

量子エノン写像における複素トンネル軌道

首藤 啓

東京都立大学 大学院理学研究科
shudo@phys.metro-u.ac.jp

池田 研介

立命館大学 理工学部
ahoo@mp0tw009.bkc.ritsumeai.ac.jp

1. 広義の量子トンネル効果

1次元ハミルトン系では、古典粒子がエネルギー的に到達できない領域間でのみトンネル現象がおこる。1次元系では古典運動の分断は常に配位空間 (configuration space) 上でおこるが、物理現象の中でトンネル効果を問題にする際、多くの場合、そのようなエネルギー障壁を越えるトンネル効果がそのモデルとなる。

しかし、系が2次元以上（この場合の2次元とは配位空間の次元が2という意味）になると、エネルギーだけが古典運動を束縛するものではなく、一般に、エネルギー以外の保存量の出現によって位相空間 (phase space) 上で運動可能領域と不可能領域の複雑な分断がおこる。そうすると、もはやエネルギー障壁だけを古典運動を妨げる障壁として特別視する理由はなくなり、配位空間上のトンネル遷移の自然な拡張として、“古典軌道で遷移不可能な位相空間上の領域への波動効果による遷移全般”をトンネル現象とみなすことが考えられる。エネルギー障壁がある場合と全く同様に、古典軌道はこれら分断された不変集合間を往来することはできなくとも、量子論では波動効果を介して行き来することができるからである。

また、古典軌道が、ある不変部分集合上でエルゴード的であるとき、軌道は無限の時間をかけることでその不変部分集合上の任意の点の近傍を通過することができるが、当然のことながら有限時間内では到達しない領域が必ず残る。一方、量子論では、古典軌道が有限時間内では到達し得ない領域にも遷移確率をもつことが可能であり、この意味での古典的に到達不可能な領域への遷移も広い意味でのトンネル現象とみなすことができる。

量子トンネル現象は、古典力学では記述不能な純粋な波動効果であり、軌道描像の対極を成すものである。これに対して、インスタントンと呼ばれる軌道概念を用いてトンネル効果を記述する方法が古くに開発され、現在、1次元トンネル効果に関してはひとつの確立された手法として広く知られている [1]。ここでのアプローチは、複素軌道を用いてトンネリングを記述する、という点では、インスタントンのアイデアとその源を同じくするが、系の多次元性により古典ダイナミクスの様相が一変することから、結果的に従来のインスタントン理論とは似て非なるものとなる [2]。

実際、非可積分系を含む、多次元系のトンネル効果を理解する手段として“複素半古典論”が有効であることが確かめられると同時に、インスタント軌道とは対照的な、極めて多数の複素軌道がトンネリングに関与する、という点で、多次元のトンネル効果は1次元系とは質的に全く異なる量子現象であることがわかってきた [2]. そして、その理解の中心に複素力学系の諸概念が重要な役割を果たすことが徐々に明らかになってきたのである [3]. さらに、複素力学系はトンネル現象の記述と極めて相性が良いことから、そこから逆に、カオス系のトンネル効果の定義、あるいは特徴付けの手段に複素力学系を用いる、という方向性も拓けてきた。

本稿では、多次元の量子トンネル効果を解析するためにはどのような問題設定を準備することがその本質を取り出すことのための見通しを良くするか？トンネル効果と複素力学系との間を埋めるためには何をトンネル軌道とみなせば良いか？など、多次元系のトンネル効果と複素力学系との接点つける上でのいくつかの問題点を議論する。

2. 離散写像の量子化

力学系のカオスを意識したトンネル現象の研究は、既にいくつかのグループでも進められているが [4, 5, 6], 研究の対象されているモデルが物理的な観点を優先して選ばれていることもあり、数理的な問題としてどこに焦点を絞るべきか、判然としないところがある。ここでの目的は、2次元保測写像という、考えられ得る限り最も単純な状況を準備することで、多次元の量子トンネル効果の骨格をすくい上げることである。

2次元保測写像は、2自由度ハミルトン系のポアンカレ写像のモデルとみなすことができる。通常、連続時間の flow 系を解析する代わりに、解析の容易な写像を研究することで flow 系の性質を知ることが写像を研究する大きな動機になっているが、ここでも、全く同じ精神で、2次元保測写像を用いて量子トンネル現象の研究を行う。しかし、ことトンネル現象の解析に関しては、写像力学系で得られた帰結がどこまで flow 系に拡張可能か？という問題は実力学系とは違った意味で注意を要する。ここで見るように、トンネル現象とその下地にある古典系との関係は、複素半古典論を媒介にして付けられるが、離散写像系では、写像の変数のみを複素領域に解析接続することでそれが達成されるのに対して、flow 系では力学変数に加えて時間変数をも解析接続する必要がある、数学的には全く別物を扱うことになるからである [7]. 両者の対応関係を議論する素地をつくることも多次元のトンネル効果の研究において大きな問題のひとつである。

トンネル現象を考える前に、まず、2次元保測写像の量子力学を準備する必要がある。写像の量子化に関しては、任意の与えられた写像に対してつねに適用可能な一般的な処方箋が知られているわけでない。その意味では、カオス系の写像をいかに量子化すべきか？という出発点自体にも議論すべき余地があることになるが、ここではその問題に立ち入らない。いまのと

