon_F. \quad (6.26)$$

○ 強結合 BEC 領域： $1/(k_F a_s) \rightarrow +\infty$

$$\Delta = \sqrt{\frac{16}{3\pi}} |\mu|^{1/4} \varepsilon_F^{3/4}, \quad \mu = -\frac{1}{2ma_s^2}. \quad (6.27)$$

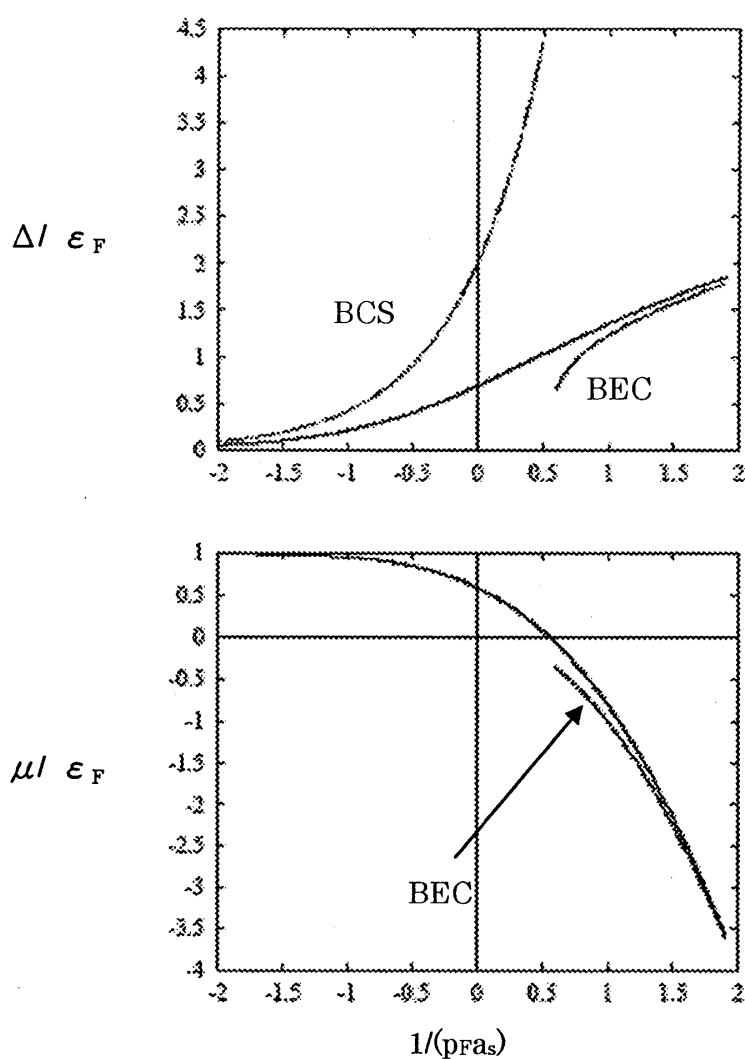


図6. 1 : Δ 、 μ のBCS-BECクロスオーバーでの振舞い。

図中、BCS、BECはそれぞれ弱結合、強結合極限の結果

ここで興味深いことは、Cooper instabilityの結果と比較すると(数因子は除いて)、弱結合BCS領域では

分子の結合エネルギー $\Leftrightarrow \Delta$

であるのに対し、強結合BEC領域では

分子の結合エネルギー $\Leftrightarrow \mu$

となっている点です。これについては後で励起スペクトルを考える際に再度触れます。

先ほど触れた、BCS 状態における粒子数の揺らぎを計算すると、

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{\sqrt{\langle N \rangle^2 - \langle N^2 \rangle}}{N} = \frac{1}{N} \sqrt{2 \sum_k u_k^2 v_k^2} = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{1}{2} \sum_k \frac{\Delta^2}{\xi_k^2 + \Delta^2}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (6.28)$$

となり、「多粒子系では $|BCS\rangle$ の粒子数揺らぎが無視できる」、という先ほどの議論が確認できます。

超流動状態が分子の集合体であるならば、(系のエネルギー) = (分子の結合エネルギー) $\times$ (分子数 (=原子数/2)) になるはずですが、はたしてそうでしょうか？ 先ず、分子性が非常に強い BEC 状態で基底状態のエネルギーを計算すると

$$E_G = \langle BCS | H - \mu N | BCS \rangle + \mu \langle BCS | N | BCS \rangle = -|\mu| N = -\frac{1}{ma_s^2} \frac{N}{2} = -E_{bind} N_B. \quad (6.29)$$

ここで、

$$E_{bind} = \frac{1}{ma_s^2}, \quad (6.30)$$

は Cooper instability の議論で求めた強結合領域での分子 (束縛状態) の結合エネルギーです。BEC 領域では確かに期待した結果になっています。他方、弱結合領域では、自由フェルミ原子ガスとエネルギーを比較して

$$E_G - E_N = -\frac{1}{2} \rho(\varepsilon_F) \Delta^2 = -\frac{3}{8} \left(N \frac{\Delta}{\varepsilon_F} \right) \Delta. \quad (6.31)$$

この領域での結合エネルギーは Δ なので、これは、 $(N/2) \times (\Delta/\varepsilon_F)$ 程度の分子しかエネルギーに寄与していないことになります ($(\Delta/\varepsilon_F) \ll 1$ に注意)。自由フェルミガスを考えた場合、フェルミ面以下の $\uparrow\downarrow$ スピン状態は完全に詰まっていますが、これは「対」という書き方をすると、この章のはじめにみたように、フェルミ面以下の全ての $(p\uparrow, -p\downarrow)$ 状態が対を作っている (ただし、結合エネルギーはありません)、とみなすことができます。これと超流動という対凝縮状態を比較した場合、違いはフェルミ面近傍での Cooper instability で生成された「対」のみで、フェルミ面以下、大体結合エネルギー程度より深いところでは、両者の状態はほとんど違いがありません。実際、 $|BCS\rangle$ を見てみると、

$$u_k \sim 0, v_k \sim 1 \iff \varepsilon_p < \varepsilon_F - \Delta, \quad (6.32)$$

なので、深いところは自由フェルミガス同様、ほぼ完全につまっています。したがって、エネルギーを比較すると、フェルミ面近傍での分子対 $((N/2) \times (\Delta/\varepsilon_F))$ の結合エネルギーのみが違いとなって現れることになります。したがって、「超流動＝分子化したボソンのBEC」という理解の仕方は定性的には良いのですが、定量的に考える際は、弱結合BCS領域において注意が必要です。

弱結合BCS領域では分子描像はあまり良くない、ということを述べましたが、それでも、「分子化」しているという痕跡はある程度うかがい知ることができます。BCS領域での原子の占有数

$$n_p = \langle BCS | c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} | BCS \rangle = v_p^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{(\varepsilon_p - \varepsilon_F)^2 + \Delta^2}} \right], \quad (6.33)$$

を $T=0$ の自由フェルミ原子ガスの分布関数と比較すると、フェルミレベル近傍で幅 Δ 程度にわたってぼけていることがわかります。

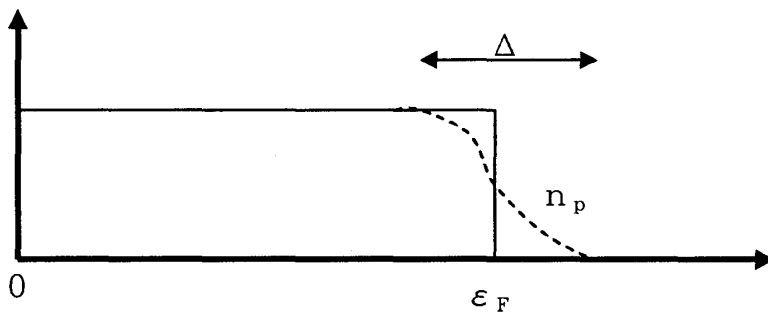


図6.2：超流動状態におけるフェルミ準位近傍のぼやけ

このぼやけは、フェルミ面近傍の粒子が分子化したことによるものですが、この分子の大きさを ξ と書くと、分子中の粒子の波動関数は大体この範囲内に局在しているので、不確定原理によって運動量のぼやけ

$$\Delta p \sim \frac{1}{\xi}, \quad (6.34)$$

が生じます。これによってフェルミレベルには $(k_F \pm \Delta p)^2 / 2m$ 程度のぼけが生じるはずで、これを上図のぼやけの原因とすると、分子の大きさとして

$$\xi = \frac{k_F}{m\Delta} = \frac{1}{k_F} e^{-\frac{\pi}{2k_F a_s}} = \kappa. \quad (6.35)$$

これは前章で求めた分子のサイズに一致します。

この章の始めに導入した $|BCS\rangle$ は次のように書くことができます。

$$|BCS\rangle = e^{\sum g_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger} |0\rangle. \quad (6.36)$$

指数の肩の演算子は重心運動量 0 でフェルミ粒子を 2 つ生成することを表しているの
で、この部分を重心運動量 0 のボソンの生成演算子とみなすと、これは、ボソンの超流
動状態を記述する波動関数：

$$|\Phi\rangle = e^{\sqrt{n_0} b_0^\dagger} |0\rangle, \quad (6.37)$$

と同じ形であることが分かります。ボソンの超流動では、

$$H = \sum_q \left(\frac{q^2}{2m} - \mu \right) b_q^\dagger b_q + \frac{U}{2} \sum_{p,p',q} b_{p+q}^\dagger b_{p'-q}^\dagger b_p b_{p'}, \quad (6.38)$$

に対し、

$$b_0 \rightarrow \langle b_0 \rangle, \quad (6.39)$$

として超流動 (BEC) 秩序パラメータを記述します (Bogoliubov 理論)。凝縮してい
るボソンの数は、

$$n_0 = \langle b_0 \rangle^2, \quad (6.40)$$

で与えられます。フェルミ粒子超流動の場合 $\langle b_0 \rangle$ に相当するものが Δ です。この
ように、 $|BCS\rangle$ はボソン超流動の波動関数と密接に関係していますが、実際に、

$$b_0 = \sum_k g_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger, \quad g_k = \frac{v_k}{u_k}, \quad (6.41)$$

はボソンの演算子とみなせるでしょうか？ そこで交換関係を計算してみると、

$$[b_0, b_0^\dagger] = \sum_k g_k^2 (1 - c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} - c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow}). \quad (6.42)$$

BCS 状態にあるとして、その期待値の範囲 (期待値をとることを前提に) で交換関係を評
価すると

$$[b_0, b_0^\dagger] = \sum_k g_k^2 (1 - 2v_k^2). \quad (6.43)$$

もし、右辺が正であれば、スケールしたボソン演算子：

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{\sum_k g_k^2 (1 - 2v_k^2)}} b_0, \quad (6.44)$$

は (期待値の範囲で) ボソン演算子の交換関係を満たします：

$$[B_0, B_0^\dagger] = 1. \quad (6.45)$$

ところが、右辺が負の場合は、このような処方箋でボーズ統計に従う生成消滅演算子を作ることはできません。 v の構造から分かるように、 B_0 が常に導入できるのは $v < 0.5$ の場合で、これは $\mu < 0$ であれば良く、確かに分子性の強い BEC 領域で成り立つことがわかります。これが導入できる場合は、これを $|BCS\rangle$ に代入し、ボゾン超流動の波動関数と比較することで、凝縮粒子数を計算することができます：

$$n_0 = \sum_k g_k^2 (1 - 2v_k^2) = \sum_k \left(1 - \frac{\xi_p}{\sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}}\right)^2 \frac{\xi}{E}. \quad (6.46)$$

これを BEC 極限で評価すると、

$$n_0 \rightarrow \Delta^2 \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \frac{1}{4(\varepsilon + |\mu|)^2} = \frac{N}{2}, \quad (6.47)$$

となり、期待通り、「 $N/2$ 個のクーパー対分子の凝縮」が得られます。

BCS 領域 ($\mu > 0$) で上の議論が使えないのは、この領域のボーズ凝縮がフェルミ面まで詰まった状態 (真空) に対し、粒子対、ホール対の凝縮になっているためです。ここで、ホールとはフェルミ面内の粒子を取り除いた穴を新たに粒子とみなしたものです。これを見るために、 μ まで詰まった仮想的な自由フェルミガスの基底状態を $|F(\mu)\rangle$ と書いて

$$|BCS\rangle = \prod_k [u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger] |0\rangle = \prod_{\varepsilon < \mu} [u_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + v_k] \prod_{\varepsilon > \mu} [u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger] |F(\mu)\rangle. \quad (6.48)$$

ここで

$$|F(\mu)\rangle = \prod_{\varepsilon < \mu} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger |0\rangle, \quad (6.49)$$

$$\prod_{\varepsilon < \mu} [u_k c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + v_k] |F(\mu)\rangle = \prod_{\varepsilon < \mu} [u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger] |0\rangle. \quad (6.50)$$

これを先ほどのようにボゾン超流動の波動関数に似せて書くと、規格化定数は除いて

$$|BCS\rangle = e^{\sum_{\varepsilon < \mu} \frac{u_k}{v_k} c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \sum_{\varepsilon > \mu} \frac{v_k}{u_k} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger} |F(\mu)\rangle = e^{\sqrt{n_0} B_0^\dagger} |F(\mu)\rangle. \quad (6.51)$$

今度は $b_0^\dagger = \sum_{\varepsilon < \mu} \frac{u_k}{v_k} c_{-k\downarrow} c_{k\uparrow} + \sum_{\varepsilon > \mu} \frac{v_k}{u_k} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger$ について交換関係を計算すると、 $|BCS\rangle$ で期待値をとるという前提のもとで、

$$[b_0, b_0^\dagger] = - \sum_{\varepsilon < \mu} \frac{u_k^2}{v_k^2} (1 - 2v_k^2) + \sum_{\varepsilon > \mu} \frac{v_k^2}{u_k^2} (1 - 2v_k^2). \quad (6.52)$$

今度は右辺は常に正です。 $\mu < 0$ では一項目を 0 とすれば、この式は全域で使うことができます。 よって、ボソンの交換関係を満たす演算子は、

$$B_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{- \sum_{\varepsilon < \mu} \frac{u_k^2}{v_k^2} (1 - 2v_k^2) + \sum_{\varepsilon > \mu} \frac{v_k^2}{u_k^2} (1 - 2v_k^2)}} b_0^\dagger. \quad (6.53)$$

これから、凝縮状態にあるクーパー対の数 (condensation fraction) は、

$$n_0 = - \sum_{\varepsilon < \mu} \frac{u_k^2}{v_k^2} (1 - 2v_k^2) + \sum_{\varepsilon > \mu} \frac{v_k^2}{u_k^2} (1 - 2v_k^2). \quad (6.54)$$

これを BCS 領域 ($\mu = \varepsilon_F$) で評価すると、

$$n_0 = \frac{N}{2} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon_F} \right). \quad (6.55)$$

フェルミ面付近 Δ 程度の領域の粒子が対凝縮している、という先の結果が再現できます。

ここでは、 $|BCS\rangle$ をちょっと強引 (?) に $|BEC\rangle$ と同じ形に書いて、近似的にボソンの交換関係を満たす分子の演算子を導入、凝縮分子数を算出しました。 別の方法としては、

$$|BCS\rangle = \prod_k u_k e^{\frac{v_k}{u_k} c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger} |0\rangle, \quad (6.56)$$

と書いて、相対運動量 k (重心運動量 0) の分子ボソンを表す演算子 $d_k^\dagger = c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger$ に対し、同様の議論を展開します。 この場合、この分子状態は 2 重占有できないことに注意し、後で “BEC 秩序パラメータ” $\langle BCS | d_k | BCS \rangle$ を計算することを前提にすると、 d 、 $d^\dagger$ はそのままボソンの交換関係を見たすと考えて構いません。

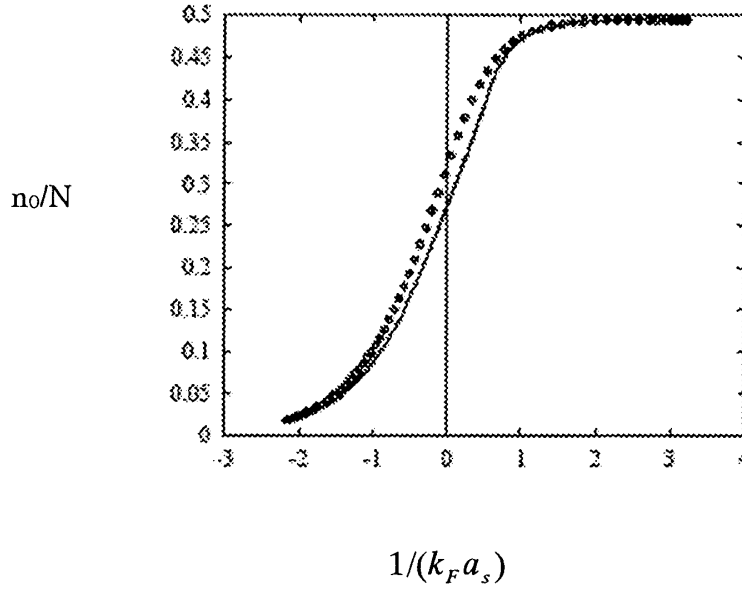


図6．3：BCS・BEC クロスオーバー領域での凝縮分子数。 図中、
点は ODLRO に基づいて導入された式による結果。
全ての分子が凝縮した場合は0．5になる。

