

C^* -環における近似問題

山形大 理 富 山 淳

最近反例がスウェーデンの若手数学者 Enflo によってつくられた話題をまきおこした Banach 空間の近似性質はよく知られているように Grothendieck による次のテンソル積による定式化がある ([3]). 即ち, E, F を Banach 空間とし, その最大クワスノルムによるテンソル積を $E \otimes_F F$, 最小クワスノルムによるテンソル積を $E \otimes F$ とかくことにすると, E が近似性質をもつことと, 任意の Banach 空間 F について $E \otimes F$ から $E \otimes F$ への共役写像が 1 対 1 であることは同値である. この形を C^* -環のテンソル積にあてはめると次のように一見この問題がとれているかう称と称子になる. Banach $*$ -環においてその $*$ -写像が $\|x * x\| = \|x\|^2$ という関係をもたしているとき, これを C^* -環という. C^* -環はヒルベルト空間上の有界作用素をつくる自己共役ノルム閉部分環として常に $*$ -同型に表現出来る. 今 A, B を C^* -環とすると, その代数的テンソル積 $A \otimes B$

(C^* 環) α の C^* -クロスノルム β による完備化 $A \otimes_{\beta} B$ が C^* -環に
なっていることは、 $\beta \in C^*$ -クロスノルム α と呼ぶ。 C^* -クロスノル
ム α の代表的なものは、 A, B をそれぞれ C^* -ヒルベルト空間 H, K 上の
有界作用素のつくる C^* -環と考えると、 $A \otimes B$ を自然な形で、ヒ
ルベルト空間 $H \otimes K$ 上の有界作用素のつくる環とみなして出
来たノルムである。ところが一般には、 A と別の C^*
環 B について $A \otimes B$ 上の C^* -クロスノルムは一意的ではなく、上
のノルム (α -ノルムと書く) は α の中で最小のノルムになっ
ている (竹崎 [7])。そこで α の C^* 環 A (例えば 2×2
生成元を M_2 の自由群の正則表現からつくった C^* -環) と B
と C^* -クロスノルム β ($\beta > \alpha$) をとり $A \otimes_{\beta} B$ から $A \otimes_{\alpha} B$ への自然
な射を考えると、 C^* -環にあっては像が稠密であれば自動的に
全体になるという性質があるので、この射は onto な準同
型になり、 β が α よりこの核が零でないうえに、 α に
なる。

$$A \otimes_{\beta} B \longrightarrow A \otimes_{\beta} B \longrightarrow A \otimes_{\alpha} B \longrightarrow A \otimes_{\alpha} B$$

とこの系列を考えると、 $A \otimes_{\beta} B$ から $A \otimes_{\alpha} B$ への射が 1 対 1
でなっていることになり、 A, B が近似性質をもった C^* -バナッハ空間
の例になり、 $A \otimes_{\beta} B$ の $A \otimes_{\alpha} B$ 内での像の様子
がわからず、現在の所ではこの判定がつかない (また、
たまたま α の C^* 環 A が予想である)。一方、この核については

近似内題の列の定式化がある (Waelbroeck [12]). E, F をバナフ空間, X, Y をその共役空間 E^*, F^* の単位球とし x, y に弱* 位相を与えておく. このとき $E \otimes_X F$ を含む次の三つのバナフ空間は互に同型になっている.

- 1) E^* から F への線型写像で X 上で連続であるものの全体
- 2) F^* から E への線型写像で Y 上で連続であるものの全体
- 3) $E^* \times F^*$ 上の双線型汎関数で $X \times Y$ 上で連続なものの全体

ここでこれを同一視して E, F の新しいノルム種 $E \times F$ を与えると, E が近似性質を与えることは任意の F に対して $E \times F$ が $E \otimes_X F$ と一致することと同値になる. さてここで連続汎関数の空間 $C(X), C(Y)$ と $C(X) \otimes_X C(Y)$ を与えると, $E \otimes_X F$ と $E \times F$ とは自然な形で $C(X) \otimes_X C(Y) = C(X \times Y)$ の部分空間と与えることが出来る. ここで $\varphi \in C(X)^*$ に対して写像

$$R_\varphi : C(X) \otimes_X C(Y) \rightarrow C(Y)$$

$$R_\varphi \left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i \right) = \sum_{i=1}^n \langle f_i, \varphi \rangle g_i$$