ころ共通の手順としては、(1) 量子系の状態空間の定義、(2) n ステップから $n+1$ ステップへの適当なユニタリ演算子の構成、という 2 段階を経る。

最初に量子化の手続きが比較的疑義なく与えられ、かつ、2 次元保測写像としてその素性がよく知られている、通称、アーノルドの猫と呼ばれるトーラス上の群同型写像：

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix} \pmod{1} \quad (1)$$

(ただし、 $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ は、 $|t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21}| = 1$ を満たす整数の組) を考えてみる。この系の量子論は、まず写像の定義されている領域がトーラス ($0 \leq q < 1, 0 \leq p < 1$) であることを反映し、離散点 $Q = i/N$ ($0 \leq i \leq N-1$) でのみで値を取る状態ベクトル $\Psi_Q^{(n)}$ に対する Hilbert 空間を用意し (ここで、 N は状態空間の分割数でその逆数 $1/N$ はこの系のプランク定数を与える)、次に、離散時間 n と $n+1$ との間の時間発展：

$$\Psi_{Q_2}^{(n+1)} = \sum_{Q_1=0}^{N-1} U_{Q_1, Q_2} \Psi_{Q_1}^{(n)} \quad (2)$$

を与えるユニタリ行列 U_{Q_1, Q_2} を定義することで与えられる [8]。ここで、時間発展を与えるユニタリ行列は、状態 q_1, q_2 を結ぶ作用 $S(q_1, q_2)$ ：

$$S(q_1, q_2) = \frac{1}{2t_{12}}(t_{12}q_1^2 - 2q_1q_2 + t_{22}q_2^2) \quad (3)$$

を用いて与えられる自由空間のユニタリ演算子：

$$u(q_1, q_2) = \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial q_2} \right) \exp \left(\frac{i}{2t_{12}\hbar} (t_{12}q_1^2 - 2q_1q_2 + t_{22}q_2^2) \right) \quad (4)$$

をトーラス上に制限した、

$$U_{Q_2, Q_1} = \left(\frac{t_{12}}{iN} \right)^{1/2} \left\langle \exp \left(\frac{i\pi}{Nt_{12}} [t_{11}Q_1^2 - 2Q_1(Q_2 + mN) + t_{22}(Q_2 + mN)^2] \right) \right\rangle_m \quad (5)$$

として得られるものである。ここで、 $\langle \cdot \rangle_m$ は、すべての整数に対する和を表す。以上のユニタリ行列は離散フーリエ変換を経てエネルギー領域の量子論に移行することができ、その上ではいわゆる跡公式をつくることも容易である [8, 9]。

アーノルドの猫写像は、古典周期軌道間に強い数論的な特異性が存在するなど、写像固有の特殊性が量子論に強く反映されることが知られているが [10]、以上のような確実な量子化法が存在することから写像の量子論としては数学的には最も解析が進んでいる [11]。しかしながら、この系には以下の理由でトンネル現象が存在しない。ここでは、1. で述べたように、トンネル効果を最も広義に解釈し、‘古典軌道が届かないところへの遷移’をすべてトンネル効果とみなすことにするが、アーノルドの猫写像は、写像が局所線形であることから、あとで

述べる半古典論を用いた遷移確率の評価が exact になってしまい、量子論が (実) 古典写像をもって過不足なく記述されてしまう [9]. 同様の事情は、定負曲率面上での測地流の問題などでもあるが [12], これらの系では、古典軌道のまわりの量子揺らぎは存在するが、最初から古典写像が到達可能な領域にしか遷移確率をもたないため、ここで考えるトンネル効果はあり得ないことになる. 逆に言うと、ここで問題にするトンネル現象は、トンネルを担う ‘芯’ の部分に (複素) 古典軌道が存在するような遷移のことであり、従って、アーノルドの猫写像の場合、量子論はあってもトンネル効果は存在しないことになる.

次に考えられる単純な 2 次元保測写像はパイコネ変換である. パイコネ変換も、トーラス領域上に状態空間を準備し、離散的な時間発展を与えるユニタリ演算子を定義することで量子化を実行することができる [13]. しかしながら、(3) と同様な古典写像の作用 (or 母関数) がパイコネ変換の場合、全位相空間上で定義することができず、状態空間の準備などには多くの工夫を要する [14]. 特に、系のハミルトニアンを書き下すことができず、時間発展演算子が $\hat{U} = \exp\{-\frac{i}{\hbar}H_0(\hat{p})\} \exp\{-\frac{i}{\hbar}V(\hat{\theta})\}$, といった形を取らないため、アーノルドの猫写像のように離散経路積分をストレートに書くことはできない. この場合のユニタリ演算子をつくるとき手掛かりは通常とは逆で、半古典 Van Vleck 公式をそのヒントにする [14]. 一般に、古典論の母関数 W が与えられたもとでの半古典 Van Vleck 公式は、状態 x と状態 x' 間の遷移確率を $\hbar \rightarrow 0$ の極限で与えるもので、

$$\langle x'|U|x \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial x} \right|^{1/2} e^{-i[W(x',x)/\hbar + \gamma]} \quad (6)$$

という表式をとるものであるが ($\approx$ は $\hbar \rightarrow 0$ の漸近極限の意味). パイコネ変換の量子化を行うときには、逆に、時間発展演算子の半古典極限が (6) となるような量子論をつくるわけである [14]. パイコネ変換も位相空間 ($0 \leq q \leq 1$, $0 \leq p \leq 1$) 上の端点 ($|q| = 1$, $|p| = 1$) を除けば写像は線形であり、端点から離れた場所では半古典近似が有効である. しかし、位相空間の端点は古典写像としては測度ゼロの例外点として考慮する必要がないが、量子的にはその影響を無視することはできず、いわゆる回折効果として顕在化する [14]. 回折効果も古典軌道が到達し得ない領域への波動効果による遷移、という意味では一種のトンネル効果とみなすこともでき、その意味では、パイコネ変換にはアーノルドの猫写像では存在しなかったトンネル効果が存在することになる. しかしながら、この場合、波動の特異性が端点という測度ゼロの領域に集中していることから、半古典論を適用する際には古典軌道の複素領域への解析接続では対処できない. こういった事情で、下地にある古典力学系との対応を見る、ということでの目的にはパイコネ変換は適さないことになる.