凝縮ボソン数はこの d 状態を占有する分子をあらゆる相対運動量で足し上げたものになって、

$$n_0 = \sum_k \langle BCS | d_k | BCS \rangle^2 = \sum_k u_k^2 v_k^2 = \sum_k \frac{\Delta^2}{4E_k^2}. \quad (6.57)$$

図6．3には両方の結果が示してありますが、両者に本質的な差はないことが分かります。

凝縮粒子数を精密に導入する場合は、多少抽象的にはなりますが非対角長距離秩序 (ODLRO) の議論を用います。 先ず、ボソン系の場合を考えると、BEC 状態では1次の密度行列が次の性質を持ちます：

$$\rho_1 = \langle \Phi^\dagger(r_1) \Phi(r_2) \rangle \Rightarrow \langle \Phi^\dagger(r_1) \rangle \langle \Phi(r_2) \rangle. \quad (6.58)$$

ここで、 $\Phi(r)$ はボソン場の演算子、また、矢印は r_1, r_2 を無限に引き離すことを表します。 同時に、BEC 状態での ρ_1 の最大固有値はオーダー N となり、この固有値が condensate fraction n_0 を与えます。 対応する規格化された固有関数を $\phi(r)$ と書く

と、それ以外の (オーダー1の) 固有状態は落として $\rho_1 = n_0 \phi^\dagger(r_1) \phi(r_2)$ と書けることか

ら、

$$n_0 = \int dr |\langle \Phi(r) \rangle|^2. \quad (6.59)$$

これは通常のボソン系超流動の凝縮粒子数の表式に一致します。

これをフェルミ粒子系超流動に拡張するには 2 次の密度行列で同様の議論を行います。超流動状態で、

$$\rho_2 = \langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r_1) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r_2) \Psi_{\downarrow}(r_3) \Psi_{\uparrow}(r_4) \rangle \Rightarrow \langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r_1) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r_2) \rangle \langle \Psi_{\downarrow}(r_3) \Psi_{\uparrow}(r_4) \rangle. \quad (6.60)$$

ここで、 $\Psi_{\sigma}(r)$ はフェルミオン場の演算子で、矢印は (r_1, r_2) と (r_3, r_4) を無限に引き離れた場合を表します。超流動状態ではこの密度行列の最大固有値が N のオーダーになっており、規格化された固有関数を $\phi(r_1, r_2)$ とすると、 $\rho_2 = n_0 \phi^*(r_1, r_2) \phi(r_3, r_4)$ と書け、これより、凝縮粒子数は

$$n_0 = \iint dr_1 dr_2 |\langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r_1) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r_2) \rangle|^2, \quad (6.61)$$

で与えられます。特に一様系で $T=0$ の場合は、

$$\Psi_{\sigma}^{\dagger}(x) = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} c_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger}, \quad (6.62)$$

に対して、

$$\langle BCS | \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r') | BCS \rangle = \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \langle BCS | c_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} c_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} | BCS \rangle = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (6.63)$$

これを代入すると

$$n_0 = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta^2}{4E_{\mathbf{k}}^2}, \quad (6.64)$$

となり、先の結果に一致します。ここで与えられた凝縮粒子数の式は一般的なもので、系が一様でない場合にも使えます。導入は多少抽象的ですが、上の結果は次式で与えられるクーパ対の「巨視的」波動関数

$$f(r_1, r_2) = \langle \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(x) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(x') \rangle, \quad (6.65)$$

の規格化定数が n_0 と関係していることを表しており、巨視的波動関数内に入っているクーパ対の数を与えているという物理的意味を持っていると考えられます。

7. フェルミ粒子系超流動の励起状態

前章では、フェルミ粒子系超流動の基底状態である BCS 状態について述べましたが、次にそこからの励起について考えてみます。これを議論するには超流動状態では、

$$\Delta = U \sum_p \langle c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \rangle, \quad (7.1)$$

で与えられる秩序パラメータが有限になることに着目し、ハミルトニアン of 相互作用項に対して、対を表す演算子部分を平均値とその周りの揺らぎにわけます：

$$c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger = \langle c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \rangle + \delta A_k^\dagger. \quad (7.2)$$

相互作用は、BCS 状態に重要な対の重心運動量 0 の部分のみ考えて、

$$\begin{aligned} U \sum_{p,p'} c_{p'\uparrow}^\dagger c_{-p'\downarrow}^\dagger c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} &= U \sum_{p,p'} (\langle c_{p'\uparrow}^\dagger c_{-p'\downarrow}^\dagger \rangle + \delta A_{p'}^\dagger) (\langle c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \rangle + \delta A_p) \\ &= U \Delta^2 + U \sum_{p,p'} (\langle c_{p'\uparrow}^\dagger c_{-p'\downarrow}^\dagger \rangle \delta A_p + \delta A_{p'}^\dagger \langle c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow} \rangle + \delta A_{p'}^\dagger \delta A_p) \\ &= -\frac{\Delta^2}{U} + \Delta \sum_p (c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger + c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}) + \sum_p \delta A_p^\dagger \delta A_p. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Δ は実数としましたが、今の場合はこのようにとっても問題ありません。最後の項は、平均場 Δ に対する揺らぎの項を表し、これを無視する近似が平均場近似です。平均場近似のもとでハミルトニアンは、

$$H = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - \Delta \sum_p (c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger + c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}) + \frac{\Delta^2}{U}. \quad (7.4)$$

これを行列を使って書くと（南部表示）、

$$H = \sum_p \begin{pmatrix} c_{p\uparrow}^\dagger & c_{-p\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_p - \mu & -\Delta \\ -\Delta & -(\varepsilon_p - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{-p\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} + \frac{\Delta^2}{U} + \sum_p (\varepsilon_p - \mu). \quad (7.5)$$

これは、Bogoliubov 変換と呼ばれる一次変換によって対角化することができます。

$$\begin{pmatrix} c_{p\uparrow} \\ c_{-p\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_p & v_p \\ -v_p & u_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{p\uparrow} \\ \alpha_{-p\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

ここで、 (u, v) は前章の $|BCS\rangle$ 中に出てきたものと同じです。右辺に出てくる演算子は直接計算すれば分かるようにフェルミ統計に従い、ボゴロンと呼ばれることがあります。これによって、

$$H = \sum_{p\sigma} E_p \alpha_{p\sigma}^\dagger \alpha_{p\sigma} + E_0. \quad (7.7)$$

これは、自由フェルミフェルミ粒子のハミルトニアンと同じ形をしています。したがって、固有状態は

$$|p\sigma\rangle = \alpha_{p\sigma}^\dagger |0\rangle, \quad (7.8)$$

で与えられ、固有エネルギーは、

$$E_p = \sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \Delta^2}. \quad (7.9)$$

また、

$$E_0 = \sum_p [(\varepsilon_p - \mu) - E_p] + \frac{\Delta^2}{U}, \quad (7.10)$$

はボゴロンが一個もない状態でのエネルギーです。今の場合 $E_p > 0$ なので、これは基底状態のエネルギーです。実際、これは前章で計算した $|BCS\rangle$ のエネルギー

$$\langle BCS | H | BCS \rangle = 2 \sum_p (\varepsilon_p - \mu) v_p^2 - U \sum_{p,p'} u_p v_p u_{p'} v_{p'} - U \left\langle \frac{N}{2} \right\rangle^2, \quad (7.11)$$

と（物理的に重要でない最終項を除いて）一致します。

固有状態を与える際に、自由フェルミガスの時と同じように $|0\rangle$ にボゴロンの生成演算子を作用させましたが、これにはちょっと注意が必要です。自由電子の場合、 $|0\rangle$ とは粒子が一つもない状態（真空）です。では、今の場合、 $|0\rangle =$ 「ボゴロ

ンが一つもない状態」=とは如何なるものなのでしょう？ その答えは

$$|0\rangle = |BCS\rangle. \quad (7.12)$$

ボゴロンが一つもない、ということは、全ての α_p に対し $\alpha_p | 0 \rangle = 0$ が成立することを意味します。ボゴロンを原子の生成消滅演算子で表し、それを前章の $|BCS\rangle$ の具体的表式に作用させることで $\alpha_p | BCS \rangle = 0$ が導けます。つまり、ボゴロンにとっての「真空」は $|BCS\rangle$ であり、原子自身は沢山存在している状態であることに留意しましょう。この点を考慮すれば、ボゴロンと言えども普通のフェルミ粒子として扱って構いません。ただし、ボゴロンは励起に依存して現れるので、格子振動のフォノン同様、「粒子数」は不確定です ($T=0$ で 0 個)。したがって、化学ポテンシャルは 0 です。すると、例えば、有限温度のボゴロンの占有数は

$$\langle \alpha_p^\dagger \alpha_p \rangle = f(E_p). \quad (7.13)$$

ボゴロンの固有エネルギーには、その表式から分かるように有限なギャップが存在しています。弱結合 BCS 領域では化学ポテンシャルは正なので、このギャップは Δ で与えられます。通常の金属超伝導はこの場合に相当し、 Δ はエネルギーギャップとも呼ばれます。しかし、BCS-BEC クロスオーバーを考える場合、化学ポテンシャルがマイナスになる強結合 BEC 領域では、励起ギャップが「エネルギーギャップ Δ 」で与えないことに注意が必要です。この場合、正しいギャップは、

$$E_g = \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}. \quad (7.14)$$

前章で見たように、BEC 極限では $|\mu| \gg \Delta$ なので、

$$E_g = |\mu| : BEC. \quad (7.15)$$

これと前章で議論した分子の結合エネルギーを比べると、このギャップがクーバー対を分解するのに必要なエネルギーを表していることがわかります。言い換えると、ボゴロンは凝縮しているクーバー対分子を分解する励起を表しているのです。ただし、Bogoliubov 変換を具体的に原子の生成消滅演算子で表現するとわかるように、ボゴロンの励起は原子数を ± 1 だけ変化させるものであることが分かります。通常、このよ

うな「粒子数を保存しない励起」は不可能で、現実には存在する励起は、例えば分子1個を分解するにしても、それにより生じた2個の原子を励起状態としてボゴロン2個で表現しなくてはなりません（ただし、後述する rf スペクトルではボゴロン一個の励起が可能です）。したがって、解離エネルギーの実際の最小値は、

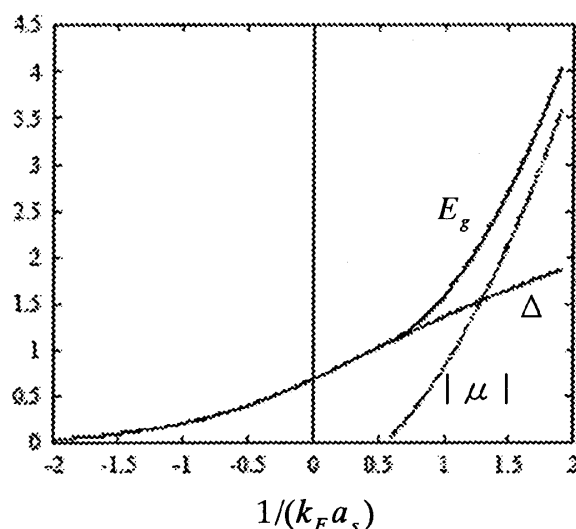


図7. 1 : BCS-BEC クロスオーバーにおける一粒子励起スペクトルのギャップ（フェルミエネルギーで規格化してある）。

$$2E_g = \begin{cases} 2\Delta & : \text{BCS} (\mu > 0) \\ 2\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \rightarrow 2|\mu| & : \text{BEC} (\mu < 0) \end{cases} \quad (7.16)$$

2粒子の対形成を議論した際、BEC 極限での分子の結合エネルギーは $1/(ma_s^2)$ となっており、他方、|BCS>理論で求めた $|\mu| = 1/(2ma_s^2)$ はこの半分の大きさでしたが、両者の違いは上の議論により解消されます。

励起にギャップがあることは状態密度に顕著に現れます。ボゴロンの状態密度は、

$$\sum_p A(E_p) = \int d\omega \sum \delta(\omega - E_p) A(\omega) = \int d\omega N(\omega) A(\omega), \quad (7.17)$$

$$N(\omega) = \sum \delta(\omega - E_p) = \int_0^\infty d\varepsilon \rho(\varepsilon) \delta(\omega - E), \quad (7.18)$$

と書いた際の $N(\omega)$ で与えられます。これは、BCS領域 ($\mu > 0$) と BEC 領域

($\mu < 0$) で異なる結果を与えて、

○ BCS領域 ($\mu > 0$)

$$N(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega < \Delta \\ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} [\rho(\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} + \mu) + \rho(-\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} + \mu)] & : \omega > \Delta \end{cases} \quad (7.19)$$

○ BEC領域 ($\mu < 0$)

$$N(\omega) = \begin{cases} 0 & : \omega < \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} \\ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \rho(\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - |\mu|) & : \omega > \sqrt{\Delta^2 + \mu^2} \end{cases} \quad (7.20)$$

ただし、BCS領域の場合、2項目の ρ 内のエネルギーがマイナスの場合、この項は0とします。具体的な構造の違いをみるために、ギャップ近傍（ギャップ少し上）の部分抜き出すと

$$N(\omega) = \begin{cases} 2\rho(\mu) \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} & : BCS \\ \frac{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2}}{|\mu|} \rho(\sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - |\mu|) \propto \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} - |\mu| & : BEC \end{cases} \quad (7.21)$$

BCS領域の場合は、コヒーレンスピークと呼ばれる発散的な振る舞いがギャップエッジのところで見られるのに対し、BEC領域ではそのような構造はなく、ギャップエッジ近傍でエネルギーの1/2乗に比例したエネルギー依存性を示します。

特にBEC極限を考えると、 $\Delta \ll |\mu| \rightarrow \infty$ より、状態密度はエネルギーの原点をずらした自由フェルミガスの状態密度になります：

$$N(\omega) = \rho(\omega + |\mu|). \quad (7.22)$$

BEC極限では、原子は分子状態として自由フェルミガスのバンドよりも深いところに ($\mu \ll 0$) にあります。励起は、これを解離させてフェルミ原子のバンドにおくことに相当し、励起スペクトル (= 状態密度) は自由フェルミガスの状態密度を結合エネルギー分だけずらしたものになります。ただし、先に注意したように、解離した原子1個のみを上バンドにおくわけにはいかない場合は、残りのもう一つの原子もフェルミガスのバンドに持ってくる必要があり、解離にともなう励起エネルギーのしきい値は、状態密度のギャップの2倍になります。

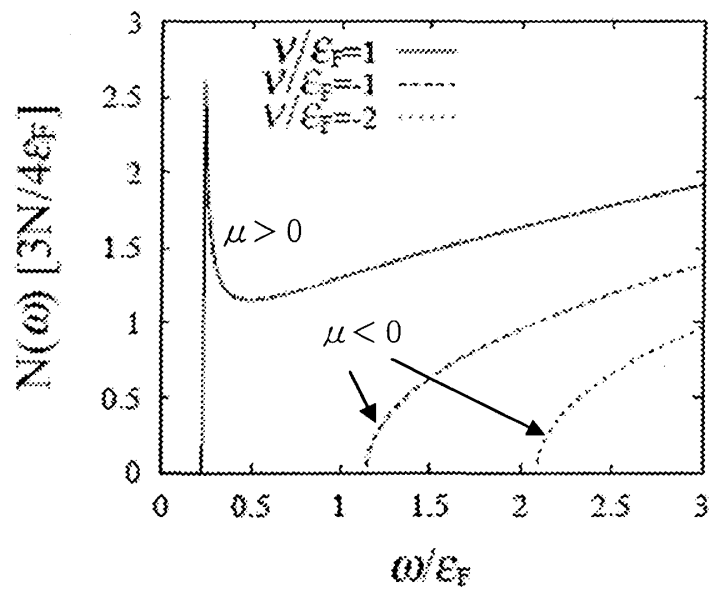


図7. 2 : BCS 領域 ($\mu > 0$) と BEC 領域 ($\mu < 0$) での
超流動状態密度。 $Un = 0.3\epsilon_F$, $g\sqrt{n} = 0.6\epsilon_F$.