と定義し, R_φ を右 Fubini 写像と呼ぶ. 同様に $\psi \in C(Y)^*$ に対して左 Fubini 写像 L_ψ が定義出来る. 両者は $x \in C(X) \otimes_X C(Y)$ に対して次の関係を与えている.

$$\langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle \dots (*)$$

ここで $C(X) \otimes_X C(Y)$ の部分空間 $F(E, F)$ を

$$F(E, F) = \{ x \in C(X) \otimes C(Y) \mid R_\varphi(x) \in E, L_\psi(x) \in F, \\ \forall \varphi \in C(X)^*, \psi \in C(Y)^* \}$$

とすると、これは変数関数 $x(s, t)$ の空間の中で

$$F(E, F) = \{ x \in C(X \times Y) \mid x(s, \cdot) \in F, x(\cdot, t) \in E \\ \forall s \in X, t \in Y \}$$

$$= C(X, F) \cap C(Y, E) = C(X) \otimes F \cap E \otimes C(Y)$$

という形をしており結局前の $E \otimes F$ と同じものであることが
 言える。即ち E が近似性質を有するとは任意の F について

$F(E, F)$ が $E \otimes F$ と一致することと同値である。更に上の
 定式化で $F(E, F)$ は確かに $C(X) \otimes C(Y)$ の中だけなく、任意
 の E, F を含むバナッハ空間 $\hat{E}, \hat{F}$ について

$$F(E, F) = \{ x \in \hat{E} \otimes \hat{F} \mid R_\varphi(x) \in F, L_\psi(x) \in E, \forall \varphi \in \hat{E}^*, \psi \in \hat{F}^* \}$$

と表わせば同じことが言える。そこで上のような種類の空間

$F(E, F)$ は E, F が関数環の時の slice 積の一般化であり写像

R_φ, L_ψ は特に φ, ψ は point evaluation の時には slice map

と呼ばれていたものであるが(富山 [9], [10] 参照)この種

の議論の中で大事な働きをする(*)の式は重積分の Fubini の

定理の抽象化と考えることが出来るのでここでは上のよう

な記号をし、 $F(E, F)$ を Fubini 積と呼ぶことにする。そこで

本稿の目的は C^* -環における上の形での近似問題を考えるこ

とである。

§1. C^* -環の Fubini 積. A, B を C^* -環 C, D をそれぞれ A, B を含む C^* -環とする. このとき最小の C^* -ノルム $\|\cdot\|$ は次の定義から局所的な性質をもつて $A \otimes B$ は $C \otimes D$ の C^* -部分環になる. よって

$$F(A, B) = \{x \in C \otimes D \mid R_\varphi(x) \in B, L_\psi(x) \in A \ \forall \varphi \in C^*, \psi \in D^*\}$$
とある C^* -環 A, B の $C \otimes D$ についての Fubini 積と呼ぶことにする. $F(A, B)$ は $C \otimes D$ 内の自己共役な閉部分空間である.

問題. $F(A, B) = A \otimes B$ であるか又は $F(A, B)$ は $A \otimes B$ と異なる C^* -環を含むか? このことが一般に否定的であるならば A が任意の三つ組 (B, C, D) について $F(A, B) = A \otimes B$ となるのはどのようなときか?