以上より、トンネル効果を調べるためのミニマムなモデルとして、ここでは以下の保測写像

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n - V'(q_n) \\ q_n + H'_0(p_n) \end{pmatrix} \quad (7)$$

特に, $H_0(p) = p^2/2$, ポテンシャル $V(q)$ を q に関する 2 次式とし, 写像を定義する領域をトーラス上に制限すると, 写像 (7) でアーノルド猫写像をつくることができるが, ここでは上記理由よりその場合は除外する. $H_0(p) = p^2/2$, $V(q) = K \sin q$ としたものは, 標準写像 (standard map) であり, 2 自由度ハミルトン系のポアンカレ写像のモデルとして最も広く研究されている. 標準写像は, $0 \leq q < 2\pi$, $-\infty < p < \infty$ の筒状領域で定義され, 摂動の強さが $K \ll 1$ のとき, (q, p) 面上には, q 方向に横断的な KAM トーラスが存在する. その場合, p -方向への拡散は, KAM トーラスによってブロックされ, 軌道は p -方向に対して有界領域しか動くことができない. 標準写像の量子論において, KAM トーラス存在下で, 分断された不変領域の間でおこる量子論的遷移は, 1. で述べた広い意味でのトンネル効果の格好の例である. ここでは, 写像 (7) の量子論を考え, その量子写像のもとでのトンネル効果を考察する. 量子写像 (7) のユニタリ演算子は, p 表示で,

$$\begin{aligned} \langle p_1 | U^n | p_0 \rangle &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H'_0(p_1)\right] \langle p_1 | \exp\left[-\frac{i}{\hbar} V(q)\right] | p_0 \rangle \\ &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H'_0(p_1)\right] \int dq \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (p_1 - p_0)q\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar} V(q)\right] \end{aligned} \quad (8)$$

となる (q に対する積分は, 写像が定義されている領域に応じて行う). さらにこれをもとに, n ステップでは

$$\langle p_n | U^n | p_0 \rangle = \int \cdots \int \prod_j dq_j \prod_j dp_j \exp\left[-\frac{i}{\hbar} S(\{q_j\}, \{p_j\})\right]. \quad (9)$$

という離散的な経路積分によって時間発展のプロパゲータが得られる. ここで $S(\{q_j\}, \{p_j\})$ は作用汎関数で,

$$S(\{q_j\}, \{p_j\}) = \sum_{j=1}^n \left[H_0(p_j) + V(q_j) \right] + \theta_j (p_j - p_{j-1}), \quad (10)$$

で与えられる. $\langle p_n | U^n | p_0 \rangle$ は, 始状態 p_0 が n -ステップ後に終状態 p_n を与える確率振幅を与える. 標準写像のように q -方向に関して周期的な位相空間を考えている場合は, 波動関数の取り得る場所は離散的な点であり, それに応じて p の定義される場所も量子化される [2].

3. 半古典論

写像系の半古典論と言っているものは、時間発展のプロパゲータを与える多重積分 (9) を鞍点法によって評価する操作に他ならない。具体的には、積分 (9) の鞍点条件:

$$\frac{\partial S(\{p_j\}, \{q_j\})}{\partial p_j} = 0, \quad \frac{\partial S(\{p_j\}, \{q_j\})}{\partial q_j} = 0 \quad (11)$$

を満たす鞍点によって積分の近似的に評価を実行することである。ただし、 n ステップのプロパゲータ $\langle p_n | U^n | p_0 \rangle$ は、各始状態 p_0 、および終状態 p_n を与えることに決まるものであり、多重積分 (9) の積分変数は、中間状態 q_j ($0 \leq j \leq n-1$)、 p_j ($1 \leq j \leq n-1$) である。得られるプロパゲータの半古典表式は、

$$U^{sc}(p_n, p_0) = \sum_{\gamma} A_{\gamma}(p_n, p_0) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{\gamma}(p_n, p_0) - i\mu_{\gamma} \frac{\pi}{2}\right\} \quad (12)$$

となる。ただし、

$$A_{\gamma}(p_n, p_0) = \left[2\pi\hbar \left(\frac{dp_i^{(\gamma)}}{dq_1^{(\gamma)}}\right)_{p_0}\right]^{-1/2}, \quad \mathcal{S}_{\gamma}(p_n, p_0) = \mathcal{S}(\{p_j^{(\gamma)}\}, \{q_j^{(\gamma)}\}) \quad (13)$$

である。ここで、和 γ は与えられた始状態 p_0 と終状態 p_n を満足し、かつ、鞍点条件を満たす解に対する和である。当然、鞍点条件 (11) は、写像の時間発展ルール (7) を与えるので、 γ に対する和は古典軌道に対する重ね合わせとなる。 μ_{γ} は、各期道に沿ったマスロフ指数である。鞍点は複素解まで許されるので、和として足される古典軌道は一般に複素古典軌道になる。ただしここでは、 p -表示のプロパゲータを考えていることから、両端の p は観測量であり、 $p_0, p_n \in \mathbf{R}$ となる必要がある。

結局、鞍点条件 (11) を満たす各古典軌道は、 $\mathbf{C}^{2n-1}$ 上の一点であるが、それらを各軌道の初期値 q_0 の実部をもって表すことにする。すなわち、

$$\mathcal{M}_n^{\alpha, \beta} = \{q_0 = \xi + i\eta \in \mathbf{C} \mid \text{Re } p_0 = \alpha, \text{ Re } p_n = \beta, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \quad (14)$$

が n ステップのプロパゲータの半古典和に寄与する複素軌道の初期条件集合ということになる [2].

