

FMS-Principle の拡張

問合文教研 倉田令一朗 (Reijiro Kurata)

I PH-Principle とその拡張 $[K1], [K2]$ の要約と訂正

Notation

$< : =$ Primitive recursive wellordering on $\mathbb{N}$ isomorphic to ε_0

$\Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)} :=$ uniform reflection principle over PA for Σ_n^0 -formulas

$f: \omega \rightarrow \omega$ は関数, $k, e, r, M \in \omega$ と $\vdash$ と $\vdash^*$

$M \xrightarrow{f} (k)_r^e := \forall P: [M]^e \rightarrow r, \exists X \subseteq M [(i) X \text{ is homogeneous for } P, (ii) |X| \geq k$

(iii) X is f -large i.e. $f(\min X) \leq |X|$

$PH(f) := \forall k \forall e \forall r \exists M (M \xrightarrow{f} (k)_r^e)$

$f_n \in \omega^{\omega}$ の Δ_n -function が dominate する strictly increasing Δ_n -関数

と $\vdash$. この k は関数 k 存在する ($[K2]$ 1.4.3)

$PH_n^* := f \text{ is } \Delta_n\text{-function} \rightarrow PH(f)$

$WFP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ (well founded principle) $:= f \text{ is } \Delta_n\text{-関数} \rightarrow \exists x (f(x+1) \leq f(x))$

$LSP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ (Large set principle) $:= f \text{ is strictly increasing } \Delta_n\text{-function}$

$\rightarrow \forall \alpha < \varepsilon_0 \forall m \exists k ([m, k] \text{ is } \alpha\text{-}f\text{-large i.e. } f[m, k] \text{ is } \alpha\text{-large})$ (c.f. [K.S])

定理1 次の2系列の命題を考える。

- (1) $\Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)}$, PH_n , $PH(n)$
 (2) PH_n^* , $WFP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$, $LSP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$, $TI_{\Pi_n}^{\varepsilon_0}$ (Π_n -formula に関する超限帰納法)

とあり、(1)(2)の各命題の形式的表現は PA における同値である。

- (1) の命題 $\varphi \rightarrow \exists P_n$ (2) の命題 $\varphi \rightarrow \exists P_n^*$ とする。

$$PA \vdash P_{n+1} \rightarrow P_n^* \quad PA \vdash P_n^* \rightarrow P_n$$

[注] 1) 定理 1 (1) 中の PH_n は [K1] §3. Def 4 ([K2], 1.2.3) における定義と一致する。このことは明示する必要はない。

2) “ f は Δ_n -function $\rightarrow \square$ ” の形の命題の形式的表現として
 “ $\psi(x, y) \leftrightarrow \theta(x, y) \wedge \forall x \exists y \psi(x, y) \wedge f = \ulcorner y \psi(x, y) \urcorner \rightarrow \square$ ” と意味する。

ここに ψ, θ は Σ_n^0 の Π_n^0 , Σ_n^0 -formula of PA である。

3) f_n の形式的表現の ω に関する性質が仮定される。

“ f_n is strictly increasing Δ_n -function and

f is a Δ_n -function $\rightarrow f_n$ dominate f ” の PA での証明可能

4) [K1], [K2] の $PA \vdash P_n \leftrightarrow P_n^*$ とあるのは同値性を訂正する。

P_n^* は Π_{n+1} -sentence ではなく、 Π_{n+2} -sentence である。

$PA, TI_{\Pi_n}^{\varepsilon_0} \vdash Con(PA + \Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)})$ ならば $PA \vdash \Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)} \rightarrow TI_{\Pi_n}^{\varepsilon_0}$ である。

2. (新井敏康氏の指摘)

5) (1) の命題の同値性の証明は [K1] §3 ではなく [VT]。

(2) における $LSP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0} \leftrightarrow WFP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ の証明は [K2] 2.5.5.

$WFP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0} \leftrightarrow TI_{\Pi_n}^{\varepsilon_0}$ は [K2] 2.5.6.

$PH_n^* \rightarrow LSP_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ は事実上 [K2] 2.6.1

$WFP_{\Delta_1^1}^{\omega} \rightarrow PH_{\Delta_1^1}^*$ is actually [K2] 2.7.4 is a $\exists$.

II FMS-Principle

2.1. RT(2, <ω) (Ramsey theorem for 2, <ω)

$[X]^{<\omega}$ ($X \subseteq \omega$) is the set of all finite subsets of X

$C \subseteq [X]^{<\omega}$ is d-closed (downward closed) $\iff t \in C \implies s \in C$ (s is a initial segment of t) $\iff \exists s \in C$

$(C_i)_{i < r}$ ($C_i \subseteq [X]^{<\omega}$) is d-closed r -covering $\iff C_i$ is d-closed and $\bigcup_{i < r} C_i = [X]^{<\omega}$

$C_i \subseteq [X]^{<\omega}$ pairwise disjoint $\iff (C_i)_{i < r}$ is d-closed r -partition $\iff$ i.

