

Dirac 方程式と path integral

北大理 一瀬 孝 (Takashi Ichinose)

1. Introduction. Dirac 方程式 ($c = \hbar = 1$)

$$(1.1) \quad \partial_t \varphi(t, x) = [-\alpha(\partial - ieA(t, x)) - im\beta - ie\Phi(t, x)]\varphi(t, x)$$

$$(\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3); \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_j, \beta \text{ は Dirac 行列})$$

の経路積分について heuristic に論じ、時空 2 次元の場合に Cauchy 問題の基本解及び遅延・前進 Green 関数の数学的厳密な経路積分 (path integral) 表示を与える。本稿は、主に田村博志氏との共著論文 [9] に基き、証明、時空 4 次元の結果などの詳細はそれを参照されたい ([8] は要旨; cf. [6], [7])。

2. Heuristics. (1.1) の Cauchy 問題の基本解を $K(t, x; 0, y)$ とする。

それは、外電磁場中の量子化された粒子 (質量 m , 電荷 e) が時刻 0 に位置 y にあり時刻 t に位置 x にある確率振幅であり、相空間経路積分 [11] 又は、ハミルトニアン経路積分 [4]

$$(2.1) \quad K(t, x; 0, y) \sim \int_{p_x, 0, y} e^{iS(t; P, X)} \mathcal{Q}(P) \mathcal{Q}(X)$$

で与えられるとする。 $S(t; P, X)$ は作用(action) と呼ばれる([10]),

$$(2.2) \quad S(t; P, X) = \int_0^t [P(s) \dot{X}(s) \mp \sqrt{(P(s) - eA(s, X(s)))^2 + m^2} - e\Phi(s, X(s))] ds$$

で与えられる。 $\mathcal{Q}(P)\mathcal{Q}(X)$ は 相空間経路空間 $\mathcal{P}_{t,x;0,y} = \{(P, X);$

$X(0)=y, X(t)=x, P(\cdot) \text{ unrestricted}\}$ 上の一様 "測度" であり, 形式的には, $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ 上の Lebesgue 測度 $dP(s)dX(s)$ の連続無限直積

$\prod_{s \in [0,t]} (2\pi)^{-3} dP(s)dX(s)$ と考える。次にこの相空間経路 "積分" に於て

$$\text{変数変換} \begin{cases} X'(s) = X(s) \\ P'(s) = X(s) - eA(s, X(s)) \end{cases} \left(\det \begin{bmatrix} \partial X(s)/\partial X'(s) & \partial X(s)/\partial P'(s) \\ \partial P(s)/\partial X'(s) & \partial P(s)/\partial P'(s) \end{bmatrix} = 1 \right) \quad (= \text{注意})$$

を施し, 更に Dirac の処方 $\pm \sqrt{P'(s)^2 + m^2} \sim \alpha P'(s) + m\beta$

を用いると (P', X') を再び P, X と書く),

$$(2.3) \quad K(t, x; 0, y)$$

$$= \int_{\mathcal{P}_{t,x;0,y}} T e^{i \int_0^t [(P(s) + eA(s, X(s))) \dot{X}(s) - (\alpha P(s) + m\beta) - e\Phi(s, X(s))] ds} \prod_{0 \leq s \leq t} \frac{dP(s)dX(s)}{(2\pi)^3}$$

となる。Dirac の処方の導入は, scalar を matrix で置きかえ

ることにするので time ordering symbol T の導入が必要に

なり, $T e^{i \int_0^t [\dots] ds}$ は, product integral である。更に, (2.3)

の右辺を, $[0, t]$ を n 等分 ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, t_j - t_{j-1} = t/n$;