4. 半古典トンネル軌道

具体的な写像を用いた話しに入る前に、カオス系の半古典論に関する一般的事実と、トンネル効果と関連して何を問題にするか? という点を確認しておく。(12) 式の半古典和で初期運動量 p_0 を固定すると、 $U^{sc}(p_n, p_0)$ は終状態 p_n の関数になる。このとき、各 $p_n = \beta$ を終状態にもつ軌道は一般には複数個存在する。特に系がカオスを発生するようなポテンシャル $V(q)$ を選ぶと、その数はステップ数 n と共に指数関数的に増大する (その指数は、系のトポロジカ

ルエントロピー程度). もし, 始状態 p_0 と終状態 p_n を結ぶ古典軌道が実軌道とすると, 各軌道の作用 S_γ は実数であるから, 半古典和 (12) の各項の絶対値を支配するのは, 各項の振幅因子 $A_\gamma(p_n, p_0)$ ということになる. (13) より, $A_\gamma(p_n, p_0)$ は各軌道のまわりの Monodromy 行列の固有値を用いて与えられ [2], 不安定な軌道ほど和 (12) の中での寄与としては小さくなる.

一方, 始状態 p_0 と終状態 p_n の結ぶ古典軌道が複素軌道であるとする, その作用は虚部をもつ. その結果, 各項の絶対値を決める因子として振幅因子 $A_\gamma(p_n, p_0)$ の他に作用虚部 $\text{Im } S_\gamma(p_n, p_0)$ の大きさが問題になってくる. 作用虚部は, 正の値をとる場合 ($\text{Im } S_\gamma(p_n, p_0) > 0$) と負の値を取る場合 ($\text{Im } S_\gamma(p_n, p_0) < 0$) とが有り得るが, 単純に考えると, 正の作用虚部をもつ軌道が半古典和 (12) の中で他の軌道をその絶対値において凌駕するように思える. しかし, 実は, 多重積分 (9) の鞍点法を実行し, 表式 (12) を得る際に, 正の作用をもつ指数関数的に大きな絶対値をもつ鞍点は, 漸近展開に付随して現れるいわゆる「ストークス現象」によって予め除去されている [15, 16]. すなわち, 形式的に書いた表式 (12) は, 正しくは, 鞍点法のストークス現象 (+ しかるべき境界条件) が処理されてはじめて意味をなすわけである (もちろん, 正の作用虚部をもつものがストークス現象によってすべて消える, というのはラフな言い方で, 逆に, 負の作用虚部をもつものが必ず残るというわけでもない). ここでは取りあえず, 多重積分のストークス現象に深入りすることはせず, おおよそ正の作用虚部をもつ軌道は, 非物理的寄与解 (指数関数的に増大する解) としてストークス現象の中で除去されているものとして話しを進める.

既に述べたように, ここで考えるトンネル効果は, “実軌道が到達しない領域への遷移” であった. 従って, n -ステップで始状態 $p_0 = \alpha$ と終状態 $p_n = \beta$ を結ぶ実軌道が存在せず, 複素軌道のみが両状態間を結ぶとき, 状態 α から状態 β へ遷移は純粹なトンネル効果である. 一方, 状況次第では, 始状態 p_0 と終状態 p_n とを結ぶ古典軌道の中の実軌道と複素軌道が混在していることもあり得る. しかし, そういう場合でも, 実軌道からの寄与部分はトンネルと見なさず, それを除いた複素軌道からの寄与をトンネル遷移として解釈することにする.

任意に与えられた 2 つの状態間を結ぶ複素軌道のうち, トンネル遷移に関わってくる複素軌道はいかなるものか? 数学的に意味のある問題設定をつくるためには, さらに問題を単純化する必要がある. 半古典和 (12) の各項の絶対値を左右するファクターは振幅因子 A_γ と作用虚部 $\text{Im } S_\gamma$ であったが, トンネル効果と複素軌道を結びつけるひとつの立場は, 適当に与えられた始状態 p_0 と終状態 p_n のもとで, その半古典和の中の作用虚部 $\text{Im } S_\gamma$ の絶対値がもっとも小さい軌道を探す, というものである. 半古典和の各項は, $\hbar \rightarrow 0$ のもとでの鞍点近似の主要部であるから, 一般に, p_0 と p_n を結ぶ複素古典経路が複数存在し, それぞれの作用虚部 $\text{Im } S_\gamma$ が異なるときには, その中で最も虚部の小さいものの寄与のみが $\hbar \rightarrow 0$ の極限で生き残る. あるいは, 作用は $\hbar$ をユニットとしているので ($\exp$ の肩の中で $\hbar$ で割っている), $\hbar \ll 1$ だが $\hbar \neq 0$ の状況を考えやや条件を緩めて, 作用虚部の差が $\hbar$ のオーダー内にあるも

のはどのようなものか？ということになる。トンネル複素軌道の選別に関して物理学者がまず考えるのはこのようなものと思われる。主たるトンネリングの遷移確率を与える複素経路が、下地にある力学系において何らかの意味をもっていることがわかれば、高次元トンネリングの定性的解釈と具体的なトンネル確率の評価に対して強力な道具となるからである。