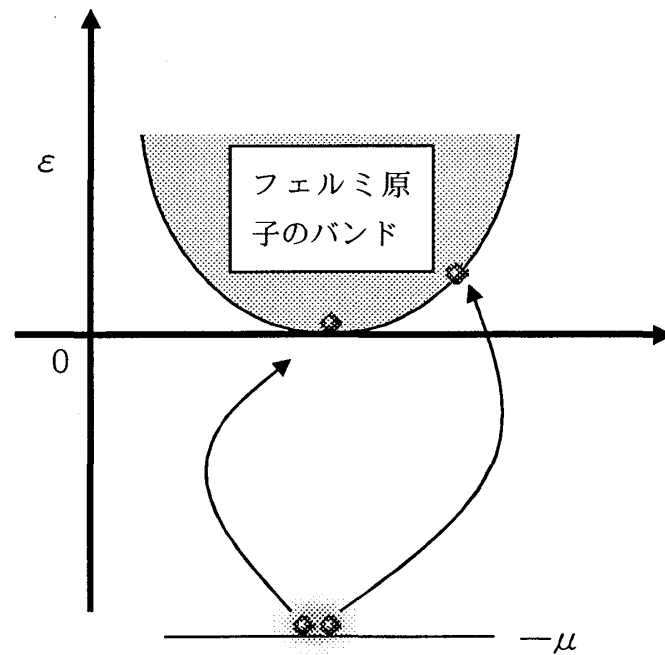


図7. 3 : BEC 極限 ($\mu < 0$) での一粒子励起 (粒子数を保存する場合)。

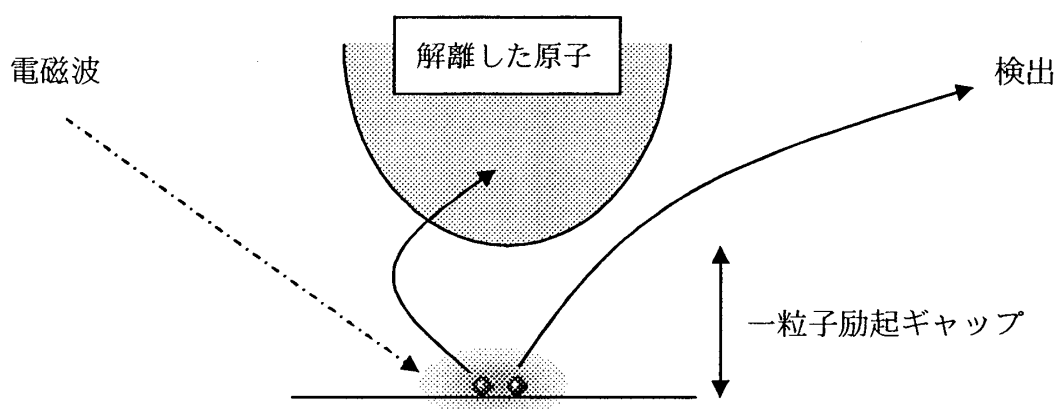


図7. 4 : rf トンネルスペクトルの模式図

このようなクーバー対の解離に伴う励起は、rf-tunneling current spectroscopy と呼ばれる実験により観測することができます。これはラジオ波の電磁波をあてることで、クーバー対中の1原子をクーバー対に関与しない「第3の状態」に遷移させ、分子を解離させる、というものです。この解離によって残された1個の原子は凝縮状態にすることはできず、フェルミ原子のバンドに励起されなくてはなりません。したがって、これは光のエネルギーがギャップよりも大きい場合におこり、出てくる「第3の状態」の量（スペクトル強度）を観測することで、ギャップの大きさを検出することができます。ここで考えている一様系の超流動状態では、一粒子励起スペクトルのギャップは E_g が直接観測できることになります。

ただし、実際の原子ガス超流動は光学ポテンシャル内に捕獲されているため、系は一様ではなく、その効果を加味する必要があります。これについては10章で触れることにします。

ここまで度々、フェルミ粒子超流動＝分子ボソンのBEC、という関連付けで議論してきましたが、ここで考えたクーバー対の解離にともなう励起は、ボソン原子のBECには存在しません。それは、原子の解離は通常あり得ないからです（核反応を考えれば別ですが）。ここで述べたボゴロンの励起は、「個々」の分子の分解、という意味で1粒子励起と呼ばれますが、ボソン原子の超流動状態では、これとは別に、系全体の励起＝集団励起が存在し、言い方を変えると、この集団励起「しか」存在しません。他方、集団励起はフェルミ原子ガスの超流動にも存在し、結果、フェルミ原子ガス超流動では2種類の励起が存在することになります。これはフェルミ系超流動とボソン原子の超流動の大きな違いで、それはフェルミ系超流動場合の「ボソン」が、

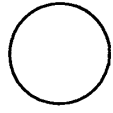
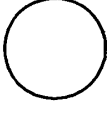
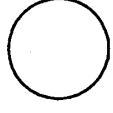
	一粒子励起	集団励起
ボソン原子 超流動		
フェルミ原子 超流動		

表 7. 1 : フェルミ粒子系超流動とボーズ粒子系の違い

「有限な結合エネルギーを有する分子」であることに因るものです。

原子ボソンの超流動での励起がどのようなものか、簡単に復習しておきましょう。
弱く相互作用しているボソンモデル：

$$H = \sum_q \left(\frac{q^2}{2m} - \mu \right) b_q^\dagger b_q + U \sum_{p, p', q} b_{p+q}^\dagger b_{p'-q}^\dagger b_p b_{p'}, \quad (7.23)$$

に対し、

$$b_0 \rightarrow \langle b_0 \rangle = \sqrt{n_0}, \quad (7.24)$$

として凝縮状態を記述、そこからの揺らぎを表す $b_q (q \neq 0)$ について 2 次まで残すと、

$$H = E_g + \sum_q \left(\frac{q^2}{2m} - \mu + 2Un_0 \right) b_q^\dagger b_q + \frac{Un_0}{2} \sum_p [b_p^\dagger b_{-p}^\dagger + b_{-p} b_p]. \quad (7.25)$$

ここで、

$$E_g = \frac{U}{2} n_0^2 - \mu n_0, \quad (7.26)$$

は基底状態のエネルギーを表し、化学ポテンシャルはこれを最低にるように選びます。つまり、 $\mu = U n_0$ 。これを代入して、

$$H = E_g + \sum_q \left(\frac{q^2}{2m} + U n_0 \right) b_q^\dagger b_q + \frac{U n_0}{2} \sum_p [b_p^\dagger b_{-p}^\dagger + b_{-p} b_p]. \quad (7.27)$$

これは、先のBCS理論の平均場ハミルトニアンと似た形をしています。この対角化は次のBogoliubov変換：

$$b_q = u_p \beta_p - v_p \beta_p^\dagger, \quad (7.28)$$

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p + U n_0}{E_p} + 1 \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_p + U n_0}{E_p} - 1 \right), \quad (7.29)$$

によって行うことができ、結果は定数項を除いて、

$$H = \sum_q E_q \beta_q^\dagger \beta_q. \quad (7.30)$$

ここで、 β はボーズ演算子で、固有エネルギーは

$$E_q = \sqrt{\varepsilon_q (\varepsilon_q + 2U n_0)}. \quad (7.31)$$

この励起はボゴロンとは異なりギャップがなく、長波長極限で音波的分散 (Bogoliubov phonon) を有します：

$$E_q = \sqrt{\frac{U n_0}{m}} q = v_\phi q. \quad (7.32)$$

この励起は、より一般的にはゴールドストーンモードと呼ばれ、超流動がゲージ対称性という連続対称性の破れを伴っていることの表れです。超流動の秩序パラメータをここでは実数にとりましたが、波動関数の位相が任意であるように、

$$b_0 \rightarrow \langle b_0 \rangle = \sqrt{n_0} e^{i\theta}, \quad (7.33)$$

としても物理的に等価な超流動状態が無数に得られます。これらは皆エネルギー的に縮退しており、たまたまある位相の超流動状態が実現すると、ちょっと位相がずれた超

流動状態には励起エネルギー0で移ることができます。これを反映し、求まった励起エネルギーは長波長極限（つまり、位相を系全体でちょっとずらす）で0になっています。つまり、ここで求まった励起は一粒子励起ではなく、系全体が関係する集団励起です。対角化されたハミルトニアンはこれ以外の励起を含んでおらず、ボソン原子の超流動の励起は集団励起でついていることになります。

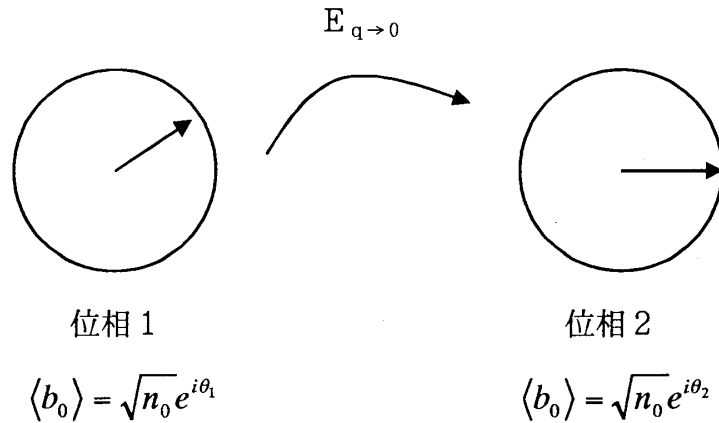


図 7. 5 : Bogoliubov phonon の長波長極限

このような、「無限に縮退した基底状態」は、フェルミ原子ガス超流動でも同様に存在します。実際、以前の議論では超流動秩序パラメータ Δ を実数にとりましたが、ちょっと位相をずらした秩序パラメータ：

$$\Delta = |\Delta| e^{i\theta}, \quad (7.34)$$

も同じ基底状態エネルギーを持ちます。ただし、この時の基底状態は、

$$|BCS\rangle = \prod (u_k + v_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ e^{i\theta}) |0\rangle. \quad (7.35)$$

これは、全体に位相因子がかかっているわけではないので、 $|BCS\rangle$ と量子力学的な意味において同じ（規格化定数を実数にとったか複素数にとったかという本質的でない違い）ではありません。この $|BCS\rangle \rightarrow |BCS'\rangle$ は励起エネルギー0で移れるので、やはり長波長極限で0となる「集団励起」が存在するはずです。

この集団励起が実際にフェルミ粒子系超流動で存在することを確かめます。秩序パラメータ Δ が波数 q の微小振動の状態にあるとすると、超流動状態では、次の量が時間変化（振動）しながら有限になると考えられます：

$$\langle \phi_q^\dagger \rangle = \langle c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger \rangle, \quad \langle \phi_q \rangle = \langle c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} \rangle, \quad (7.36)$$

これは、 Δ の式に出てきた「対」と同じ形をしています。今の場合、対の重心運動量は q になっています。このような期待値が有限になっている場合、先ほど考えた平均場近似では、 $q=0$ の Δ に加え上の期待値も残す必要があります。先ほどの平均場ハミルトニアンを H_{BCS} と書くと、新たに上の平均場が加わったハミルトニアンは

$$H = H_{BCS} - U \sum_{p,q} (\langle \phi_q^\dagger \rangle c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + \langle \phi_q \rangle c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger). \quad (7.37)$$

ここで、最後の項を摂動と捉え、もし、つじつまがあっていれば、この振動により、 Δ は最初に設定したように振動しているはず。そこで、線形応答を使って、この

摂動による $\langle \phi_q^\dagger \rangle = \langle c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger \rangle$, $\langle \phi_q \rangle = \langle c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} \rangle$ の変化を計算すると、

$$\langle \phi_q(t) \rangle = -U \int_0^\infty dt' \langle \langle \phi_q(t); \phi_q^\dagger(t') \rangle \rangle \langle \phi_q(t') \rangle - U \int_0^\infty dt' \langle \langle \phi_q(t); \phi_q(t') \rangle \rangle \langle \phi_q^\dagger(t') \rangle, \quad (7.38)$$

$$\langle \phi_q^\dagger(t) \rangle = -U \int_0^\infty dt' \langle \langle \phi_q^\dagger(t); \phi_q^\dagger(t') \rangle \rangle \langle \phi_q(t') \rangle - U \int_0^\infty dt' \langle \langle \phi_q^\dagger(t); \phi_q(t') \rangle \rangle \langle \phi_q^\dagger(t') \rangle. \quad (7.39)$$

ここで、

$$\langle \langle \phi_q(t); \phi_q^\dagger(t') \rangle \rangle = -i\theta(t-t') \langle BCS | [\phi_q(t'), \phi_q^\dagger(t')] | BCS \rangle, \quad (7.40)$$

です。今、振動周波数を Ω とするとフーリエ変換して、

$$\langle \phi_q(\Omega) \rangle = -U \langle \langle \phi_q; \phi_q^\dagger \rangle \rangle_\Omega \langle \phi_q(\Omega) \rangle - U \langle \langle \phi_q; \phi_q \rangle \rangle_\Omega \langle \phi_q^\dagger(\Omega) \rangle, \quad (7.41)$$

$$\langle \phi_q^\dagger(\Omega) \rangle = -U \langle \langle \phi_q^\dagger; \phi_q^\dagger \rangle \rangle_\Omega \langle \phi_q(\Omega) \rangle - U \langle \langle \phi_q^\dagger; \phi_q \rangle \rangle_\Omega \langle \phi_q^\dagger(\Omega) \rangle. \quad (7.42)$$

ここで、

$$\langle\langle\phi_q; \phi_q^\dagger\rangle\rangle_\Omega = \int dt \langle\langle\phi_q(t); \phi_q^\dagger(0)\rangle\rangle e^{i\Omega t}. \quad (7.43)$$

上の連立方程式が意味のある解 ($\langle\phi_q(\Omega)\rangle$ が有限) を持つための条件は、

$$0 = \begin{vmatrix} 1+U\langle\langle\phi_q; \phi_q^\dagger\rangle\rangle_\Omega & -U\langle\langle\phi_q; \phi_q\rangle\rangle_\Omega \\ -U\langle\langle\phi_q^\dagger; \phi_q^\dagger\rangle\rangle_\Omega & 1+U\langle\langle\phi_q^\dagger; \phi_q\rangle\rangle_\Omega \end{vmatrix}. \quad (7.44)$$

各行列要素は、原子の生成消滅演算子で書かれている ϕ をボゴロンの演算子で書き直し、更に、 H_{BCS} もボゴロンで対角化されたものを用いることで、通常のフェルミ粒子の場合と同じように計算できます。結果は、

$$\langle\langle\phi_q; \phi_q^\dagger\rangle\rangle_\Omega = A+B, \quad \langle\langle\phi_q^\dagger; \phi_q\rangle\rangle_\Omega = A-B, \quad \langle\langle\phi_q^\dagger; \phi_q^\dagger\rangle\rangle_\Omega = \langle\langle\phi_q; \phi_q\rangle\rangle_\Omega = C, \quad (7.45)$$

の形に書けて、

$$A = \frac{1}{2} \sum_p \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_-}{E_+ E_-} \right) \frac{E_+ + E_-}{\Omega^2 - (E_+ + E_-)^2}, \quad (7.46)$$

$$B = \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{\xi_+}{E_+} + \frac{\xi_-}{E_-} \right) \frac{\Omega}{\Omega^2 - (E_+ + E_-)^2}, \quad (7.47)$$

$$C = \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{\Delta^2}{E_+ E_-} \right) \frac{\Omega}{\Omega^2 - (E_+ + E_-)^2}. \quad (7.48)$$

ただし、 $\xi = \varepsilon \cdot \mu$ 、また、“ $\pm$ ” は、運動量について $p \pm q/2$ を略記したものです。これらを代入すると、先ほどの行列式は次のように書くことができます。

$$1 + \frac{U}{2} \Pi_{22}(q, \Omega) = \left(\frac{U}{2} \right)^2 \Pi_{12}(q, \Omega) \frac{1}{1 + \frac{U}{2} \Pi_{11}(q, \Omega)} \Pi_{21}(q, \Omega). \quad (7.49)$$

ここで、

$$\Pi_{22}(q, \Omega) = - \sum_p \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right) \frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \Omega^2}, \quad (7.50)$$

$$\Pi_{11}(q, \Omega) = - \sum_p \left(1 + \frac{\xi_+ \xi_- - \Delta^2}{E_+ E_-} \right) \frac{E_+ + E_-}{(E_+ + E_-)^2 - \Omega^2}, \quad (7.51)$$

$$\Pi_{12}(q, \Omega) = -\Pi_{21}(q, \Omega) = \sum_p \left(\frac{\xi_+}{E_+} + \frac{\xi_-}{E_-} \right) \frac{i\Omega}{(E_+ + E_-)^2 - \Omega^2}. \quad (7.52)$$

ここでは詳細は触れませんが、上の3つは超流動の揺らぎを記述する相関関数で、(2 2)は位相の揺らぎ、(1 1)は Δ の振幅の揺らぎ、(1 2)と(2 1)はこの2つの揺らぎ間の相互作用を記述する、という物理的意味があります。上の方程式において、ギャップ方程式：

$$1 = \frac{U}{2} \sum_p \frac{1}{E_p}, \quad (7.53)$$

を用いて相互作用 U を消去すると、

$$\Pi_{22}(q, \Omega) + \sum_p \frac{1}{E_p} = \Pi_{12}(q, \Omega) \frac{1}{\Pi_{11}(q, \Omega) + \sum_p \frac{1}{E_p}} \Pi_{21}(q, \Omega). \quad (7.54)$$

これが、フェルミ粒子超流動における、秩序パラメータの振動に関連した集団励起を決定する方程式です。ボソン超流動での Bogoliubov phonon に相当する音波モードを探すために $\Omega = v_\phi q$ において、 Ω 、 q について展開すると、音波速度の方程式として、

$$v_\phi = \sqrt{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{\sum_p \frac{\Delta^2}{E_p^5} \varepsilon_p + \sum_p \frac{\xi_p}{2E_p^3}}{\sum_p \frac{1}{E_p^3} + \left(\sum_p \frac{\xi_p}{E_p^3} \right)^2 / \sum_p \frac{\Delta^2}{E_p^3}}}. \quad (7.55)$$