$x_j = X(t_j), p_j = P(t_j), x_n = x, x_0 = y$) して,

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^6} \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left\{ i \left[(p_{j-1} + eA(t_{j-1}, x_{j-1})) \frac{x_j - x_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} - \alpha(p_{j-1} + m\beta) - e\Phi(t_j, x_{j-1}) \right] (t_j - t_{j-1}) \right\} \\ \times \frac{dp_0}{(2\pi)^3} \frac{dp_1 dx_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{dp_{n-1} dx_{n-1}}{(2\pi)^3}$$

と解釈しよう. (2.4) の被積分関数を

$$\prod_{j=1}^n e^{i\gamma_j p_{j-1}} e^{-i(\alpha p_{j-1} + m\beta)(t_j - t_{j-1})} e^{-i\gamma_{j-1} p_{j-1}} e^{i \sum_{k=1}^n [e\Phi(t_{k-1}, x_{k-1})(t_k - t_{k-1}) + eA(t_{k-1}, x_{k-1})(x_k - x_{k-1})]}$$

と書き直し, n 々の p_j 積分を実行すると, (2.4) は,

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} K_0(t_n - t_{n-1}, x_n - x_{n-1}) \cdots K_0(t_1 - t_0, x_1 - x_0) e^{i \sum_{k=1}^n [\cdots]} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

となる. $K_0(t, x)$ は, 外電磁場のなす Dirac 方程式の Cauchy 問題の基本解である. (2.5) は, $A \equiv 0$ で, Φ が t に依存しなければ, Trotter 積公式により, $\text{kernel}[e^{-t[(\alpha\partial + i m\beta) + i e\Phi]}](x, y)$ を意味していることになる.

ここで K_0 達と Lebesgue 測度 dx_j 達との積の極限として, 経路の空間上の測度 $\mathcal{L}_{t,x;0,y}$ が構成できるとすれば,

$$(2.6) \quad K(t, x; 0, y) = \int_{\mathcal{X}_{t,x;0,y}} d\mathcal{L}_{t,x;0,y}(X) e^{-i \int_0^t e\Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t eA(s, X(s)) dX(s)}$$

となるであろう. $\mathcal{X}_{t,x;0,y}$ は, 時刻 0 に y を出発し時刻 t に x に至る配位空間経路 X 達の空間である. 我々の結果 (Theorem 1) は, 時空 2 次元のとき (2.6) を数学的 rigor をも, て実現するものである.

3. Theorems

3.1. 時空 2 次元 Dirac 方程式の Cauchy 問題の基本解

時空 2 次元 Dirac 方程式

$$(3.1) \quad \partial_t \varphi(t, x) = [-\alpha(\partial_x - ieA(t, x)) - i\beta - ie\Phi(t, x)]\varphi(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

の Cauchy 問題の基本解 $K^I(t, x; 0, y)$ は, 次のような経路積分表示が"できる. α, β は 2×2 Hermite 行列で $\alpha^2 = \beta^2 = 1$, $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$ を満たす. A, Φ は, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ 上の実数値 L_{loc}^∞ 関数とする.

Theorem 1. $C([0, t]; \mathbb{R})$ 上の $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; M_2(\mathbb{C}))$ 値可算加法的測度 $\nu_{t,0}^I$ が一意に存在して, すべての $(f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}; (\mathbb{C}^2)') \times \mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ に対して

$$(3.2) \quad \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \overline{f(x)} K^I(t, x; 0, y) g(y) dx dy \\ = \int_{C([0, t]; \mathbb{R})} (f, d\nu_{t,0}^I(x) g) e^{-i \int_0^t \Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t A(s, X(s)) dX(s)}$$

が成立する. 測度 $\nu_{t,0}^I$ の台は,

$$\text{supp } \nu_{t,0}^I \subseteq \left\{ X \in \text{Lip}([0, t]; \mathbb{R}); |\dot{X}(s)| \leq 1, \text{ a.e. } s \left(X(s) - X(0) = s, 0 \leq s \leq t, \text{ if } m=0 \right) \right\}$$

を満たす.