しかし、具体的な系を当てるまでもなく、勝手に与えられた初期状態と終状態を有限のステップ n で結ぶ複素軌道のうち、最小の作用虚部をもつ軌道が力学系として特別な意味をもつことは到底期待できない。それどころか具体例を当たってみると、実は、最小の作用虚部を与える可能性のある複素軌道は極めてたくさん存在し（しかも、ステップ数と共に指数関数的に増大する）、その中で最も小さい作用虚部を与える軌道は、初期および終状態をかえるごとに、また、ステップ数を動かすごとに目まぐるしく交代する [2]。むしろ、比較的同程度の作用虚部をもつ“軌道群”がトンネル効果を支配する、という言い方をした方が、カオスを発生する力学系が下地にあるトンネル効果の状況を的確にとらえているのである。詳しくは論文 [2] を参照されたいが、インスタントに代表される少数の複素軌道がトンネル効果を支配する、という描像は、カオス系では明らかに崩れている。

数値計算をもとにしたそのような観察の結果、いまひとつの立場として、作用虚部が有界な値をとる複素軌道すべてをトンネル効果に寄与する複素軌道とみなす、という問題設定が出てくることになる（ただし、有限のステップでは $\text{Im } S_\gamma < \infty$ は自明であるから、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考える）。

5. エノン写像

でき得る限り問題を単純化する、という方向をさらに進めて、ここでは面積保存のエノン写像をそのモデル系として考える。先に述べたように、物理的な設定として最も望ましいのは、標準写像で言えば摂動の強さが適度な大きさで、KAM トーラスとカオス領域とが混在している場合であり、力学系としては取り扱いの難しい非双曲的な場合である。しかしここでは、アブストラクトな状況で問題の所在を明らかにした上で、しかるのちに、より物理的な設定に戻る、というのが当面の戦略である。

写像 (7) は、 $V(q) = -q^3/3 + cq$ とし、変換 $(p, q) = (y - x, x - 1)$ を施すことでエノン写像 $\mathcal{H}$ の標準形:

$$\mathcal{H}: \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n^2 - x_n + (1 - c) \end{pmatrix} \quad (15)$$

に移る [17]。エノン写像は、多項式自己同型写像の標準形であり [18]、2次元保測写像として、実、複素写像ともに最も解析の進んでいる写像のひとつであるが、加えて、2. で述べた理由によって、動的なトンネル効果が現れるミニマムな力学系でもある。

$n \rightarrow \infty$ でトンネル軌道を峻別するとき、作用虚部 $\text{Im } S_n$ が有限である (絶対収束する場合と条件収束する場合とがあるが) ことは、トンネル寄与軌道の必要条件と考えることができる。作用虚部が有限でないものは、 $\text{Im } S_n \rightarrow -\infty$ となり振幅として 0 になるか、さもなければ、 $\text{Im } S \rightarrow \infty$ となり (詳しく述べなかった) ストークス現象で寄与から外されるか、のいずれかである。したがって、それ以外の

$$\mathcal{C} = \{q_0 = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mid \text{Re } p_0 = \alpha, \text{Im } p_0 = 0, \text{Im } S_n < \infty \text{ (as } n \rightarrow \infty) \} \quad (16)$$

なる集合がトンネル寄与集合である。

一方、複素力学系の観点から軌道を峻別するものは、 $n \rightarrow \infty$ で軌道が有界に留まるか (即ち、 $z = (x, y) \in K^+$)、否か? ($z = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus K^+$) ということである。ここで、 K^+ は (Forward) Filled-in Julia set である。量子トンネル効果の複素力学系による記述において、最も基本的な問いは、これら基本集合間の関係である。

ここでは以下の実面に接近する点の集合 $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \equiv \{(p, q) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{Im } p_n \rightarrow 0, \text{Im } q_n \rightarrow 0 \text{ (as } n \rightarrow \infty)\}. \quad (17)$$

を媒介にすることで両基本集合間の関係を考える。 $(p, q) = (y - x, x - 1)$ なる関係から直ちに (p, q) 座標で実面に接近するとき、エノン写像 (15) の変数 (x, y) でもその虚部はゼロに漸近することがわかる。

さて、具体的に、 (p, q) で書かれた作用 (10) の各項の虚部を書くと、

$$\begin{aligned} s_j &= \text{Re } p_j \text{Im } p_j + (\text{Im } q_j)^3/3 - (\text{Re } q_j)^2 \text{Im } q_j + c(\text{Im } q_j) - \text{Re } q_j \text{Im } q_j - \text{Im } p_{j-1} \text{Re } q_j \\ &+ \text{Re } p_j \text{Im } q_j - \text{Re } p_{j-1} \text{Im } q_j \end{aligned} \quad (18)$$

となる。ここで、 $\text{Im } S < \infty$ であることを $z \in K^+$ である場合と $z = (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus K^+$ とに分けて考える。

$z \in K^+$ の場合

いま、実面に接近し有界に留まる集合を

$$\mathcal{L}^+ \equiv \mathcal{L} \cap K^+ \quad (19)$$

として定義すると、以下が導かれる [19, 20].

- (A) $\mathcal{H}$ は双曲的
- (B) $\mathcal{H}$ の実面上のトポロジカルエントロピーは正

このとき、 $\bar{\mathcal{L}} = J^+$ が成り立つ。

また、(B) の仮定を

(B)' $\mathcal{H}$ のトポロジカルエントロピーは $\log 2$

このとき, $\mathcal{L} = J^+$ が主張できる.

証明は, 任意のサドル周期点 X の安定多様体 $W^s(X)$ が J^+ の中で稠密であること [21] を使う.

一方, $\mathcal{L}^+$ 上の点は, $\mathcal{H}$ が双曲的であるとき, 実面に一様かつ指数関数的に漸近するので, 作用虚部 $\text{Im } S_\gamma$ も絶対収束することが示される [19]. そういうわけで, 結局, K^+ の中の点で実面に接近することは, 半古典和に出てくる作用虚部が絶対収束することの十分条件であり, さらにそのような点の集合 $\mathcal{L}^+$ は, 上記の意味で, J^+ の良い近似になっていることがわかる.