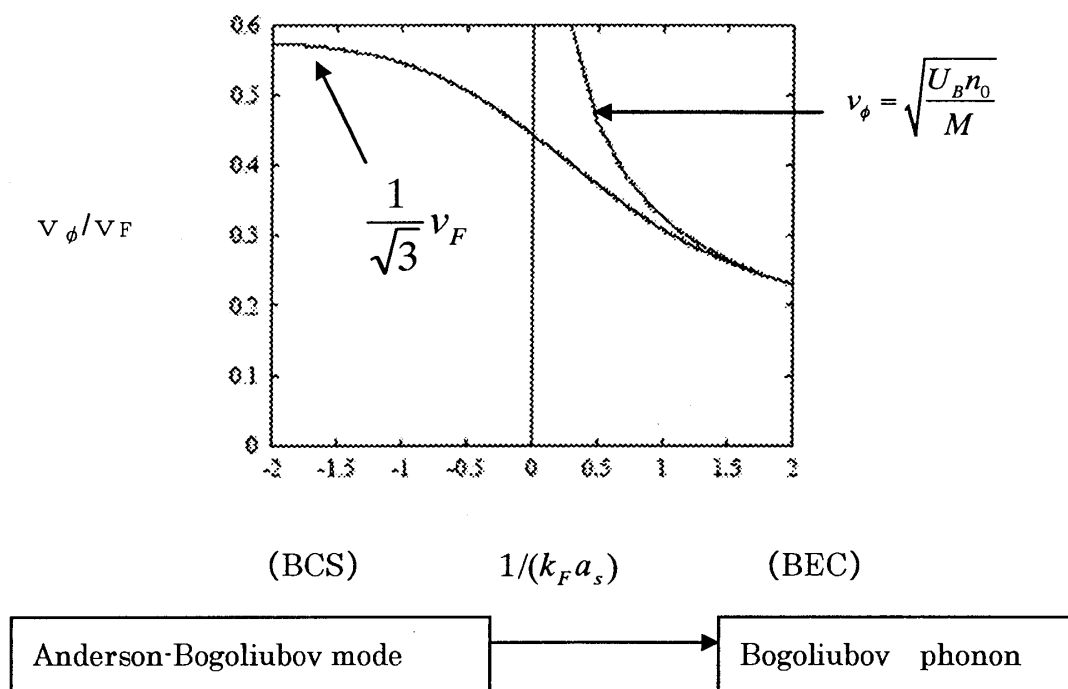


図7. 6 : ゴールドストーンモードの速度のBCS・BECクロスオーバー領域での振舞い。

これはちょっと複雑ですが、BCS、BEC 極限では評価できて、

○ BCS 領域 : $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} v_F$ Anderson-Bogoliubov mode

○ BEC 領域 : $v_\phi = \sqrt{\frac{U_B n_0}{M}}$ Bogoliubov phonon

ここで、 $M=2m$ は分子の質量、 $n_0=N/2$ は凝縮分子数、

$$U_B = \frac{4\pi(2a_s)}{M}. \quad (7.56)$$

BEC 極限での表式は、先ほど求めたボソン原子超流動のボゴリューボフフォノンの速度と同じ形をしており、対応関係から、丁度、分子間に散乱長

$$a_B = 2a_s, \quad (7.57)$$

で特徴付けられる斥力相互作用が働いていることを示しています。

「原子間相互作用は引力（それによりクーパー対が形成される）なのに分子間相互作用は斥力である」、というのはおもしろい結果ですが、この斥力相互作用はボーズ凝縮状態の安定性にとって非常に重要な意味を持っています。先ほど求めたボゾン系超流動の励起： $E_q = \sqrt{\varepsilon_q(\varepsilon_q + 2Un_0)}$ は相互作用が引力（ $U < 0$ ）の場合、長波長極限で虚数となります。この非物理的な結果はBEC状態が安定ではないことの反映で、実は引力相互作用するボゾン系では（トラップ効果が無い場合）BEC状態は存在できません。今の場合、分子間相互作用は斥力なので、そのような不安定性の問題は気にしなくて良い、ということがわかります。

強結合BEC領域での分子間相互作用の値については現在様々な議論がなされており、相互作用のより高次の補正を考慮すると $a_B = 0.6a_s$ となること、また、温度の効果を加味すると、(多体効果の影響を受けた)散乱長は温度変化をして T_c で0になること、が理論的に指摘されています。ただし、これらはいずれも分子間相互作用が斥力である、という点については一致しています。

8. フェッシュバッハ共鳴を考慮した場合の超流動状態

前章では、相互作用の起源は問わずに、引力の相互作用があるフェルミ原子ガスの超流動を議論しました。カリウム40、リチウム6で実現している超流動は、フェッシュバッハ共鳴という具体的な機構を用いており、より微視的立場で超流動を考えるにはこの機構を陽に扱う必要があります。

前章の平均場近似の方法は、フェッシュバッハ共鳴のモデルである結合フェルミオン=ボソンモデルに対しても有効です。

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - U \sum_{p,p',q} c_{p+q\uparrow}^\dagger c_{p'-q\downarrow}^\dagger c_{p'\downarrow} c_{p\uparrow} \\
 & + g \sum_{p,q} \left[b_q^\dagger c_{-p+q/2\downarrow} c_{p+q/2\uparrow} + c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger b_q \right] \\
 & + \sum_q (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) b_q^\dagger b_q.
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

ただし、今の場合、共鳴で生じた分子ボソン (b_q) が存在するので、クーパー対 Δ だけでなく、この分子のBEC秩序パラメータ ϕ_m を導入する必要があります。

$$\phi_m = \langle b_0 \rangle = \langle b_0^\dagger \rangle. \tag{8.2}$$

(秩序パラメータは実数にとりました。) すると、一見、超流動として、2種類の可能性 (「クーパー対分子のBEC」と「共鳴分子のBEC」) があるように見えますが、平衡状態で ϕ_m が時間変化しないことから厳密に得られる次の条件：

$$\begin{aligned}
 0 = \frac{\partial}{\partial t} \langle b_0 \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [b_0, H] \rangle = (2\nu - 2\mu) \phi_m + \frac{g}{U} \Delta \\
 \Rightarrow \phi_m &= -\frac{1}{2\nu - 2\mu} \frac{g}{U} \Delta,
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

から、どちらか一方が有限になれば、他方もそれに比例して有限になります。つまり、各々独立に超流動転移することはありません。

Δ 、 ϕ_m を用いて平均場近似を行うと、定数項は除いて

$$H = \sum_{p\sigma} (\varepsilon_p - \mu) c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} - \tilde{\Delta} \sum_p (c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger + c_{-p\downarrow} c_{p\uparrow}) + \sum_{q \neq 0} (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) b_q^\dagger b_q. \quad (8.4)$$

ここで、

$$\tilde{\Delta} = \Delta - g \phi_m, \quad (8.5)$$

は composite order parameter と呼ばれ、フェッシュバッハ共鳴を有するフェルミ粒子の超流動を特徴付ける秩序パラメータです。上のハミルトニアンは、フェルミ原子部分と共鳴分子部分が分離しているので別々に解くことができます。つまり、平均場近似の範囲内で基底状態の波動関数は

$$\begin{aligned} |G\rangle &= |c:BCS\rangle |b:BEC\rangle = \prod_k \left[u_k + v_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger \right] e^{\phi_m b_0^\dagger} |0\rangle \\ &\propto e^{\sum_k s_k c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger + \phi_m b_0^\dagger} |0\rangle, \end{aligned} \quad (8.6)$$

の形になります。フェルミ原子部分は前章の Bogoliubov 変換で Δ を composite order parameter で置き換えたもので対角化できて、一粒子励起として、

$$E_p = \sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}, \quad (8.7)$$

となります。つまり、BCS領域 ($\mu > 0$) のギャップはクーパー対の Δ ではなく composite order parameter で決まることになります。クーパー対を決める方程式は

$$\Delta = U \sum_p \langle BCS | c_{k\uparrow}^\dagger c_{-k\downarrow}^\dagger | BCS \rangle, \quad (8.8)$$

で、原子の生成消滅演算子をボゴロンで表記することで計算できます。ここで、 $|BCS\rangle$ は先の BCS 状態で Δ を composite order parameter で置き換えたもので与えられます。

$$\Delta = U \sum_p \frac{\tilde{\Delta}}{2E_p} = U \sum_p \frac{\tilde{\Delta}}{2\sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}. \quad (8.9)$$

先ほどの ϕ_m と Δ の関係式とこの結果を composite order parameter の定義式に代入すると

$$1 = \left(U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu} \right) \sum_p \frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}}. \quad (8.10)$$

これは、前に求めた Δ に対するギャップ方程式と同じ形をしています。 また、composite order parameter の式と、 Δ 、 ϕ_m の関係式から

$$\tilde{\Delta} = U_{\text{eff}} \sum_p \langle c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \rangle, \quad (8.11)$$

が得られ、有効相互作用：

$$U_{\text{eff}} = U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu}, \quad (8.12)$$

に対するクーパ対、という構造が得られます。 $\tilde{\Delta}$ のギャップ方程式の相互作用に相当する部分もこの相互作用が現れています。 この相互作用は、その書式からわかるように、2項目がフェッシュバッハ共鳴に因るものです。 以前の計算では、この相互作用は、

$$V = U + \frac{g^2}{2\nu}, \quad (8.13)$$

として得られ、化学ポテンシャル μ は含んでいませんでした。 それは、入射粒子について低エネルギー極限をとっていたことに因るものです。 「多フェルミ粒子系」の場合、粒子の特徴的なエネルギーは、化学ポテンシャル（自由フェルミガスではこれはフェルミエネルギーに等しい）なので、入射粒子2個分のエネルギー $= \mu \times 2$ が分母に現れています。 このようにフェッシュバッハ共鳴機構では、相互作用にも多粒子の影響（ある種の環境効果）が入っています。

閾値 2ν を下げて相互作用を強くしていくと、フェッシュバッハ共鳴が強い場合、

$$\bigcirc \quad g\sqrt{n} \gg \varepsilon_F \quad : \text{broad Feshbach resonance}$$

では、閾値がまだフェルミエネルギーよりも十分大きいところで強結合領域に入ります。その領域では $2\nu \gg 2\varepsilon_F > 2\mu$ であるため、相互作用中の化学ポテンシャル μ は無視できます。この場合、2体相互作用に対する散乱長

$$\frac{4\pi a_s}{m} = - \frac{U + \frac{g^2}{2\nu}}{1 - (U + \frac{g^2}{2\nu}) \sum_p \frac{1}{2\varepsilon}}, \quad (8.14)$$

によってギャップ方程式からカットオフ依存性を除くことができ、前章と同じ

$$1 = - \frac{4\pi a_s}{m} \sum_p \left[\frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad (8.15)$$

が得られます。また、この領域では、共鳴分子のエネルギー ($> 2\nu$) は非常に高いのでこの分子の数が少なく、粒子の方程式はこの領域で

$$N = \sum_p \left[1 - \frac{\varepsilon_p - \mu}{\sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \Delta^2}} \right]. \quad (8.16)$$

同様の理由で、composite order parameter 中の ϕ_m 成分の寄与も小さく、結果として、broad Feshbach resonance の場合は、前章で考えた single channel model で議論できる (ただし $2\nu \gg 2\mu$ の領域) ことになります。現在実験で観測されている、カリウム40、リチウム6の超流動は、いずれも broad Feshbach resonance の領域にあり、BCS-BEC クロスオーバーの議論に対しては、フェッシュバッハ共鳴分子を無視し、相互作用を単に「可変なパラメータ」として用いる single-channel model が良い近似であると考えられます。ただし、broad Feshbach resonance でも、閾値 2ν が十分低くなると共鳴分子が発生するので、その影響をきちんと考慮した結合フェルミオン=ボソンモデルで考える必要があります。

これに対し、フェッシュバッハ共鳴が弱い場合、

○ $g\sqrt{n} \leq \varepsilon_F$: narrow Feshbach resonance

この時は、相互作用が強くなるのは $2\nu \sim 2\varepsilon_F \sim 2\mu$ であるため、相互作用中の化学ポテンシャルが無視できません。この場合、相互作用の形が2粒子系のそれと異なっ

ているため、今までのように2体の散乱長でカットオフの影響を除去することができません。この場合は、「一般化された散乱長」

$$\frac{4\pi a_s}{m} = -\frac{U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu}}{1 - (U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu}) \sum_p \frac{1}{2\varepsilon}}, \quad (8.17)$$

によって、形式上、カットオフの影響が除去できます。この場合は、クロスオーバー領域で共鳴分子のエネルギーが低い ($\sim 2\nu \sim 2\varepsilon_F$) ため、粒子数の方程式に共鳴分子の凝縮体からの寄与が加わり、

$$N = 2|\phi_m|^2 + \sum_p \left[1 - \frac{\varepsilon_p - \mu}{\sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right], \quad (8.18)$$

としなくてはなりません。 ($|\phi_m|^2$ は BEC 状態にある共鳴分子数であることに注意してください。) 尚、引力の場合は、 $2\nu \cdot 2\mu > 0$ なので、共鳴分子の励起スペクトル：

$$H_B = \sum_q (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) b_q^\dagger b_q, \quad (8.19)$$

は正となり、 $T=0$ を考えている今の場合は、有限な q の分子数を考慮する必要はありません。

以上より、結合フェルミオン=ボソンモデルでの超流動基底状態は、composite order parameter と μ を次の方程式で決定すれば良いことが分かります (エネルギーはフェルミエネルギー、粒子数は全フェルミ原子数でスケール)：

$$\frac{1}{k_F a_s} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} - \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad (8.20)$$

$$1 = 2\phi_m^2 + \frac{3}{4} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \tilde{\Delta}^2}} \right]. \quad (8.21)$$

結合フェルミオン=ボソンモデルで、閾値 2ν を下げて相互作用を強くしていく場合、 $2\nu = 2\mu$ に達すると相互作用が発散してしまうように見えます。しかし、実際は、図 8.1 が示すように、 2ν を下げるにしたがって化学ポテンシャルも下がり、結果、 $2\nu \rightarrow \infty$ まで引力相互作用です。この閾値が深い極限で $2\nu \cdot 2\mu \rightarrow +0$ となり引力は最大になります。つまり、強結合 BEC 極限は2体相互作用における共鳴点 ($2\nu = 0$) ではなく、

$\nu \rightarrow \infty$ です。また、この BEC 極限で得られる「 $2\nu = 2\mu$ 」という結果は、 $2\nu < 0$ がフェルミ原子のバンドの底から測った共鳴分子の（静止）エネルギーであることから、共鳴分子の束縛エネルギーと考えられ、「BEC 領域では 化学ポテンシャル（ $\times 2$ ）が束縛エネルギーに等しい」という single channel model の結果に対応するものです。更に別の見方をすると、 $2\nu =$ （共鳴分子のバンドの底のエネルギー）、 $2\mu =$ （共鳴分子の化学ポテンシャル）、であることから、「共鳴分子の化学ポテンシャルがバンドの底にはりついている」という、通常の BEC の条件になっている、と理解することもできます。 $2\nu < 0$ では、共鳴分子のエネルギーが非常に低く、ほとんど全ての原子がフェッシュバッハ共鳴による分子（これは ϕ_m で記述され、 Δ で記述されるクーパー対分子とは別物です）になっているはずで、結果、この領域の BEC は、この共鳴分子のボーズ凝縮で記述されることになります。

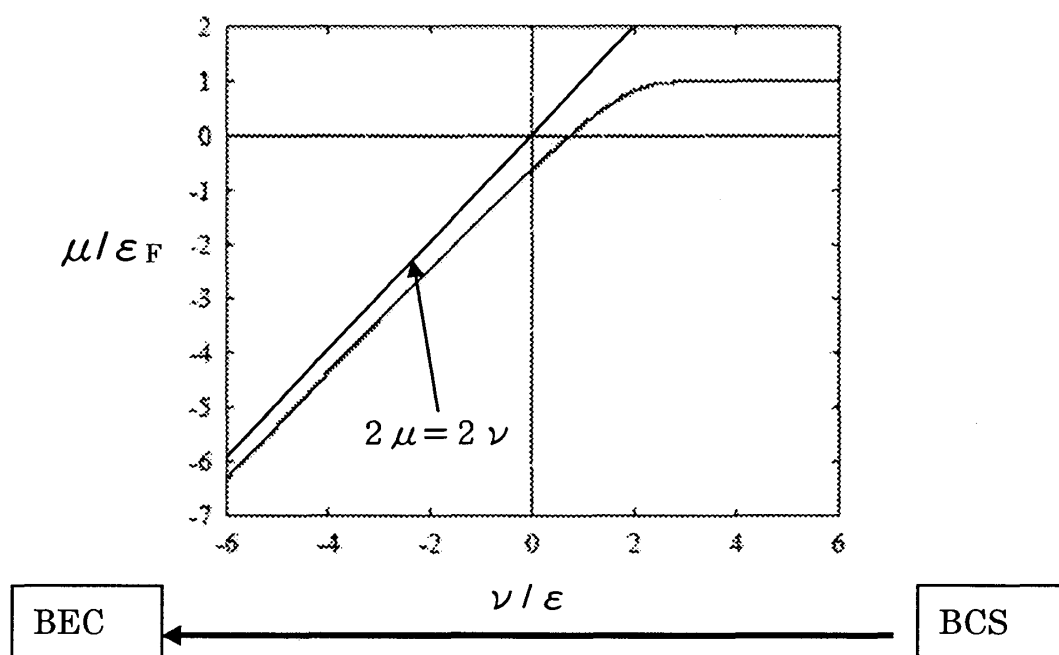
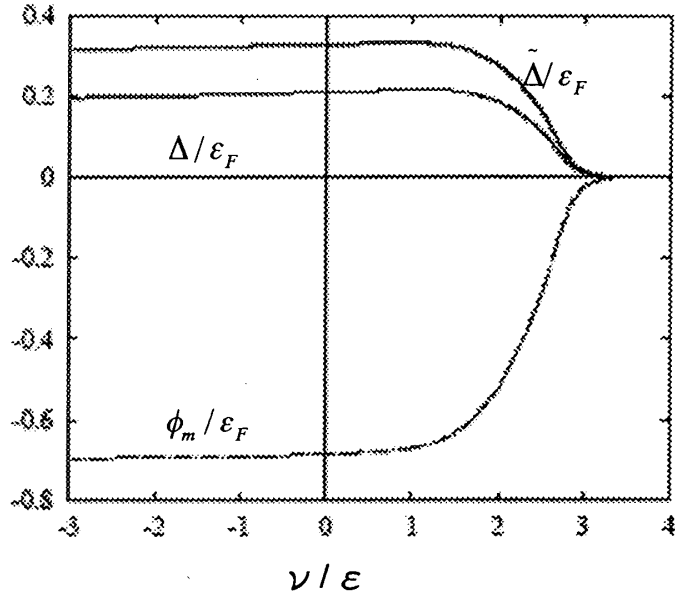