上の問題はこれから述べたようにバナフハ空間の近似問題の C^* -環的な定式化であるがそれは C^* -環自身の問題をも含んでいて、この限りでも C^* -テンソル積での基本的問題であるといえる. C^* -環 A_1, B_1 より他の C^* -環 A_2, B_2 への $*$ -準同型 π_1, π_2 とすると、 $A_1 \otimes B_1$ から $A_2 \otimes B_2$ への $*$ -準同型積写像 $\pi_1 \otimes \pi_2$ がつくれる. よって特に π_2 が同型であるときを考えると、 π_1 の核を I_1 とおくと

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)^{-1}(0) = F(I_1, B_1)$$

となり、上の問題はここでは $\pi_1 \otimes \pi_2$ の核が $I_1 \otimes B_1$ とかけられるかという話になる. 一般に π_2 の核 I_2 もいふとき、 A_1 又は B_1 が I 型の C^* -環であれば

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)^*(0) = I_1 \otimes B_1 + A_1 \otimes I_2$$

とすることが知られているが、他の場合にどうなるかはわかっていない。C*-環の基本的なわけ方として上の I 型の C*-環 (つまり表現が I 型の von Neumann 環と生成する) があつたことが、可分性とそれによる既約表現の像が常にコンパクト作用素を含むということと同値である。可分な任意の C*-環には必ず最大の I 型イデアルが存在して、その商環はやはり I 型のイデアルをもつたものになる (NGCR 環という)。従つて C*-環の 2 つの積の型をきめる問題は $A \otimes B$ の最大の I 型イデアル K とそれによる最大の I 型イデアル K_1, K_2 の間に $K = K_1 \otimes K_2$ となる関係があるかという問題に帰着するが、結果は一般に $K = F(K_1, K_2)$ であり、その法は特別な場合しか $K = K_1 \otimes K_2$ にはわかっていない (各個に型をきめるという方法では問題は解決している。宿山 [9])。最小 2 つの積でける定義からわかるように、この K は積関数 $\varphi \otimes \psi$ の族によって完全に決定されている。我々の問題は、この中で $\{\varphi \otimes \psi\}$ が更に C*-部分環やイデアルを分離しているかどうかと同じである。尚他の C*-環 B について $A \otimes B$ 上の C*-ノルム $\|\cdot\|_B$ が常に $\|\cdot\|_A$ に等しいような C*-環 A を他のもと同様に nuclear C*-環と呼ぶ。可分な I 型 C*-環は ~~可分~~ 離散的な amenable 群の C*-群環は nuclear である (Lance [4])。

§2. von Neumann 3-ソル積の場合. M, N をそれぞれヒルベルト空間 H, K 上の von Neumann 環とすると, $M \otimes N$ の弱位相による閉包として von Neumann 環として $M \overline{\otimes} N$ が定義出来る. 更に $B(H), B(K)$ をそれぞれ H, K の空間上の有界作用素全体のつくる von Neumann 環とすると, $B(H)$ 上の任意の弱*連続な汎関数 φ によって ($\varphi \in B(H)_*$ とかく) $B(H) \overline{\otimes} B(K) = B(H \otimes K)$ から $B(K)$ への弱*連続な右 Fubini 写像 R_φ が定義出来る. $L_\varphi (\varphi \in B(K)_*)$ についても同様である. そこで M, N の $B(H) \overline{\otimes} B(K)$ についての Fubini 積を

$$\pi(M, N) = \{ x \in B(H) \overline{\otimes} B(K) \mid R_\varphi(x) \in N, L_\varphi(x) \in M, \forall \varphi \in B(H)_*, \forall \psi \in B(K)_* \}$$

と定めると次のことが成立つ. von Neumann 環 M について $B(H)$ 内で M と可換な元全体を通常 M' とかき, M の ~~commutant~~ commutant と呼ぶ.

定理 2.1. $\pi(M, N) = M \overline{\otimes} N$ といふことと $(M' \overline{\otimes} N')' = M \overline{\otimes} N$ となることは同値である.

後者の等式は通常 $(M \overline{\otimes} N)' = M' \overline{\otimes} N'$ の形で考へられ, von Neumann 環の理論の中で基本的な役割を果たしている式である. これが一般に成立するかどうかは長い間の懸案であつたが近年富田-竹崎理論の結果としてこの成立が保証されるに至っている(竹崎[6]). 従つてこの場合には任意の von Neumann