$z \in \mathbb{C}^2 \setminus K^+$ の場合

$\mathbb{C}^2 \setminus K^+$ にある軌道は, $|\text{Im } x_n|, |\text{Im } y_n| \rightarrow \infty$ (as $n \rightarrow \infty$) であっても $|\text{Re } x_n|, |\text{Re } y_n| \rightarrow \infty$ となるため, 作用虚部の絶対収束性を見るにはもう少し微妙な議論が必要になる. 無限遠点近傍での軌道の漸近的な振る舞いを考察するため Böttcher 関数を用いてそのこと検討する.

エノン写像を $\mathcal{H}: (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ とするとき, $g(z)/y^2$ の $\log$ の 1 価な分枝を $\beta(z)$ を $z \in V^+$ の領域で考える. ここで V^+ は, $z \in \overline{V^+}$ ならば常に $\mathcal{H}(z) \in \overline{V^+}$ かつ $(|g(z)| > |y|)$ となるような $\mathcal{H}$ の filtration の領域である [22]. すなわち,

$$\beta(z) = \log\left(\frac{g(z)}{y^2}\right) = \log\left(1 + \frac{c - \delta x}{y^2}\right). \quad (20)$$

このとき, V^+ 内で一様収束する z の関数:

$$\gamma(z) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \beta(F^{j-1}(z)) \quad (21)$$

を用いて定義される V^+ 上の正則関数,

$$\varphi(z) = y \exp[\gamma(z)] \quad (22)$$

は, エノン写像の Böttcher 関数を与える [22]. すなわち,

- (i) $\varphi \circ F(z) = \{\varphi(z)\}^2$
- (ii) $\exists m, M, \quad m \leq \frac{|\varphi(z)|}{|y|} \leq M \quad \text{on } V^+$

(i) より, $\varphi(z_n) = \{\varphi(z_{n-1})\}^2 = \cdots \{\varphi(z_{n-m})\}^{2^m}$ で, V^+ 上では, $|y_n|$ は超指数関数的に増大することがわかる.

ここで, y_n と Böttcher 関数 $\{\varphi(z_0)\}^{2^n}$ と差を, その主要項で見積ると,

$$\begin{aligned} y_n - \{\varphi(z_0)\}^{2^n} &= [\exp(\gamma(z_n)) - 1] \{\varphi(z_0)\}^{2^n} \\ &\sim \frac{1}{2} \left(\frac{\delta x_n - c}{y_n^2} \right) \{\varphi(z_0)\}^{2^n} \\ &\sim \frac{1}{\{\varphi(z_0)\}^{2^{n-1}}} \end{aligned} \quad (23)$$

となり, $|y_n|$ は超指数関数的に増大する一方で, その残差は超指数関数的に減衰することがわかる.

一方, $\varphi(z_n) = \{\varphi(z_{n-m})\}^{2^m}$ であることから, $\varphi(z_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は, いったん, $\varphi(z_m) \in \mathbf{R}$ となると, それ以降 $n \geq m$ では $\varphi(z_n) \in \mathbf{R}$ となる. 従って,

$$B \equiv \{z_0 \mid \arg[\varphi(z_0)] = k\pi/2^m \ (k, m: \text{integer}, z_0 \in V^+)\} \quad (24)$$

として, $z_0 \in B$ から出発した軌道を考えると, そのような軌道は $n \gg 1$ で実面に超指数関数的に接近することになる. このことから, $z_0 \in B$ なる軌道の実部と虚部をやはり主要部で評価すると,

$$\operatorname{Re} y_n \sim \{\varphi(z_0)\}^{2^n} + (\operatorname{Re} y_{n-1})/2 \{\varphi(z_0)\}^{2^n} \sim \{\varphi(z_0)\}^{2^n} \quad (25)$$

$$\operatorname{Im} y_n \sim (\operatorname{Im} y_{n-1})/2 \{\varphi(z_0)\}^{2^n} \quad (26)$$

となる.

さて, (26) を繰り返しことにより, y_n の虚部は, $\operatorname{Im} y_n = \operatorname{Im} y_0 / 2^n \{\varphi(z_0)\}^{2^{n+1}}$ となるので, これを用いて, 作用の虚部 (18) を与える各項の虚部の中で最も支配的な項をまたその主要部で評価すると,

$$(\operatorname{Re} y_n^2)(\operatorname{Im} y_n) \sim \{\varphi(z_0)\}^{2^{n+1}} \operatorname{Im} y_0 / 2^n \{\varphi(z_0)\}^{2^{n+1}} = \frac{\operatorname{Im} y_0}{2^n} \quad (27)$$

となり, $n \rightarrow \infty$ で指数関数的に減少することがわかる. 作用虚部 (18) の各項 s_j の中で最も支配的な項が以上のように振る舞うことより, $z_0 \in B$ なる点の作用虚部は絶対収束することがわかる.