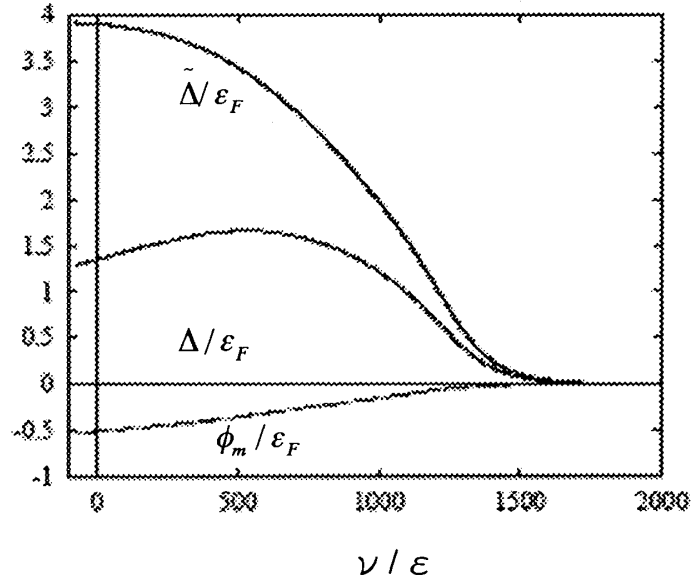
図 8. 1 : narrow Feshbach resonance の場合の化学ポテンシャル

の ν 依存性 ($Un=0.1\epsilon_F$, $g\sqrt{n}=0.5\epsilon_F$, カットオフ= $10\epsilon_F$)。 閾値 2ν の低下とともに化学ポテンシャルも下がるが、両者の差は常に正であることに注意。



(a) narrow Feshbach resonance

$$(Un = 0.02\varepsilon_F, g\sqrt{n} = 0.17\varepsilon_F)$$



(b) broad Feshbach resonance

$$(Un = 0.02\varepsilon_F, g\sqrt{n} = 5\varepsilon_F)$$

図8．2：フェッシュバッハ共鳴を考慮した場合のBCS-BECクロスオーバー領域での秩序パラメータの振る舞い

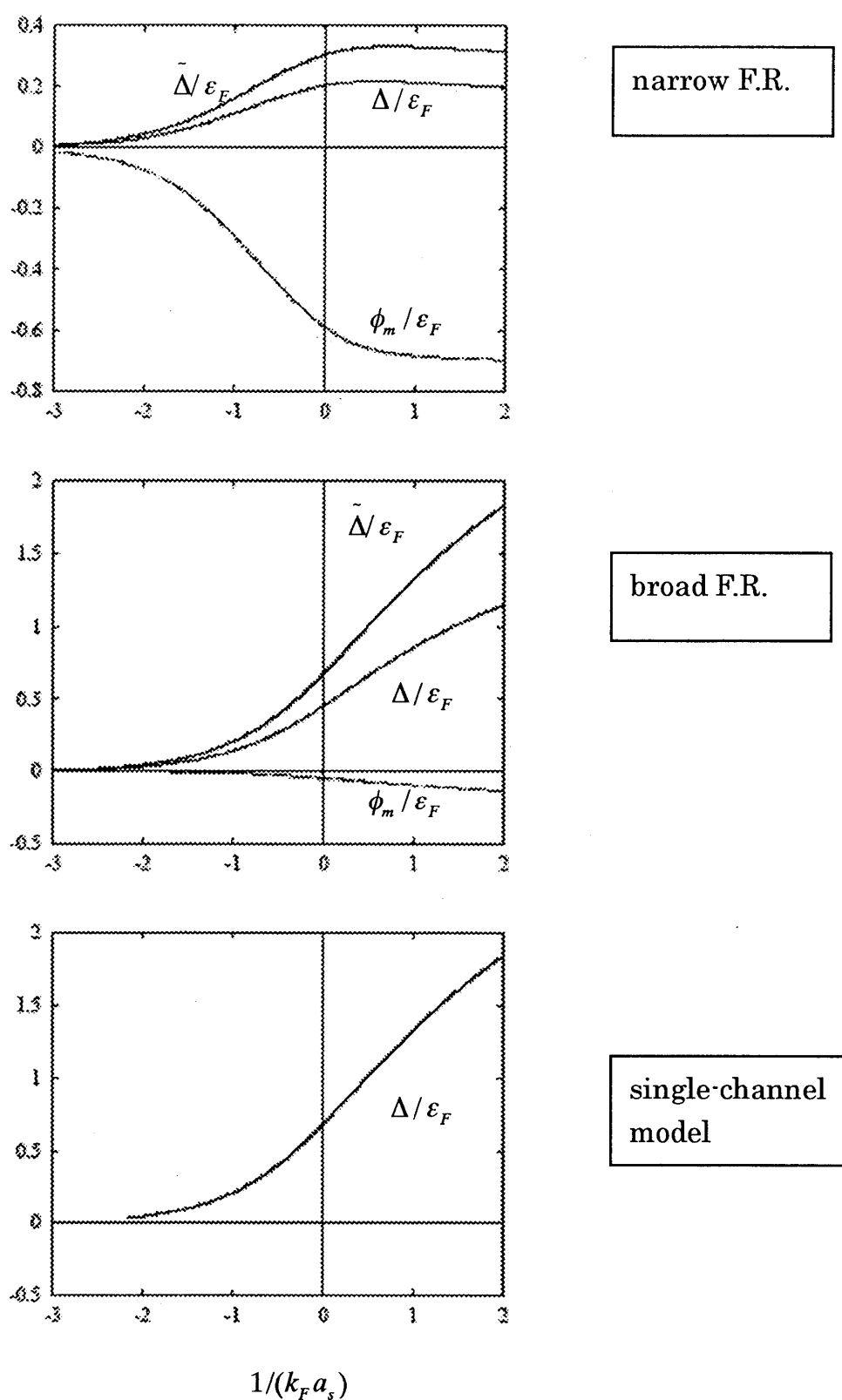


図 8. 3 : 図 8. 2 の結果を散乱長で整理したもの。 一番下の図は BCS モデルでの結果

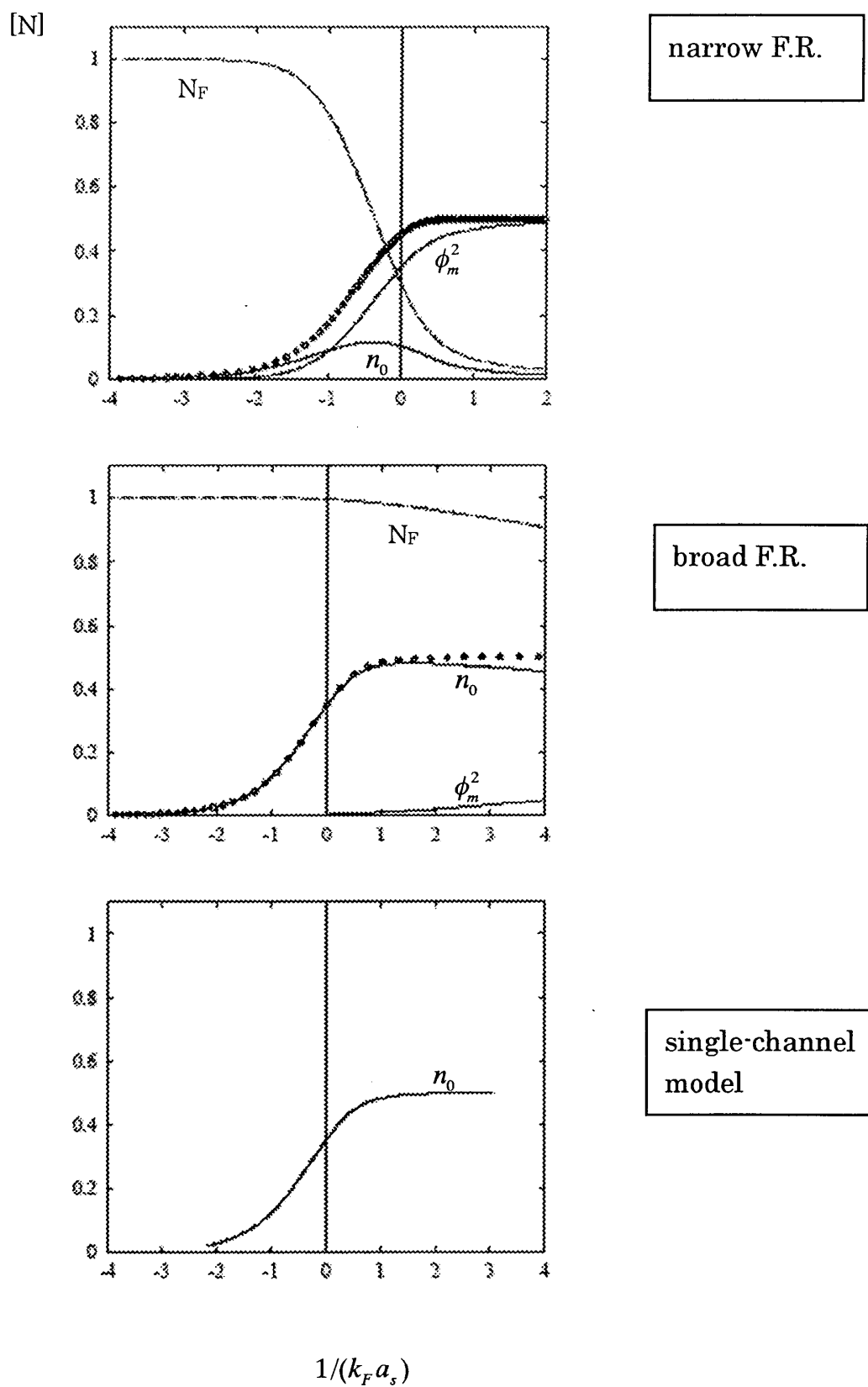


図 8. 4 : 凝縮粒子数 (点は全凝縮分子数=クーパー対+フェッシュバッハ分子)。 N_F は open channel の原子数。

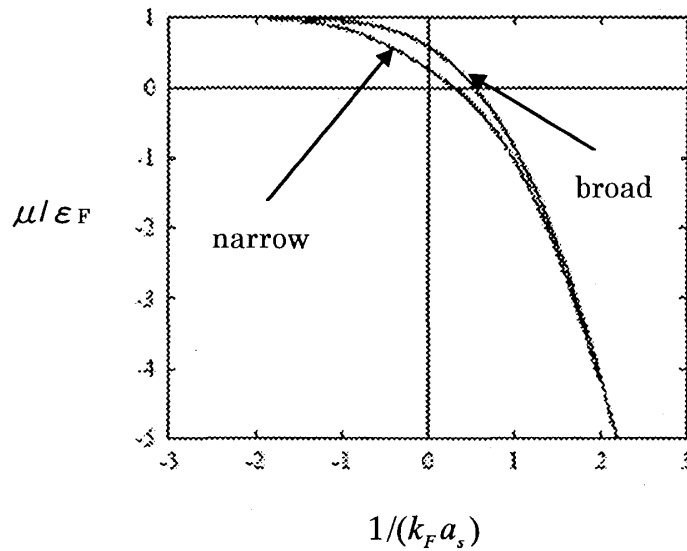


図8. 5：化学ポテンシャル

broad Feshbach resonance と single-channel model は、相互作用を散乱長でスケールすると両者ほとんど同じ結果を与えています。また、narrow Feshbach resonance の場合も、「一般化された散乱長」を用いると、化学ポテンシャルや凝縮ボソン数の総和 ($n_0 + \phi_m^2$) は broad Feshbach resonance との差異はほとんどありません。composite order parameter の値も、BCS 領域から $1/(k_F a_s) = 0$ (unitarity limit) あたりまでは両者ほとんど同じです。ただし、BEC 極限は

$$\tilde{\Delta} = \Delta - g\phi_m \sim -g\phi_m = -g\sqrt{\frac{N}{2}}, \quad (8.22)$$

となるため、 g の大きさに依存することになります。このように、(一般化された) 散乱長を用いると、凝縮分子の詳細に依存しない物理量 (つまり、分子がクーパー対であるか、共鳴分子であるか) については、Feshbach resonance の「幅」に依存しない議論が可能になります。

9. 有限温度におけるフェルミ超流動と転移温度

平均場近似したフェルミ系超流動の Hamiltonian を Bogoliubov 変換で対角化する方法は、平均場期待値の意味を

$$\langle A \rangle = \langle BCS | A | BCS \rangle \rightarrow \frac{1}{Z} \text{tr} [e^{-\beta H} A], \quad (9.1)$$

と変更するだけで、そのまま有限温度に拡張することができます。ここで、 Z は分配関数、 H は平均場近似のハミルトニアンです。上の計算は、演算子をボゴロンで書き直せば、あとは通常の自由フェルミガスと同じように計算することができます。この時、Bogoliubov 変換の (u, v) 中に現れる、秩序パラメータ Δ は温度 T での値になります。この Δ は

$$\Delta = U \sum_p \langle c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \rangle = U \sum_p \langle (u_p \alpha_{p\uparrow}^\dagger + v_p \alpha_{-p\downarrow}^\dagger)(-v_p \alpha_{p\uparrow} + u_p \alpha_{-p\downarrow}^\dagger) \rangle. \quad (9.2)$$

ここで、 H がボゴロンで対角化されていることに注意すると、

$$\langle \alpha_p^\dagger \alpha_p \rangle = f(E_p), \quad \langle \alpha_p \alpha_p^\dagger \rangle = 1 - f(E_p), \quad \langle \alpha_p^\dagger \alpha_p^\dagger \rangle = \langle \alpha_p \alpha_p \rangle = 0. \quad (9.3)$$

よって、

$$\Delta = U \sum_p \langle c_{p\uparrow}^\dagger c_{-p\downarrow}^\dagger \rangle = U \sum_p u_p v_p [1 - 2f(E_p)] = U \sum_p \frac{\Delta}{2E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2}. \quad (9.4)$$

両辺 Δ で割ると温度 T におけるギャップ方程式が得られます：

$$1 = U \sum_p \frac{1}{2E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2}. \quad (9.5)$$

温度 $T=0$ とすると、以前の結果を再現することに注意しましょう。カットオフの除去も $T=0$ の場合と全く同様にできて、

$$\frac{1}{k_F a_s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{2E} \tanh \frac{\beta E}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} \right]. \quad (9.6)$$

超流動の転移温度 T_c は、この式でギャップ Δ が 0 になる温度として決定されます：

$$\frac{1}{k_F a_s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{2(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{\beta(\varepsilon - \mu)}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} \right]. \quad (9.7)$$

弱結合 BCS 領域の場合、 T_c はフェルミエネルギーに比べ十分低く、化学ポテンシャルもフェルミエネルギー ε_F に等しいとして良いでしょう。この場合、上の方程式を解いて T_c を求めると、

$$T_c = \frac{8\gamma}{\pi e^2} \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}} = 0.61 \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}. \quad (9.8)$$

ここで $\gamma = 1.78$ です。これと $T=0$ での Δ

$$\Delta(T=0) = \frac{8}{e^2} \varepsilon_F e^{\frac{\pi}{2k_F a_s}}, \quad (9.9)$$

との比： $2\Delta/T_c = \pi/\gamma = 3.54$ は BCS 理論における普遍定数と呼ばれ、物質の詳細に依らず、多くの(弱結合)超伝導で成り立っている関係です。「 T_c が Δ 程度である」、ということは、BCS 領域の超流動転移が分子の解離(結合エネルギー Δ)で決まっていることを示しています。