Remark 1. $\nu_{t,0}^I$ は, conditional path space measure と考えられる.

$$\nu_{t,f,g}^I(\cdot) \equiv (f, \nu_{t,0}^I(\cdot) g) = \langle \bar{f} \otimes g, \nu_{t,0}^I(\cdot) \rangle$$

は, $C([0, t]; \mathbb{R})$ 上の複素数値可算加法的測度であるが, f, g

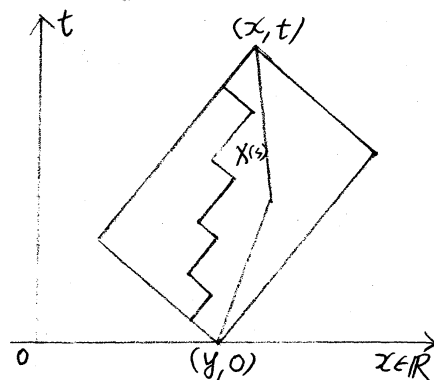
を形式的に $\delta_x = \delta(\cdot - x)$, $\delta_y = \delta(\cdot - y)$ と置き、 t もの $\mathcal{L}_{t,x;0,y}^I$ と書くとき、Theorem 1 は次のようになる:

$$(3.2)' \quad K^I(t,x;0,y) = \int_{X(0)=y, X(t)=x} d\mathcal{L}_{t,x;0,y}^I(X) e^{-i \int_0^t \Phi(s, X(s)) ds + i \int_0^t A(s, X(s)) dX(s)}$$

$$\text{supp } \mathcal{L}_{t,x;0,y}^I \subseteq \left\{ X \in \text{Lip}([0,t]; \mathbb{R}); |X(s)| \leq 1, \text{ a.e. } s \text{ (} X(s) - X(0) = s, 0 \leq s \leq t, \text{ if } m=0) \right\}$$

$$X(0)=y, X(t)=x$$

Remark 2. 測度 $\mathcal{L}_{t,0}^I$ の台は λ , である典型的な path X 達は zigzag path であり, Zitterbewegung [1] を思い起させる.



Remark 3. Daletskii, Daletskii-Fomin [2] は、関連する問題を扱、 t が可算加法的測度を構成していない。Dirac 方程式の path integral について、測度の構成を且差していないが、興味あるいくつかの研究がある: [3], [12], [13], [5].

3.2. 時空 2 次元 Green 関数

(3.1) に於て, $x^0 = t$, $x^1 = x$ と置き, 更めて $x = (x^0, x^1) \in \mathbb{R}^2$ と置く. 然る後右辺を左辺に移項して得られる作用素を

$$iH = (\partial_0 + ieA_0(x)) + \alpha(\partial_1 + ieA_1(x)) + im\beta$$

と置く. 但し, $A_0 = \mathbb{I}$, $A_1 = -A$. $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^1 = \beta\alpha$ と置く.

Green 関数 $S(x, y; m)$ とは,

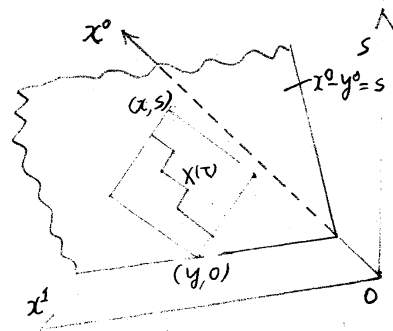
$$(3.3) \quad \gamma^0 H S(x, y; m) \equiv \left[\sum_{\mu=0}^1 \gamma^\mu (-i\partial_\mu + ieA_\mu(x)) + m \right] S(x, y; m) = \delta(x-y),$$

$x, y \in \mathbb{R}^2$

の 2×2 行列値 distribution 解のことである. 色は Green 関数があるが, 遅延 Green 関数 $S_{\text{ret}}(x, y; m)$, 前進 Green 関数 $S_{\text{adv}}(x, y; m)$ は次のような経路積分表示ができる. その定義は, それぞれ $[\text{kernel}(\gamma^0 H - i\varepsilon \gamma^0)^{-1}](x, y)$, $[\text{kernel}(\gamma^0 H + i\varepsilon \gamma^0)^{-1}](x, y)$ の $\varepsilon \downarrow 0$ の極限である. (3.2)' のような直観的表現を行う.