このように, $n \rightarrow \infty$ で実面に漸近する点 $z_0 \in \mathcal{L}$ は, $z_0 \in K^+$, $z_0 \in \mathbf{C}^2 \setminus K^+$ のいかに関わらず, 作用虚部が絶対収束することがわかる. ここでの議論は, トンネル寄与集合 $\mathcal{M}_n^{\alpha, \beta}$ の定義にあるように, 始点 p_0 と終点 p_n の境界条件が考慮されていない, という点で, トンネル寄与集合と複素力学系の基本集合との直接の関係を与えるものではなく, 境界条件が課された集合の $n \rightarrow \infty$ での極限が, $\mathcal{L}$ といかなる関係にあるか? ということは改めて議論する必要がある (この点に関する厳密な議論は, 出版予定の [3] を参照して頂きたい). ここでは, 図 1 に,

3. で導入した $\mathcal{M}_n^{\alpha,*}$ -集合 (終状態は, $-\infty < \beta < \infty$ で動かしたもの) 上の軌道が, $n \rightarrow \infty$ で上で導入した $\mathcal{L}$ に近づくことを示唆する数値計算の結果だけを示す. 図中には, 実面にあるサドル型周期点の安定多様体と初期値面との交点を重ねて描いてある. $\mathcal{M}_n^{\alpha,*}$ -集合をなす曲線の本数は, ステップ数 n と共に 2^n で増加し, $n \rightarrow \infty$ と共に安定多様体との交点が, $\mathcal{M}_n^{\alpha,*}$ -集合をなす各曲線に漸近していく. さら, 図 2 に見るように, 各 n を固定するごとに, $\mathcal{M}_n^{\alpha,*}$ -集合をなす曲線上で, 安定多様体との交点から外れた場所を初期値とする軌道は, 上記の K^+ 外における評価で予想されるように, 実面に超指数関数的に漸近する. また, 固定するステップ数 n を増大させると, 超指数関数的に実面に漸近する時間が増えることも見て取れる.

以上で考察した, 作用虚部が絶対収束するという性質はあくまでもトンネル寄与集合であることの必要条件であることは忘れてはならない. 特に, 半古典和 (12) の中に出てくる振幅因子 A_γ に関する議論はここには全く考慮されていないことには注意しなければならない. 実際, カオス系の半古典和を問題にするにあたっては, 振幅因子 A_γ を込めた半古典和の収束性の議論を行うことは場合によっては重要になってくる. 例えば, 半古典的な跡公式では, 周期軌道に対して (12) と同様の和を考えるが, そのときには寄与する軌道の増大数と振幅因子 A_γ の減少率のバランスが和全体の絶対収束性にとって問題になってくる. しかし逆に, 振幅因子 A_γ の性質を用いて, 作用虚部の絶対収束性, という点では, 実面に接近する軌道であれば, $z \in K^+$, $z \in \mathbb{C}^2 \setminus K^+$ いずれの軌道も寄与軌道ということになるが, 振幅因子 A_γ の性質を考慮することで, K^+ 内外の寄与軌道の違いを知ることにもできる可能性がある [3].

(-8.9412373462e-02,-3.4468293383e+00)-(-8.3672549940e-02,-3.4416833301e+00)

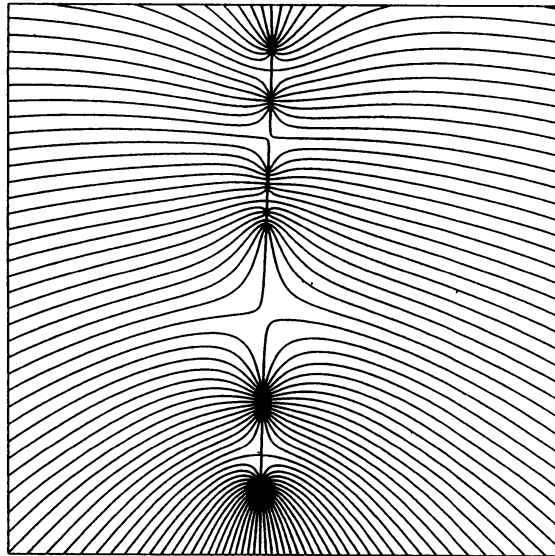


図 1(a) 実馬蹄条件を満たす Hénon 写像の (a) $\mathcal{M}_n$ 集合 (曲線群) と実面上のサドル周期点の安定多様体 $W^s(p)$ と初期値面 $p_0 = \alpha$ との交点 (黒丸).

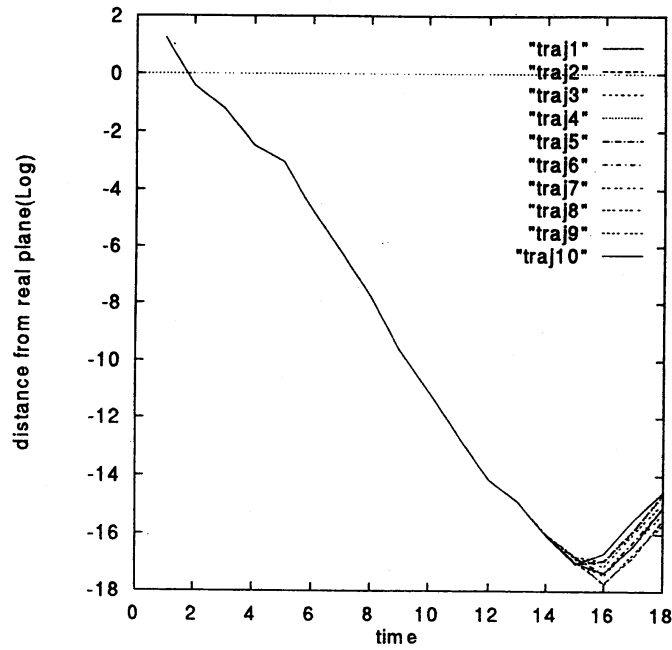


図 1(b) 図 1(a) のサドル周期点の安定多様体 $W^s(p)$ との交点 (黒丸) 近くに初期条件をもつ半古典寄与軌道の実面からの距離のステップ数依存性. ただし, M_n 集合としては $n = 19$ としてあるため, 最後の数ステップで実面から離れる.