相互作用を強くして強結合 BEC 領域に入ると、化学ポテンシャル μ はフェルミエネルギーから大きくずれ、 $T=0$ での結果の類推から、大きな負の値を取ると期待されます。実際、 $T=0$ での結果、

$$\mu = -\frac{1}{2ma_s^2}, \quad (9.10)$$

を T_c の方程式に代入すると $1/(k_F a_s) \rightarrow \infty$ の極限で解となっていることが分かります。この値は強結合領域での分子ボソンの結合エネルギーでしたから、超流動転移温度であっても化学ポテンシャルが $\mu = 1/2ma_s^2$ で与えられる、ということは、BEC 領域では T_c でも分子は解離しておらず、「分子ボソンガス」のままであることを示しています。したがって、この領域での転移温度は質量 $M=2m$ の $N/2$ 個の分子ボソンの BEC 転移温度で与えられ、

$$T_c = \frac{2\pi}{(\zeta(3/2))^{2/3}} \frac{(n/2)^{2/3}}{(2m)} = 0.218\varepsilon_F, \quad (9.11)$$

になると期待されます。BEC 領域ではギャップ方程式が化学ポテンシャルを与えたので、この結果は粒子数の方程式から得られるはずですが、平均場近似での粒子数の式を有限温度に拡張したもの：

$$N = \sum_{p\sigma} \langle c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma} \rangle = \sum_p \left[1 - \frac{\xi_p}{E_p} \tanh \frac{\beta E_p}{2} \right], \quad (9.12)$$

は、転移温度 ($\Delta = 0$) で自由フェルミガスの粒子数の式

$$N = 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu), \quad (9.13)$$

に帰着してしまい、 $\mu = -1/2ma_s^2$ を代入しても期待される T_c は得られません。これは平均場近似での粒子数の方程式が、有限温度における BCS-BEC クロスオーバーを記述するには不十分であることを示しています。なんらかの意味で、「分子化している」という情報が入る必要がありますが、自由フェルミ原子の粒子数の式に帰着してしまったのでは、この点が明らかに欠落しています。

この問題は、平均場近似を超え、クーパ対の「揺らぎ」を考慮することで解決されます (Nozieres、Schmitt-Rink の理論)。これを具体的に見るためには多少準備が必要になります。まず、熱力学的ポテンシャル Ω と粒子の関係式に着目します：

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}. \quad (9.14)$$

ここで Ω は熱力学ポテンシャルで分配関数 Z と次式でつながっています。

$$\Omega = -T \log Z. \quad (9.15)$$

今、BCS モデルにおいて、ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H = H_0 + H_1 : \quad H_0 &= \sum_{p\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma}, \\ H_1 &= -U \sum_{p,p',q} c_{p+q/2\uparrow}^\dagger c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger c_{-p'+q/2\downarrow} c_{p'+q/2\uparrow}, \end{aligned} \quad (9.16)$$

と分割し、相互作用部分について摂動展開します。

$$e^{-\beta H} = e^{-\beta H_0} R(\beta), \quad (9.17)$$

とおくと、両辺を β で微分した方程式から $R(\beta)$ が次のように求まります：

$$R(\beta) = T_\tau \left[e^{\int_0^\beta d\tau H_1(\tau)} \right]. \quad (9.18)$$

ここで、

$$H_1(\tau) = e^{\tau H_0} H_1 e^{-\tau H_0}. \quad (9.19)$$

また、 T_τ は時間順序演算子と呼ばれ、生成消滅演算子の統計性（フェルミ粒子であれば入れ替えに対しマイナスが生じる）を考慮しつつ、「時間 τ 」が大きいものを左にもって来る操作を表します。例えば：

$$T_\tau [c(\tau_1) c^\dagger(\tau_2)] = \begin{cases} c(\tau_1) c^\dagger(\tau_2) & \tau_1 \geq \tau_2 \\ \pm c^\dagger(\tau_2) c(\tau_1) & \tau_1 \leq \tau_2 \end{cases}. \quad (9.20)$$

プラスはボーズ統計、マイナスはフェルミ統計の場合です。 $R(\beta)$ は、ボルツマン因子における相互作用の効果を表しており、これを用いて Ω を書くと、

$$\Omega = -T \log [tr(e^{-\beta H_0} R(\beta))] = \Omega_0 - T \log \left[\frac{tr(e^{-\beta H_0} R(\beta))}{Z_0} \right] = \Omega_0 - T \log \langle R(\beta) \rangle_0. \quad (9.21)$$

最後の式の一項目は自由粒子の熱力学的ポテンシャルで、上で与えた Ω の式で、 Z 中の H を H_0 で置き換えたもので与えられます。この項は容易に計算できて、

$$\Omega_0 = -T \log \left[tr \left(e^{-\beta \sum_{p\sigma} \xi_p c_{p\sigma}^\dagger c_{p\sigma}} \right) \right] = -2T \sum_p \log(1 + e^{-\beta \epsilon_p}). \quad (9.22)$$

よって、この項からは自由フェルミガスにおける粒子数の方程式が得られます：

$$-\frac{\partial \Omega_0}{\partial \mu} = 2 \sum_p f(\xi_p) = N_{F0}. \quad (9.23)$$

Ω の式の2項目は自由フェルミガスにおける $R(\beta)$ の期待値を表し、相互作用による補正を与えています。この部分は次のように書き直すことができます（導出は統計力学の教科書に出ているので参考にして下さい）：

$$\delta\Omega = -T \log \langle R(\beta) \rangle_0 = -T [\langle R(\beta) \rangle_c - 1]. \quad (9.24)$$

ここで、 $\langle \dots \rangle_c$ は期待値 ($\langle R(\beta) \rangle_0$) を評価する際、ダイアグラムで表現した場合に「つながったグラフ (connected diagram)」で表されるもののみを考慮することを意味しています。その意味の詳細はすぐ後で説明するとして、上の書き換えから、相互作用の影響を含んだ粒子数の方程式は、

$$N = 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu) + T \frac{\partial}{\partial \mu} \langle R(\beta) \rangle_c = N_{F0} + T \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\langle T_\tau \left[\left(-\int_0^\beta d\tau H_1(\tau) \right)^n \right] \right\rangle_c. \quad (9.25)$$

最低次の $n=1$ を考えると、期待値部分を $\delta\Omega_1$ と書いて、

$$\delta\Omega_1 = U \sum_{p,p',q} \int_0^\beta d\tau \left\langle T_\tau \left\{ c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p'+q/2\downarrow}(\tau) c_{p'+q/2\uparrow}(\tau) \right\} \right\rangle_c. \quad (9.26)$$

ここで、 $\tau_+ = \tau + \delta$ ($\delta > 0$) は、生成演算子が散乱「後」の状態を表すことから、 τ より無限小だけ後の時間にとることを表現しています。この期待値の計算には、Wick の定理を使用するのが便利です。この定理は、上の期待値を可能な「2つの演算子の期待値」の積に分解できる、というもので、今の場合は、

$$\begin{aligned} & \sum_{p,p',q} \left\langle T_\tau \left\{ c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p'+q/2\downarrow}(\tau) c_{p'+q/2\uparrow}(\tau) \right\} \right\rangle \\ &= \sum_{p,p',q} \left\langle T_\tau \left\{ c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) \right\} \right\rangle_0 \left\langle T_\tau \left\{ c_{-p'+q/2\downarrow}(\tau) c_{p'+q/2\uparrow}(\tau) \right\} \right\rangle_0 \\ &\quad - \sum_{p,p',q} \left\langle T_\tau \left\{ c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p'+q/2\downarrow}(\tau) \right\} \right\rangle_0 \left\langle T_\tau \left\{ c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) c_{p'+q/2\uparrow}(\tau) \right\} \right\rangle_0 \\ &\quad + \sum_{p,p',q} \left\langle T_\tau \left\{ c_{p'+q/2\uparrow}(\tau) c_{p+q/2\uparrow}^\dagger(\tau_+) \right\} \right\rangle_0 \left\langle T_\tau \left\{ c_{-p+q/2\downarrow}^\dagger(\tau_+) c_{-p'+q/2\downarrow}(\tau) \right\} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (9.27)$$

3行目のマイナスは、この順序に演算子を並べ換える際のフェルミ演算子の反交換性に因るものです。ただし、上の式では時間順序演算子がついていても、2、3行目の期待値はスピンを保存していないので0になり、最終項のみ残ります。また、最終項も運動量が保存される場合 ($p=p'$) のみ残ります。ここで、1粒子フェルミ温度グリーン関数、

$$G_{p\sigma}(\tau - \tau') = -\left\langle T_\tau \left\{ c_{p\sigma}(\tau) c_{p\sigma}^\dagger(\tau') \right\} \right\rangle_0, \quad (9.28)$$

を導入すると、

$$\delta\Omega_1 = U \sum_{p,q} \int_0^\beta d\tau G_{p+q/2\uparrow}(\tau - \tau_+) G_{-p+q/2\downarrow}(\tau - \tau_+). \quad (9.29)$$

フェルミグリーン関数は $\tau > 0$ とすると、具体的に計算するとわかるように、

$$G_{p\sigma}(\tau) = -e^{-\tau\xi_p} (1 - f(\xi_p)), \quad (9.30)$$

となります。 フーリエ変換は、 $G(\tau + \beta) = -G(\tau)$ という「反周期性」に注意すると、フェルミオン松原周波数と呼ばれる離散的な周波数：

$$\omega_n = \pi T(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.31)$$

のみで値を持ち、各々の周波数で、

$$G_{p\sigma}(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G_{p\sigma}(\tau) = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p}, \quad (9.32)$$

となります。 この結果を用いると、

$$\delta\Omega_1 = U \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \frac{1}{\beta} \sum_{p, \omega_n} G_{p+q/2\uparrow}(i\omega_n + i\nu_n) G_{-p+q/2\downarrow}(-i\omega_n) = U \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \Pi(q, i\nu_n). \quad (9.33)$$

ここで、

$$\nu_n = \pi T 2n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.34)$$

はボソン松原周波数と呼ばれ、自由ボーズ粒子系の1粒子ボソン温度グリーン関数

$$D_p(\tau - \tau') = -\left\langle T_\tau \left\{ b_p(\tau) b_p^\dagger(\tau') \right\} \right\rangle_0, \quad (9.35)$$

のフーリエ変換した表式中に現れます：

$$D_p(iv_n) = \int_0^\beta d\tau e^{iv_n \tau} D_p(\tau) = \frac{1}{iv_n - \xi_p}. \quad (9.36)$$

Π の計算は、松原周波数の和に対する標準的な方法により計算できます。 先ず、次の恒等式を利用して、フェルミオン松原周波数の和を複素積分に変換します：

$$\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} A(i\omega_n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dz f(z) A(z). \quad (9.37)$$

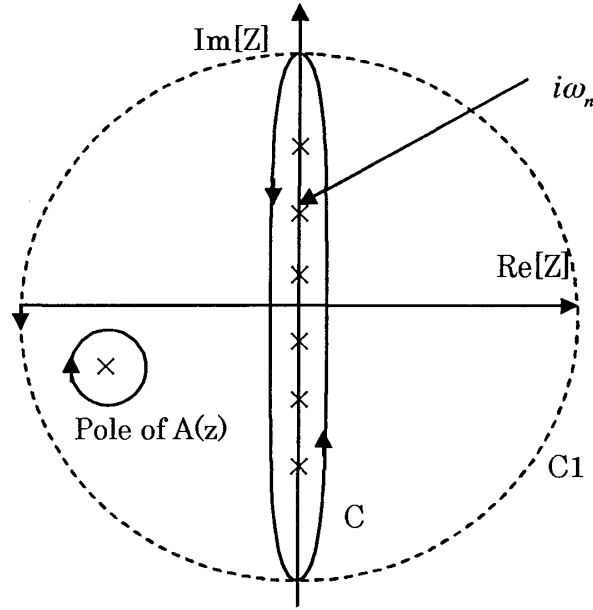


図9. 1：松原周波数の和の計算

$$\Pi(q, iv_n) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_p \int_C dz f(z) \frac{1}{z + iv_n - \xi_{p+q/2}} \frac{1}{-z - \xi_{-p+q/2}}. \quad (9.38)$$

積分経路を $C1$ に変形すると、 $C1$ の半径を十分大きくとった際にその寄与が無くなれば、積分は $A(z)$ の留数で決まることになります。 今の場合、極は

$z = \xi_{p+q/2} - iv_n, -\xi_{-p+q/2}$ にあるので、これらを拾うと、

$$\Pi(q, iv_n) = -\sum_p \frac{1 - f(\xi_{p+q/2}) - f(\xi_{p-q/2})}{iv_n - \xi_{p+q/2} - \xi_{p-q/2}}. \quad (9.39)$$

次に、摂動展開の2次項を考えます。先と同様に分解すると、残る項として次の2種類があることがわかります。

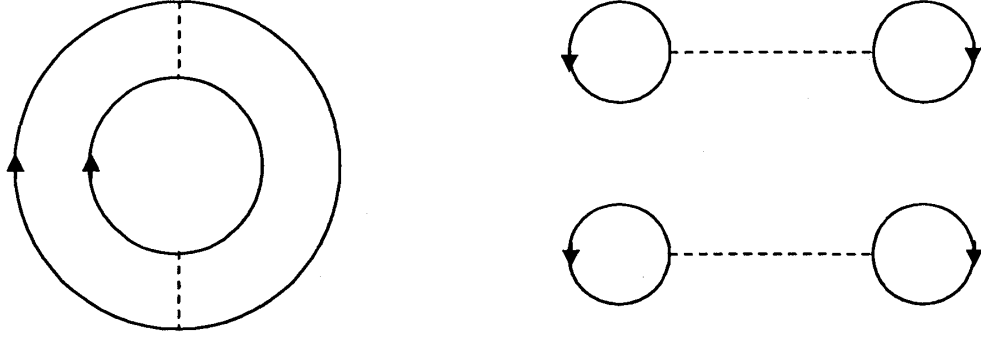


図9.2: Ω に対する2次の補正。右の図は考慮しなくて良い。

この図で、破線は相互作用 U 、実線は G を表します。例えば、左の図の外側の円は

$$G(\tau_1 - \tau_2)G(\tau_2 - \tau_1), \quad (9.40)$$

という過程を表現しています。左の図と右の図の違いは、右図の場合、2つの部分がつながっていない、という点で、先ほどの $\langle \dots \rangle_c$ は、左図のような「つながった過程 (connected graph)」のみ考慮することを表します。後は1次の計算と同じで、結果は

$$\delta\Omega_2 = \frac{U^2}{2} \sum_{q, \nu_n} \Pi(q, i\nu_n)^2. \quad (9.41)$$

同様の計算を高次項に対しても実行しますが、高次になると、考慮しなくてはならない過程が非常に多くなり、厳密に実行することが困難になります。そこで、上の左図のようなタイプの寄与のみを拾うと、

$$\delta\Omega = \underbrace{\text{Diagram 1}}_U + \underbrace{\text{Diagram 2}}_{U^2} + \underbrace{\text{Diagram 3}}_{U^3} + \dots \quad (9.42)$$

$$N = N_{F0} + T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \sum_{n=1} \frac{1}{n} \Pi(q, i\nu_n)^2 = N_{F0} - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \log[1 - U \Pi(q, i\nu_n)]. \quad (9.43)$$

または、散乱長で表現すると、

$$N = N_{F0} - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \log \left[1 + \frac{4\pi a_s}{m} \left[\Pi(q, i\nu_n) - \sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \right]. \quad (9.44)$$

弱結合 BCS 領域を考えると、相互作用 U は弱いので、今考えた補正項の効果も弱いと考えられます。結果、この領域では、平均場近似での粒子数の表式が正当化され、十分低温であれば、 $\mu = \varepsilon_F$ が得られます。補正項はグラフの構造を見る限り、確かに「2つの粒子が対を作っている」様子を表現しているようですが、これを確かめるために、強結合 BEC 極限 ($\mu = -1/2 m a_s^2 \rightarrow -\infty$) を考え、対数の中身を $q=0$ 、 $\nu_n=0$ のまわりで展開します。この領域では $\xi \gg 0$ よりフェルミ分布関数が0とおけることに注意すると、

$$N = N_{F0} - T \sum_{q, \nu_n} \frac{1}{i\nu_n - \frac{q^2}{2(2m)} + \mu_B} e^{i\delta\nu_n}. \quad (9.45)$$

ここで、

$$\mu_B = \frac{m}{4\pi a_s} \left[\sqrt{2m a_s^2 |\mu|} - 1 \right]. \quad (9.46)$$

粒子数の方程式の2項目は質量 $M=2m$ のボソン1粒子温度グリーン関数 ($D(i\nu_n)$) と同じ構造をしており、逆フーリエ変換によって、

$$N = N_{F0} + \sum_q \langle b_q^\dagger b_q \rangle = N_{F0} + 2 \sum_q n_B \left(\frac{q^2}{2M} - \mu_B \right). \quad (9.47)$$

BEC 領域では、解離したフェルミ原子からの寄与はほとんどないので、

$$N(BEC) = 2 \sum_q n_B \left(\frac{q^2}{2M} - \mu_B \right), \quad (9.48)$$

となり、補正項によって、「($M=2m$ の分子ボソンの粒子数) $\times 2$ = 全粒子数」という

BEC で期待される結果が得られました。 また、BEC 極限での化学ポテンシャル $\mu = -1/2ma_s^2$ を代入すると、 $\mu_B = 0$ が得られますが、これは、ボーズガスの BEC の T_c の結果（ボソンの化学ポテンシャルがバンドの底に張り付く）に一致しています。