Theorem 2. $C([0, s]; \mathbb{R}^2)$ 上の $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2; M_2(\mathbb{C}))$

値可算加法的測度 $\nu_{s, x; y}^{\text{II}}$ が一意に存在して, すべての $(f, g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ に対して



$$(3.4) \quad S_{\text{ret}}(x, y; m) = i \int_0^\infty ds \int_{\substack{X(0)=y, X(s)=x}}^{\text{II}} d\nu_{s, x; y}^{\text{II}}(X) \gamma^0 e^{-i \int_0^s \sum_{\mu=0}^1 e A_\mu(X(t)) dt} X^\mu(t)$$

が成立する. 測度 $\nu_{s, x; y}^{\text{II}}$ の台は,

$$\text{supp } \nu_{s, x; y}^{\text{II}} \subseteq \left\{ \begin{array}{l} X^\mu(t) - X^\mu(0) = t, 0 \leq t \leq s \\ X \in \text{Lip}([0, s]; \mathbb{R}^2); |\dot{X}^1(t)| \leq 1 \text{ a.e. } t (|\dot{X}^1(t) - \dot{X}^1(0)| = t, 0 \leq t \leq s, \text{ if } m=0) \\ (X^0, X^1) \\ X(0)=y, X(s)=x \end{array} \right\}$$

を満たす. $S_{\text{adv}}(x, y; m)$ については, $\int_0^\infty ds$ を $-\int_{-\infty}^0 ds$ で置き換えたものが成立する.

References

1. J.D.Bjorken and S.D.Drell, Relativistic Quantum Mechanics, (McGraw-Hill, New York, 1964), p.38.
2. Yu.L.Daletskii, Soviet Math. Dokl. 2, 1634-1637(1961); Uspehi Mat.Nauk. 17(5), 3-115(1962), English transl., Russ. Math. Surveys 17, 1-107 (1962). See also Yu.L.Daletskii and S.V.Fomin, Theory of Prob. Appl. 10, 304-316(1965).
3. R.P.Feynman and A.P.Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill, New York, 1965), p.34-36.
4. C.Garrod, Hamiltonian path-integral methods, Rev. Mod. Phys. 38, 483-494(1966).
5. B.Gaveau, T.Jacobson, M.Kac and L.S.Schulman, Relativistic extension of the analogy between quantum mechanics and Brownian motion, Phys. Rev. Lett. 53, 419-422(1984).
6. T.Ichinose, 数理研講究録 464 (1982)
7. _____, Path integral for a hyperbolic system of the first order, Duke Math. J. 51, 1-36(1984).
8. _____, In:Proc. VIIth International Congress on Mathematical Physics (MnΦ), Boulder, Aug. 1983, Physica 124A(1984).
9. _____ and H.Tamura, Propagation of a Dirac particle. A path integral approach, J. Math. Phys. 25(6), 1810-1819(1984).
10. L.D.Landau and E.M.Lifschitz, Course of Theoretical Physics, Vol. 2, The Classical Theory of Fields, 4th revised English ed. (Pergamon Press, Oxford, 1975).
11. M.M.Mizrahi, Phase space path integrals, without limiting procedure, J. Math. Phys. 19, 298-307(1978); Erratum, ibid. 21, 1965 (1980).
12. G.V.Riazanov, The Feynman path integral for the Dirac equation, Soviet Phys. JETP 6(33), 1107-1113(1958).
13. G.Rosen, Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory(Academic Press, New York, 1969), Appendix E, p.118.