環が上の形で近似性値をもちときえる。上の等式の重要さ
を示す例を二、三あげてみる

1) $M_1, N_1 \in H$ 上の von Neumann 環, $M_2, N_2 \in K$ 上の von
Neumann 環とすると $M_1 \bar{\otimes} M_2 \cap N_1 \bar{\otimes} N_2 \subset \mathcal{K}(M_1 \cap N_1, M_2 \cap N_2)$,
よって $M_1 \bar{\otimes} M_2 \cap N_1 \bar{\otimes} N_2 = (M_1 \cap N_1) \bar{\otimes} (M_2 \cap N_2)$, 特に $N_1 \subset M_1$,
 $N_2 \subset M_2$ のとき relative commutant について

$$(N_1 \bar{\otimes} N_2)' \cap M_1 \bar{\otimes} M_2 = (N_1' \cap M_1) \bar{\otimes} (N_2' \cap M_2).$$

2) F, G がそれぞれ M, N の $*$ -自己同型群, その不動化環を M_F
 N_G とし $*$ -自己同型群 $F \times G$ の $M \bar{\otimes} N$ での不動化環を
 $(M \bar{\otimes} N)_{F \times G}$ とすると $(M \bar{\otimes} N)_{F \times G} \subset \mathcal{K}(M_F, N_G)$, よって
 $(M \bar{\otimes} N)_{F \times G} = M_F \bar{\otimes} N_G$

§3. C^* 環についての結果. C^* 環は von Neumann 環ほど
よい構造にはなっていないので C^* -Fubini 積について我々の
問題が §2 のように形で解決がつくとは考え難い面がある。従
って現在も所もかかっているのは C^* -テンソル積に入ることの判
定が比較的たやすい場合だけである。

定理 (富山 (11)) A を $*$ -既約表現が有限次元で且つその
次元が有限であるような C^* 環とする。このとき任意の C^* 環の
三つ組 (B, C, D) ($A \subset C, B \subset D$) について

$$F(A, B) = A \bar{\otimes} B$$

証明はこの場合でも「ここから長く下り次の」各段階で行われる。

補題 3.1. $\varphi \in A^*$ とし $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}$ まで拡大とする。このとき $x \in F(A, B)$ に対して $R_{\hat{\varphi}}(x)$ の値は φ のみに関係する。そこで $\Phi_x(\varphi) = R_{\hat{\varphi}}(x)$ とおくと Φ_x は A^* から B への線型写像で A の単位球上で弱*連続である。

A を既約表現の次元が一固定であるような C^* 環 (n -homogeneous C^* 環といふ) とし X をその dual とする。このとき X は局所的にコンパクトなストルツ空間であり $a \in A$ に対して関数 $t \mapsto \|a(t)\|$ は ~~連続~~ 無限大で 0 になる連続関数であることが知られている。ただし既約表現 t に対して $t(A) = A(t)$, $t(a) = a(t)$ とおく。そこで fibre 空間 $\{X, A(t)\}$ とその上の operator field の集合 $\mathcal{A} = \{a(t) \mid a \in A\}$ を考える。 $\{X, A(t)\}$ 上の field $x(t)$ が $\mathcal{A}$ に対して連続であるといふことを

$\forall \varepsilon > 0, t \in X \exists U(t \text{ の近傍}), a \in A; \|x(s) - a(s)\| < \varepsilon \quad \forall s \in U$ と定める。このとき $\mathcal{A}$ はこの fibre 空間上の無限大で 0 になる単一連続な operator field 全体をつくる C^* 環 ($\|x\| = \sup \|x(t)\|$) と同型になる(実際はもっと詳しく fibre bundle 上の cross-section になる)。そこで準同型 $\tau \otimes 1: A \otimes B \rightarrow A(t) \otimes B$ を考え $x(t) = \tau \otimes 1(x)$ とすると

補題 3.2. $t \mapsto \|x(t)\|$ は ∞ で 0 になる連続関数で $A \otimes B$ は

$\{X, A(t) \otimes B\}$ 上の $\{x(t) \mid x \in A \otimes B\}$ -連続な ∞ で 0 になる field 全体をつくる C^* -環と同型になる。

次に t を空間 $K(\cap H)$ 上への C の表現 π_t に拡大し, $p(t)$ を H への射影, $z(t) \in \pi_t(A)'$ での $p(t)$ の central cover とする。

補題 3.3. $x \in F(A, B)$ ならば $\pi_t \otimes 1(x)(z(t) \otimes 1) \in \pi_t(A)_{z(t)} \otimes B$.