以上より、超流動転移温度の BCS–BEC クロスオーバーを記述する方程式は、

$$\frac{1}{k_F a_s} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \left[\frac{1}{2(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{\beta(\varepsilon - \mu)}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} \right], \quad (9.49)$$

$$N = N_{F0} - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta \nu_n} \log \left[1 + \frac{4\pi a_s}{m} \left[\Pi(q, i\nu_n) - \sum_p \frac{1}{2\varepsilon_p} \right] \right]. \quad (9.50)$$

平均場近似を越えたこの理論は、クーバー対の揺らぎを「ガウス近似」の範囲で考慮したものであることが、汎関数理論から分かっています。

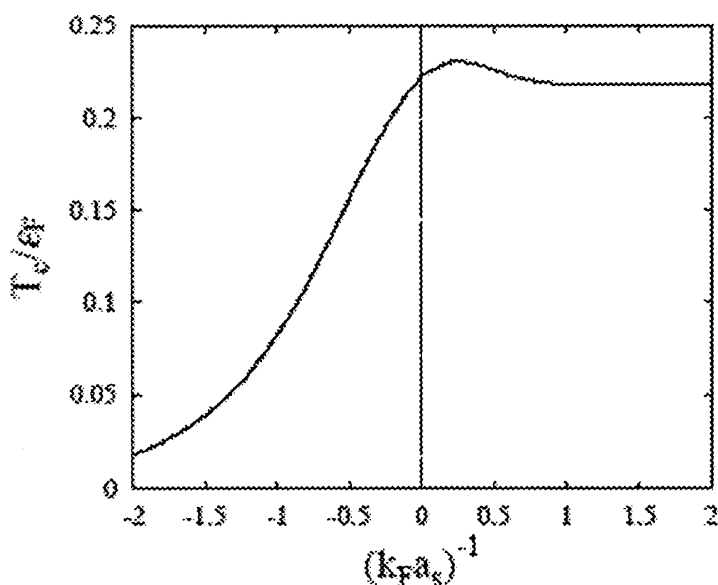


図 9. 3 : BCS-BEC クロスオーバーにおける超流動転移温度

この理論による超流動転移温度は図 9. 3 から分かるように、弱結合領域では相互作用が強くなるにしたがって上昇していた転移温度は、強結合 BEC 領域に近づくにつれ、最終的に理想分子ボーズガスでの値： $0.218 \varepsilon_F$ に近づきます。

結合フェルミオン=ボソンモデルの場合も、同様の考え方で有限温度を議論することができます。超流動転移温度は（カットオフを残した表式で）

$$1 = \left(U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu} \right) \sum_p \frac{1}{2\xi_p} \tanh \frac{\beta \xi_p}{2}. \quad (9.51)$$

粒子数の式は、先ず、平均場近似の範囲で

$$N = 2 \sum_q n_b(\varepsilon_b^B + 2\nu - 2\mu) + 2 \sum_p f(\varepsilon_p - \mu) = 2N_{B0} + N_{F0}. \quad (9.52)$$

右辺 1 項目は共鳴分子からの寄与です。先ほどの場合と異なり、「分子」の効果が入っているため、この近似の範囲でも、BEC 極限での T_c が正しく与えられます。しかし、「極限」はともかく、BEC 領域ではやはりこの近似には別の問題が存在します。それは、 T_c の方程式を解きなおすと、 $2\nu - 2\mu > 0$ という条件が得られ、それを粒子数の方程式に当てはめると、 T_c において共鳴分子の励起スペクトルに有限なギャップ（ $= 2\nu - 2\mu > 0$ ）が存在することになります。これは、明らかに BEC の一般的性質（BEC ではボソンの励起はギャップレス）という条件に抵触します。

この困難は、先ほどと同様に、揺らぎの効果を加味することで解決されます。ただし、今の場合、揺らぎの効果は

- (1) クーパー対の揺らぎ
- (2) 共鳴分子の生成と解離、

という 2 種類が存在します。前者は先ほどと同様ですが、後者は次のようなダイアグラムで表現されます：

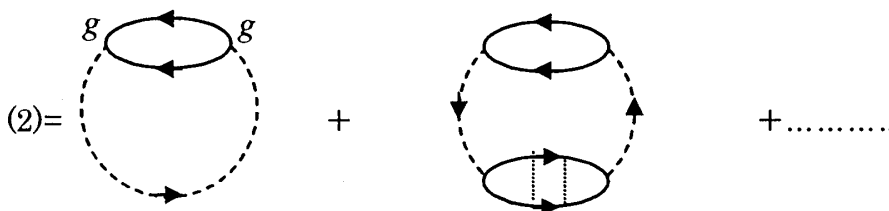


図 9. 3：フェッシュバツハ共鳴による補正。実線はフェルミ原子、鎖線は分子ボソンを表す。点線は弱い相互作用 U 。

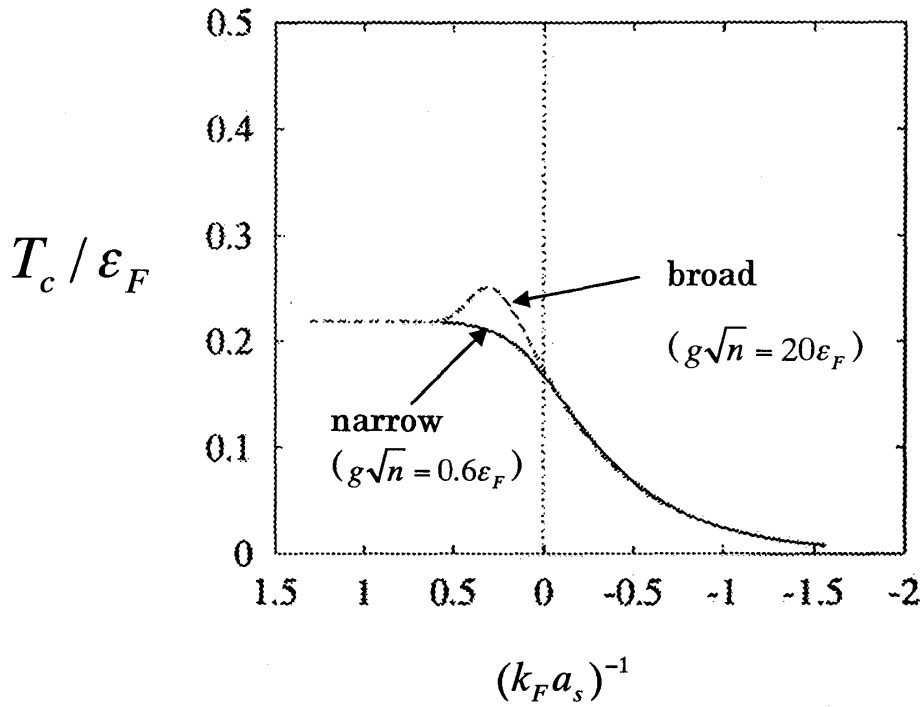


図9.5：2チャンネルモデルで計算された超流動転移温度のBCS-BEC クロスオーバー。 転移温度に関する限り、Narrow, broad resonance で本質的な違いはないことが分かる。

ここで、実線は原子、破線は共鳴分子状態を表します。解離状態では原子間に残留相互作用が働くので、それも加味しています（点線）。すると、粒子数の方程式は

$$N = 2N_{B0} + N_{F0} - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta \nu_n} \log \left[1 - \left[U - \frac{g^2}{i\nu_n - (\epsilon_q^B + 2\nu - 2\mu)} \right] \Pi(q, i\nu_n) \right]. \quad (9.53)$$

single channel model と比較すると、揺らぎの補正項は相互作用 U が

$$U_{\text{eff}}(q, i\nu_n) = U - \frac{g^2}{i\nu_n - (\epsilon_q^B + 2\nu - 2\mu)}, \quad (9.54)$$

に置き換わっています。特に $q = \nu_n = 0$ では

$$U_{\text{eff}}(0,0) = U + \frac{g^2}{2\nu - 2\mu}, \quad (9.55)$$

となり、ギャップ方程式に現れる有効相互作用に一致します。 また、共鳴分子ボソンの1粒子温度グリーン関数

$$D_0(q, i\nu_n) = \frac{1}{i\nu_n - (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu)}, \quad (9.56)$$

を用いると

$$U_{\text{eff}}(q, i\nu_n) = U - g^2 D_0(q, i\nu_n), \quad (9.57)$$

と書くことができます。 つまり、粒子数の方程式の補正項には分子のダイナミカルな効果を含んだ有効相互作用が効いていることがわかります。

この理論による BCS・BEC クロスオーバーでの T_c の変化を計算したものが図 9.4 です。 結果は散乱長でスケールすると、narrow, broad Feshbach resonance に関係なく、ほぼユニバーサルな振る舞いをしていることがわかります。 また、BEC 極限の T_c は先ほどと同じ、 $0.218 \varepsilon_F$ です。

この理論によって、先ほど述べた「分子ボソン励起のギャップ」が解消されていることを確かめます。 先ず、共鳴分子分子ボソン数がグリーン関数 D を用いて、

$$N_{B0} = -2T \sum_{q, \nu_n} D_0(q, i\nu_n) e^{i\delta\nu_n} = -T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} \log [i\nu_n - (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu)] e^{i\delta\nu_n}, \quad (9.58)$$

とかけることに注意します。 これを粒子数の式に代入すると、

$$N = N_B + N_{F0} - T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \log [1 - U \Pi(q, i\nu_n)]. \quad (9.59)$$

ここで、

$$N_B = -T \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{q, \nu_n} e^{i\delta\nu_n} \log \left[i\nu_n - (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) + g^2 \frac{\Pi(q, i\nu_n)}{1 - U \Pi(q, i\nu_n)} \right], \quad (9.60)$$

を N_0^0 を比較すると、分子ボソンのグリーン関数がフェッシュバッハ共鳴、及び、残留相互作用の影響によって、

$$D(q, i\nu_n) = \frac{1}{i\nu_n - (\varepsilon_q^B + 2\nu - 2\mu) + g^2 \frac{\Pi(q, i\nu_n)}{1 - U\Pi(q, i\nu_n)}}, \quad (9.61)$$

に置き換わっていることがわかります（分母の最後の項は自己エネルギーと呼ばれます。）。励起にギャップがあるか無いかは、ギャップ方程式が $q=0$ 、 $\nu_n=0$ の時の $\Pi(0,0)$ を用いて、

$$2\nu - 2\mu = g^2 \frac{\Pi(0,0)}{1 - U\Pi(0,0)}, \quad (9.62)$$

と書けることに注意すると、 D は T_c の時、 $q=0$ で $i\nu_n=0$ に極を有することになります。これは、補正を受けた共鳴分子の励起スペクトルは T_c でギャップレスになっていることを示しています。

10. トラップの効果と1粒子励起スペクトル

ここまでは一様系を対象にしてきましたが、実験ではフェルミ原子ガスは光学ポテンシャルに捕獲されています。最後に、このトラップの効果を実験で絶対零度の場合について説明します。

トラップポテンシャルは調和振動子ポテンシャルでよく記述されます。トラップ系では密度分布などの物理量が空間依存性を持つため、実空間で問題を考えた方が都合が良くなります。フェッシュバハ共鳴を考慮した2チャンネルモデルの場合、実空間表示でのハミルトニアンは

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\sigma} \int dr \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \left[-\frac{\Delta}{2m} - \mu + V_{trap}^F(r) \right] \Psi_{\sigma}(r) \\
 & - U \int dr \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}(r) \Psi_{\uparrow}(r) \\
 & + \int dr \Phi^{\dagger}(r) \left[-\frac{\Delta}{2M} + 2\nu - 2\mu + V_{trap}^M(r) \right] \Phi(r) \\
 & + g \int dr [\Phi^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}(r) \Psi_{\uparrow}(r) + h.c.].
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

ここで $\Psi_{\sigma}(r)$ 、 $\Phi(r)$ はそれぞれフェルミ原子、フェッシュバハ共鳴により生じる分子ボソンの場の演算子で、それぞれの粒子の質量は m 、 $M=2m$ です。それぞれの粒子はトラップポテンシャルに捕獲されており、

$$V_{trap}^F(r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2, \quad V_{trap}^M(r) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2, \tag{10.2}$$

簡単のため、ポテンシャルは等方的とし、トラップ周波数は原子、分子で同じとしました（後者は実験条件を合致しています。前者については多くの実験が z 軸方向に伸びた cigar トラップを用いています。）。分子が原子2個から構成されている、という条件は化学ポテンシャルによって既に考慮されています。

トラップがある場合の、 $T=0$ での BCS-BEC クロスオーバーは、このハミルトニアンに対する平均場近似と粒子数の方程式を組み合わせることで議論できます。平均場近似のハミルトニアンのうち、フェルミ原子に関する部分は、

$$\begin{aligned}
 H_{HFB} = & \sum_{\sigma} \int dr \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \left[-\frac{\Delta}{2m} - \mu + V_{trap}^F(r) - \frac{U}{2} n_F(r) \right] \Psi_{\sigma}(r) \\
 & - \int dr [\Delta(r) \Psi_{\uparrow}^{\dagger}(r) \Psi_{\downarrow}^{\dagger}(r) + h.c.].
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

ここで、 $n_F(r) = \sum_{\sigma} \langle \Psi_{\sigma}^{\dagger}(r) \Psi_{\sigma}(r) \rangle$ はフェルミ原子数密度です。 H_{HFB} は通常の BCS

理論の平均場近似と同じ形をしています、秩序パラメータが

$$\Delta(r) = \Delta(r) - g\phi_m(r), \quad (10.4)$$

で置き換わっています。 composite order parameter は $\Delta(r) = U \langle \Psi_\downarrow(r) \Psi_\uparrow(r) \rangle$ 、

$\phi_m(r) = \langle \Phi(r) \rangle$ を含んでいます。 両者の関係は一様系の場合と同じように求めることができます、

$$\frac{g}{U} \Delta(r) = - \left[\frac{\Delta}{2M} + 2\nu - 2\mu + V_{trap}^M(r) \right] \phi_M(r). \quad (10.5)$$

分子ボソンのハミルトニアンは凝縮体からの励起を記述し、それは H の 3 行目で

$\Phi(r) \rightarrow \delta\Phi(r) = \Phi(r) - \langle \Phi(r) \rangle$ としたのになります。 ただし、 $T=0$ では全てのボソ

ンは凝縮しており、この励起状態を記述するハミルトニアンを扱う必要はありません。

平均場近似のハミルトニアン H_{HFB} は Bogoliubov-de Gennes 方程式により対角化できますが、実際の計算は数値計算に頼ることになります。 粒子数の方程式と連立させて解いた結果は、化学ポテンシャルについては、定性的振る舞いは一様系と同じで、強結合領域に近づくにつれ、フェルミエネルギーからずれて、最後は負になります。

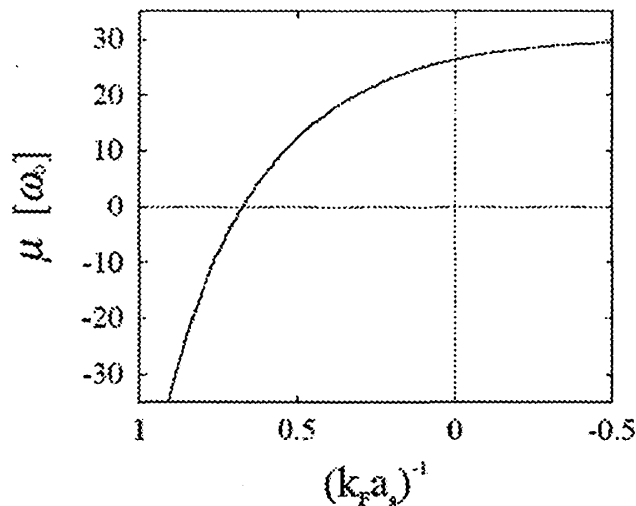


図 10. 1 : トラップ系での化学ポテンシャルのクロスオーバー領域での変化。 $N = 10912$, $\varepsilon_F = 31.5\omega_0$ 、相互作用は

$$U(N/R_F^3) = 0.35\varepsilon_F, g\sqrt{N/R_F^3} = 10\varepsilon_F \text{ (broad resonance)、}$$

カットオフエネルギーは $\omega_c = 161.5\omega_0$ とした。

$R_F = \sqrt{2\varepsilon_F / m\omega_0^2}$ は Thomas-Fermi 長。

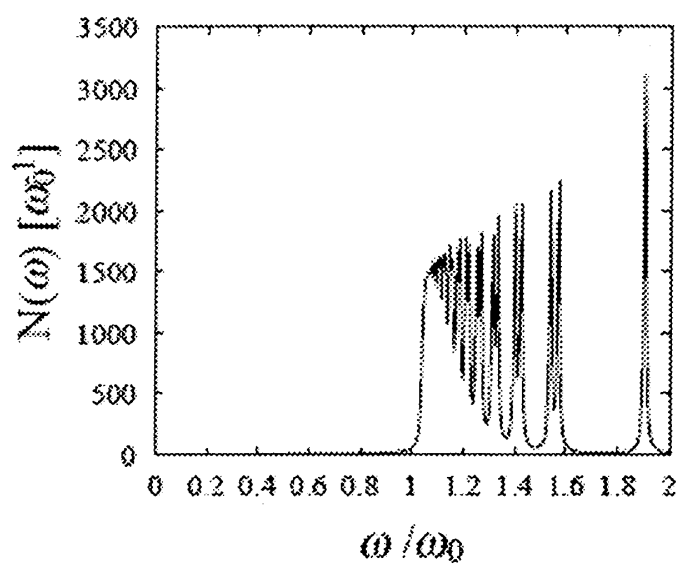


図 10. 2 : 超流動状態密度 ($(k_F a_s)^{-1} = -0.78$:BCS)