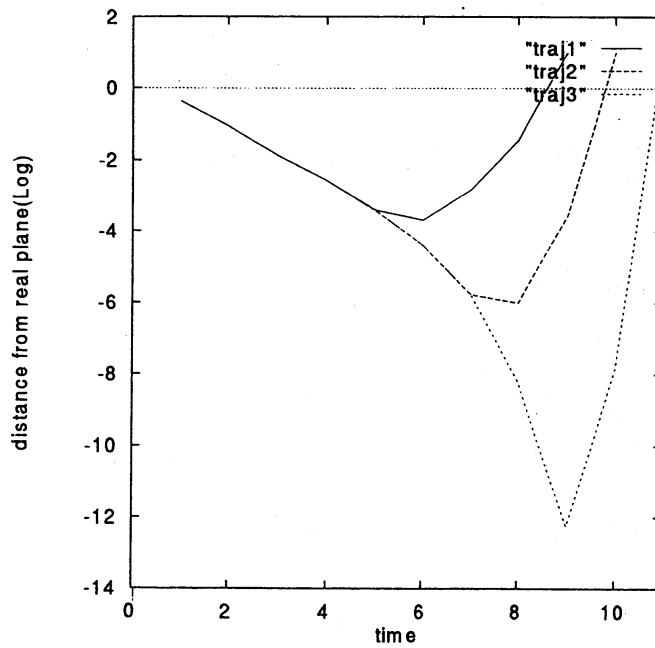


図 2 $M_n^{\alpha,*}$ -集合上を初期点とし, 安定多様体との交点から十分離れた点 ($C^2 \setminus K^+$ に属する点) を初期条件とする軌道の実面からの距離のステップ数依存性. 3つの曲線は, ステップ数の異なる3種類の $M_n^{\alpha,*}$ -集合上の点から始めたもの.

以上で考察したエノン写像, 特に, $z \in K^+$ の考察では, 馬蹄条件, あるいは双曲性条件を仮定した. これは, 先に強調したように, 通常の物理的な意味での量子トンネリングからは逸脱した, もっとも抽象化された意味でのトンネル効果を考えていることになる. しかし, 以上と類似の結果が非双曲系でも成り立っていることが示されれば (具体的な証明の方法はさておき), カオスを発生する高次元系では, 従来のトンネル軌道を代表するインスタント軌道ではなく, ジュリア集合という複素力学系の基本集合がトンネル軌道を記述する基本的な軌道群である, という著しい事実を明確に主張できることになり, その意義は大きい. その点で, 作用の収束性を手がかりに複素トンネル軌道を複素力学系の諸概念と結びつける, というアプローチは極めて有望でありさらに推し進める必要がある.

本稿は, 石井豊氏 (九大理) との共同研究をもとに書かれたものであることを最後に付記します.

参考文献

- [1] C.G. Callan, Jr., and S. Coleman, Phys. Rev. D **16**(1977)1762; S. Coleman, “The Use of Instantons”, in *The Whys of Subnuclear Physics*, edited by A. Zichichi(Plenum, New York, 1979); W.H. Miller, J. Chem. Phys. **62**(1975)1899; A.O. Calderia and A.J. Leggett, Ann. Phys. (NY) **149**(1983)374.
- [2] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **74**(1995)682; Physica D**115**(1998)234.
- [3] 首藤啓, 石井豊, 池田研介: 『数理物理の諸問題と力学系』報告集 p.139(東工大, 2000).
- [4] S.C. Creagh and N.D. Whelan, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4975; *ibid*, **82**(1999)5237; *ibid*, **84**(2000)4084; S.C. Creagh, in “*Tunneling in Complex Systems*” eds. S. Tomsovic (World Scientific, 1998) pp, 35-100.
- [5] O. Bohigas, D. Ullmo and S. Tomsovic, Phys. Rep. **223**(2), 45(1993); S. Tomsovic and D. Ullmo, Phys. Rev. E **50** (1994) 145.
- [6] S. Frischat and E. Doron, Phys. Rev. E**75**(1995), 3661.
- [7] K. Takahashi and K.S. Ikeda, Ann. Phys. **283**(2000)94; Phys. Rev. Lett. in press.
- [8] J.H. Hannay and M.V. Berry, Physica D**1** (1980) 267.
- [9] J.P. Keating, Nonlinearity, **4**(1991)309.
- [10] J.P. Keating, Nonlinearity, **4**(1991)277.

- [11] A. Bouzouina and S. de Bievre, Commun. Math. Phys. **178**(1996)83; F. Bonechi and S. de Bievre, Commun. Math. Phys. **211**(2000)659.
- [12] N.L. Balazs and A. Voros, Phys. Rep. **143**(1986)109.
- [13] N.L. Balazs and A. Voros, Ann. Phys. **190**(1989)1; M. Saraceno, Ann. Phys. **199**(1990)37.
- [14] M Saraceno and A. Voros, Physica D**79**(1994)206.
- [15] A. Shudo and K.S. Ikeda, Phys. Rev. Lett. **76**(1996)4151.
- [16] 首藤啓, 池田研介: 数理解析研究所講究録 **1133**(2000)56.
- [17] M. Hénon, Comm. Math. Phys. **50**(1976) 69.
- [18] S. Friedland and J. Milnor, Ergod Th. and Dynam. Sys. **9**(1989) 67.
- [19] Y. Ishii, private communication.
- [20] A. Shudo, Y. Ishii and K.S. Ikeda, in preparation.
- [21] E. Bedford and J. Smillie, Invent. Math. **103**(1991)69; J. Amer. Math. Soc. **4**(1991)657.
- [22] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, (Cambridge Univ. Press, 2000).