今 $\theta(t) \in \pi_t(A)_{z(t)}$ から $A(t)$ への同型 $\theta(t)$ を $\pi_t(A)_{z(t)} \otimes B$ より $A(t) \otimes B$ への γ とする。上の補題から x によって各 $A(t) \otimes B$ 内に $\hat{x}(t) \in \hat{x}(t) = \theta(t) \otimes 1[\pi_t \otimes 1(x)(z(t) \otimes 1)]$ とするようにとれる。

補題 3.4. $\hat{x}(t)$ は X 上の ∞ で 0 になる, $A \otimes B$ -連続な field である。

以上から A が n -homogeneous の時は定理が成立することが保証され、あとはこの場合に帰着させることを「有限回」つづきぬるといつた形で証明を終る。

この定理の直接の結果としてはおぼろげだが当然含んでいるが、この他例とは A が可換な時には定理が成立するか、 A, B を単位元をもつ C^* -環とし、 A, B と $A \otimes B$ の中心をそれぞれ Z_1, Z_2, Z としたとき、 $Z = Z_1 \otimes Z_2$ が成立することなどが言える。

§4 結語. 前にもつづけたように上の問題は, Banach 空間

の近似問題の C^* -環的定式化であるが、 C^* -環の性質の中でも最大の C^* -クロスノルムが存在するので、 C^* -環の性質の共通写像 $A \otimes B \rightarrow A \otimes B$ が常に onto であることもろとすると、それが 1 対 1 であることは、とりもたず C^* -ノルムと C^* -ノルムの等しいこと、即ち nuclearity 自体が C^* -環としての近似性値を示すものと考えることが出来る。このように見方は既に Effros-Lance によって [4], [13] 等に使われ研究されてきたが、ごく最近 Choi-Effros [14] は一般論としても注目すべき次の結果を証明した。

定理. C^* -環 A について次のことは同値である。

(1) A が nuclear

(2) A の恒等写像は有限階の completely positive 写像である。
 どの C^* -環も C^* -環の位相で近似出来る。

ここで (2) $\Rightarrow$ (1) の部分は Lance [4] によって証明されている。上 (1) $\Rightarrow$ (2) の結果の 1 つの大きな帰結は nuclear な C^* -環は Banach 空間として近似性値を示すことが判明したることである。ここで C^* -環を Banach C^* -環の中で特徴づけているのは C^* の positive cone の構造であるから、上の近似性値の中で (positive map でなく) completely positive な写像が登場してくるのはこの意味では自然なわけである。本稿の問題にまつても種々の状況から考えて、最後に nuclear C^* -環

に於いては前節の定理が成立するのではないかと思われる。

参考文献

1. J. Dixmier, Les C^* -algèbres et leurs représentations, 1964.
2. P. Enflo, A counter example to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., 130 (1973), 309-317
3. A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc. 1966
4. C. Lance, On nuclear C^* -algebras, J. Funct. Anal., 12 (1973), 157-176
5. E. G. Effros, Approximation problems for C^* -algebras, preprint
6. 竹崎正道, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Springer lecture note 128, 1970
7. ———, On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 16 (1964), 111-119
8. 竹崎-富山, Applications of fibre bundles to a certain class of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 13 (1961), 498-522
9. 富山 三三, Applications of Fubini type theorem to the tensor product of C^* -algebras, Tôhoku Math. J., 19 (1967) 213-220
10. ———, Slice algebra に於いて, 数理論理学研究会講演会講演録, 1969, 33-43

11. ———, Tensor products and the approximation problems of C^* -algebras, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., 11 (1975), 163-183.
12. L. Waelbroeck, Duality and the injective tensor products Math. Ann., 163 (1966), 122-126
13. E. G. Effros - C. Lance, Tensor products of operator algebras, preprint
14. Man-Duen Choi - E. G. Effros, Nuclear C^* -algebras and the approximation property, preprint