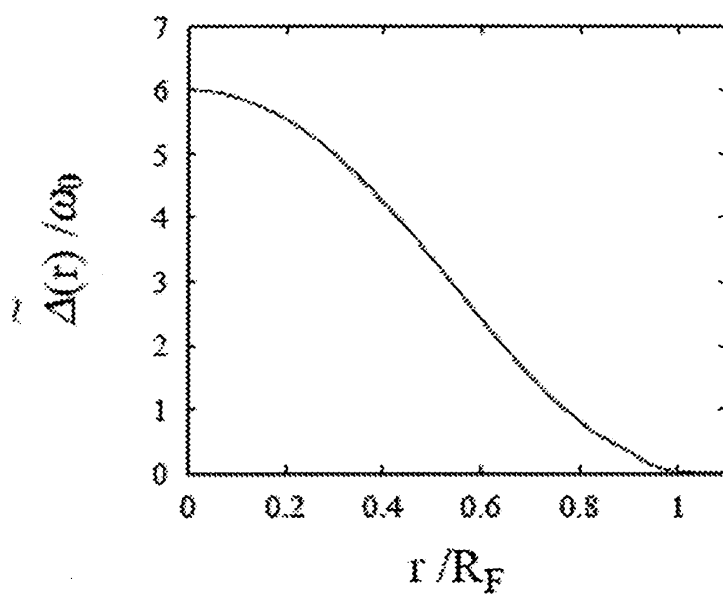


図 10. 3 : 秩序パラメータの空間変化
(パラメータは図 10. 2 に同じ)

トラップ系の場合、秩序パラメータが非一様になるため、BCS 領域でも一粒子励起のギャップ E_g は秩序パラメータに一致しなくなります。図 10.2 に見られる励起ギャップの大きさは有限な大きさはあるものの、図 10.3 の秩序パラメータの典型的な値である原点近傍の値よりもはるかに小さいことが分かります。これを理解するには、トラップ中での超流動状態にあるフェルミ原子はトラップポテンシャルと秩序パラメータ（ペアーポテンシャル）という 2 つのポテンシャルを感じる、という点が重要です。この 2 つのポテンシャルで作られた「複合的なポテンシャル」はガスの周辺部近傍に溝（井戸構造）を持つため、この部分にアンドレーエフ束縛状態が形成されます。このうち、最低エネルギーのものが 1 粒子励起（状態密度）のギャップを与えられます（井戸型ポテンシャル中に束縛状態が形成されるように、ペアーポテンシャルと通常のポテンシャルで作られた井戸の中に形成される束縛状態がアンドレーエフ束縛状態です）。これは「井戸」の底に形成されるため、必然的に中心付近の秩序パラメータの値に比べ小さくなります。アンドレーエフ束縛状態の形成は局所状態密度に直接現れ、図 10.5 に示すように、井戸の底が存在するガス周辺部（ $r \sim R_F$ 近傍）に、中心部分の秩序パラメータより低エネルギーの状態が形成されていることがわかります。このうち最低エネルギーのものがトラップ系での励起ギャップを与えます。

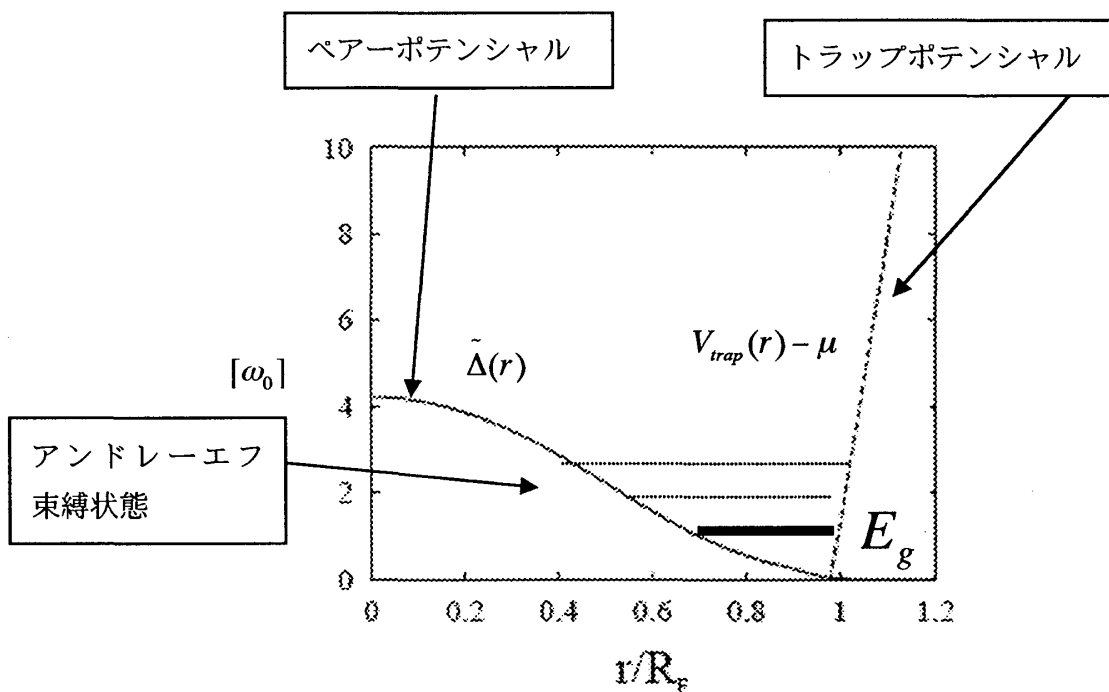


図 10.4：原子を感じる 2 種類のポテンシャルの例。2 つのポテンシャルで作られた「井戸」の中にアンドレーエフ束縛状態が形成される。

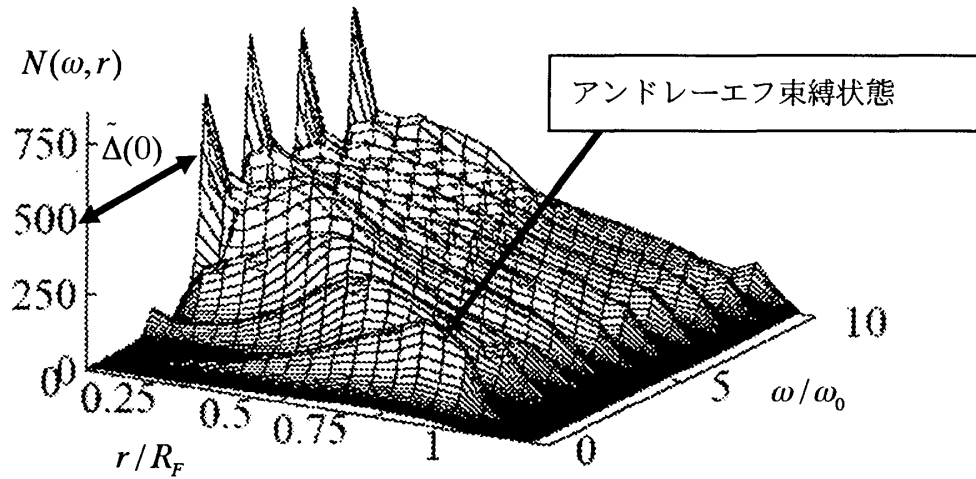


図 10. 5 : 局所状態密度。 秩序パラメータの空間分布は図 10. 4 の場合を用いている。 ガス周辺部 (R_F) の低エネルギースペクトルがアンドレーエフ束縛状態の寄与である。 R_F は相互作用がない場合のガスのサイズを与える。

BEC 領域では、 $\mu < 0$ となるとアンドレーエフ束縛状態は重要でなくなり、この領域での 1 粒子ギャップは (BEC 極限值として) 一様系の場合と同様に $|\mu|$ で与えられます (化学ポテンシャルが励起ギャップを与える理由も一様系と同じです。)

7 章で、1 粒子励起ギャップが rf トンネルスペクトルによって観測できることを述べましたが、状態密度のギャップ E_g と秩序パラメータが一致しないトラップ系では一体どちらが観測されるのかは興味深い問題です。 rf スペクトルは超流動 ^6Li で既に観測されており、実際、ガスは光学ポテンシャルに捕獲されているので、この問題は実験を理解する上でも重要です。

7 章で述べたように、rf トンネルスペクトルでは、光を照射して 2 つの原子状態のうち ($\uparrow$ スピンとします) 片方を第 3 の状態 ($|\psi_a\rangle$) に遷移させることで原子系の 1 粒子励起を観測します。 この遷移を記述するハミルトニアンは (回転波近似の範囲内で)

$$H_I = t_F \int dr [e^{i(q_L \cdot r - \omega_L t)} \Psi_a^\dagger(r) \Psi_\uparrow(r) + h.c.]. \quad (10.6)$$

ここで、 (q_L, ω_L) は光の波数、エネルギーで、 t_F 遷移行列です。 これによる $|\uparrow\rangle$ から $|\psi_a\rangle$ へのトンネルカレントのスペクトル (rf-tunneling current spectrum) は

$$I_F(t) = -it_F \int dr [e^{i(q_L \cdot r - \omega_L t)} \Psi_a^\dagger(r) \Psi_\uparrow(r) - h.c.], \quad (10.7)$$

をフーリエ変換したものを計算することで求められます。 実際にはこの寄与以外にフェ

ツシュバツハ共鳴の分子ボソンの解離にともなうトンネルカレントが存在しますが、現在の実験で用いられている broad resonance の場合、この効果は非常に小さく、無視できます。

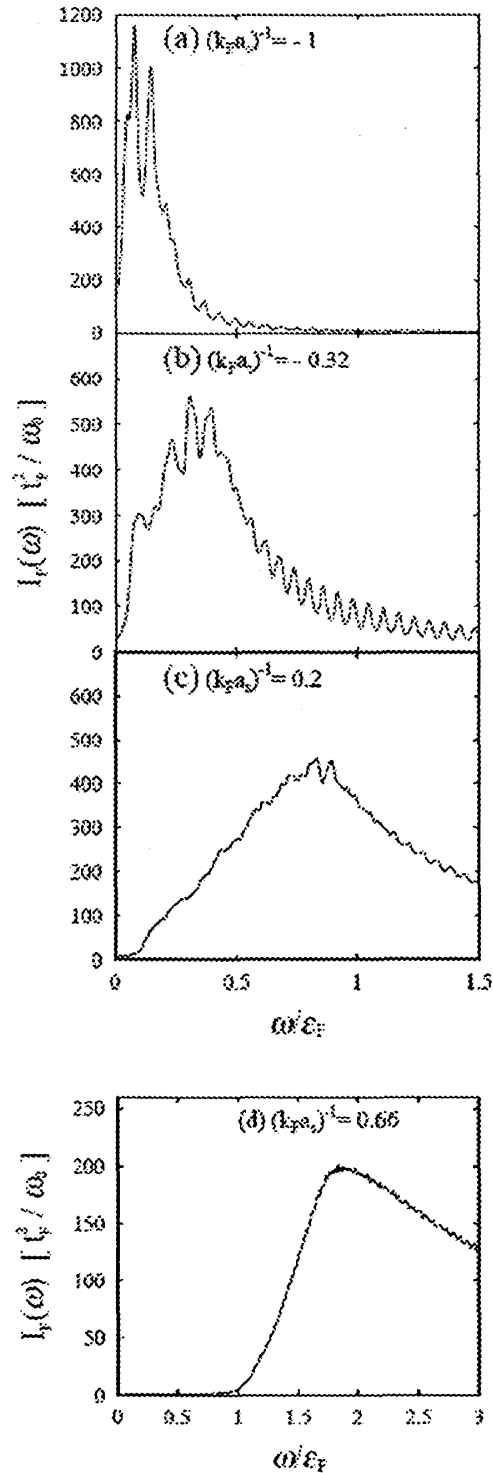


図 10.6 : rf スペクトル (broad resonance)。エネルギーに減衰因子を入れているため、小さなギャップ (E_g) はつぶれている。

図10.6はスペクトルの計算結果ですが、強結合領域にいくにしたがってスペクトルのピークの位置が高エネルギー側にずれていくことが分かります。このピークエネルギーは、図10.7に示すように1粒子励起ギャップ E_g ではなく、トラップ中心秩序パラメータを与えます。実験ではこのピークを励起ギャップとして検出していますが、この結果から、実験が観測しているのは「本当の」1粒子励起ギャップそのものではなく、トラップ中心近傍の秩序パラメータの大きさを与えていることがわかります（これはトラップ中心近傍の「局所的な1粒子励起」におけるギャップになります）。

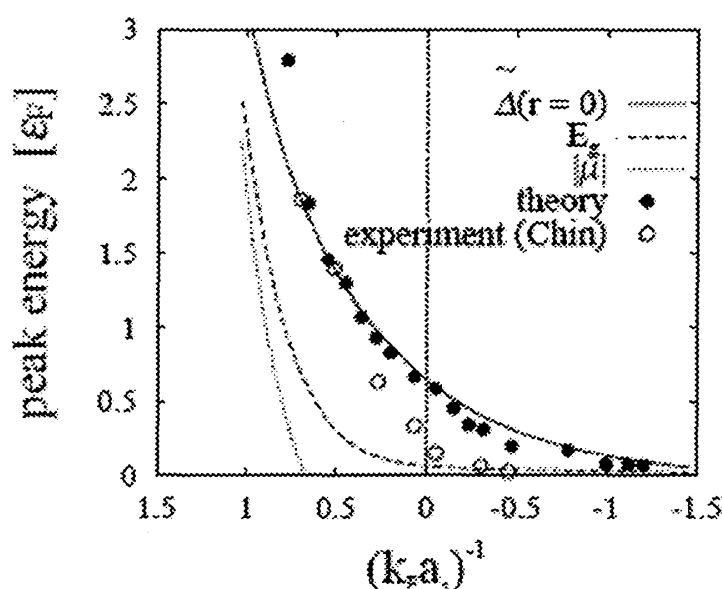


図10.7: rf スペクトル中のピークエネルギー (●) と1粒子励起ギャップ E_g , トラップ中心での秩序パラメータの大きさの関係。白丸 (○) は Chin らによる超流動 ^6Li に対する実験結果。

原理的には rf スペクトルは1粒子励起ギャップに相当するエネルギーのところにギャップを持ちますが、実験の分解能では現在のところ、この構造は観測されていません。ただし、BEC 領域では図10.6(d)にあるように大きなギャップ構造が現れます。これは、化学ポテンシャルが負になることで、1粒子励起ギャップを決めるものがアンダーレーエフ束縛状態から化学ポテンシャル (の大きさ) に変わり、後者は急速に大きくなるためギャップ構造が明瞭に見えてくることに因ります。BEC 領域でのこの大きなギャップ構造は実験でも観測されています。

参考文献

この講義ノートでは個々の内容について参考文献はあげませんでしたが、最後に、今後の参考になる文献をいくつか紹介しておきます。

○ BEC のテキスト

1. C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, N.Y., 2002) .
2. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, N. Y., 2003).

○ フェルミ原子ガス超流動のレビュー

3. A. Minguzzi, et al., Phys. Rep. **395** (2004) 223.
4. Q. Chen et al., Phys Rep. **412** (2005) 1.

フェルミ原子ガス超流動発見以前の理論、実験の進展から現在までの理論、実験研究の文献はこれらのレビューから探すことができます。

○ フェルミ原子ガス超流動観測の実験報告

5. C. Regal et al., Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 040403.
6. M. Bartenstein et al., Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 120401.
7. M. Zwierlein et al., Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 120403.
8. J. Kinast et al., Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 150402.

○ rf スペクトル観測の実験報告

9. C. Chin et al., Science **305** (2004) 1128.

○ フェルミ原子ガス超流動実現以前の、主に、超伝導を対象とした BCS-BEC クロスオーバーの理論

10. A. J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, edited by A. Pekalski and J. Przystawa (Springer Verlag, Berlin, 1980), p. 14.
11. P. Nozieres and S. Schmitt-Rink, J. Low Temp. Phys. **59** (1985) 195.
12. M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin et al., (Cambridge University Press, N. Y., 1995) p. 355.

○ この講義ノートの内容のいくつかは、著者の最近の研究をベースにしています。計算の詳細など、必要に応じ、参考にしてください：

13. Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 130402.

14. Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. A **67** (2003) 033603; **67** (2003) 063612.

15. Y. Ohashi and A. Griffin, Phys. Rev. A **72** (2005) 013601.

上記以外にも、フェルミ原子ガスでの BCS-BEC クロスオーバーの文献は原子ガス超流動の実現以降、非常に数にのぼっています。それらについては、文献 3, 4 のレビューを参考にしてください。