$Y(\subseteq X)$ is homogeneous for a r -covering $(C_i)_{i < r}$ of $[X]^{<\omega}$

$\iff \exists i < r; Y^{<\omega} \subseteq C_i$

$RT(2, <\omega) \iff [X]^{<\omega}$ has a d-closed 2-covering $(C_0, C_1) \iff \exists X \subseteq \omega$

(infinite) s.t. X is homo for (C_0, C_1)

it) $RT(2, <\omega)$ is $\Pi_1^1([Q, P])$

2.2. FMS-Principle

2.2.1 n -dense set X is finite set $\subseteq \omega$ s.t. $\exists$.

X is 0-dense $\iff |X| \geq 2$ $|X| \geq \min X$

X is $(n+1)$ -dense $\iff \exists$ d-closed 2-covering $(C_i)_{i < 2}$ of $[X]^{<\omega}$ s.t. C_i is

s.t. C_i is homogeneous $\wedge$ n -dense subset of X s.t. $\exists$ $\exists$.

2.2.2 FMS-principle $\iff \forall n \exists X$ (X is an n -dense finite set)

$RT(2, <\omega)_0 \equiv ACA_0 + RT(2, <\omega)$ s.t. (c.f. [FMS])

ATR (Arithmetical transfinite recursion) $\equiv$ is

ある $x \in X$ に対して $\{s_0, s_1, c\} \subseteq X$ $\{c\} \in (X)^{<\omega} \subseteq C_0$ であるから

$X = \{s_0, s_1\}$ $|X| = 2$, $\min X = s_0 > 3$ であるから X は k -dense である。

ゆえに $(X)^{<\omega} \subseteq C_1$, $X \subseteq S \setminus \{s_0, s_1\}$ であるから $S \setminus \{s_0, s_1\}$ は k -dense, 同様にして

$S \setminus \{s_{k-2}, s_{k-1}\}$ は k -dense である。

FMS_r , $r \geq 2$ は次の命題を導くことができる。

任意の n に対して次のような M がある。 M 上の r -covering $(C) = (C_i)_{i < r}$ に対して

$X \subseteq M$ であるから X は (C) に対して homogeneous r -dense。

$FMS_r(1)$ は上の X に対して f -large である条件が成り立つ。

補題2 $FMS \rightarrow FMS_r$ in PA

[証明] FMS を仮定する。任意の $S \subseteq \mathbb{N}$ に対して $FMS_{2,S}$ が成立する。 M は $n+S$ -dense set であるから M が所定の性質をもつことと S の性質とを同時に証明する。

M は $n+S$ -dense set であり、 $r = 2^S$ とおいて $(C_i)_{i < r} \in [M]^{<\omega}$ は r -covering である。

$D_0 = C_0 \cup \dots \cup C_{r-1}$, $D_1 = C_{\frac{r}{2}} \cup (C_{\frac{r}{2}+1} \cup \dots \cup C_{r-1}) \cup [M]^{<\omega}$ は 2 -covering

であるから $Y \subseteq \mathbb{N}^M$ であるから Y は $n+S-1$ -dense であり $Y \subseteq D_0$ であるから $Y \subseteq D_1$

$Y \subseteq D_0$ であるから $C'_i = (C_i \cap Y)^{<\omega}$ $i < \frac{r}{2} = 2^{S-1}$ とおいて $(C'_i)_{i < \frac{r}{2}}$ は Y の

2^{S-1} -covering であるから帰納法を仮定により $X \subseteq Y$ であるから X は n -dense

であり $(X)^{<\omega} \subseteq C'_i \subseteq C_i$ for some i . ゆえに X は homogeneous for $(C_i)_{i < r}$.

$Y \subseteq D_1$ であり同様である。

任意の $r \geq 2$ に対して $r \leq 2^S$ とおいて S は n の r -covering は 2^S -covering である。

FMS_r が成立する。

補題3 $(C_i)_{i < r}$ $(C'_j)_{j < s}$ は $(X)^{<\omega}$ の d -closed r, s -covering である。

$(D_r)_{r \in r.s} = (C_i \cap C'_j)_{i \in r, j \in s}$ is a d -closed $r.s$ -covering iff $r \geq 2$

H is (D) iff it is homogeneous for r iff (C) iff it is homo for (C') iff it is homo for

ad.

補題 4. ([PH] 2.12) 任意の自然数 $p \in M$ に対して $p+1$ -partition $(D_i)_{i \in p+1}$ が $r \geq 2$, X is (D) -homo for $|X| \geq 2$ for $p \leq \min X$ $[M]^{\leq \omega}$ is d -closed

[証明] $Q: [M]^{\leq \omega} \rightarrow p+1$ を次のように定義する.

$$\forall Y \in [M]^{\leq \omega} \quad Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\} \text{ に対して}$$

$$Q(\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}) = \min(y_0, p)$$

$$X \text{ is } Q\text{-homo for } |X| \geq 2, X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} \text{ に対して}$$

$$x_0 < p \text{ ならば } Q(\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}) = \min(x_0, p) = x_0$$

$$Q(\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}) = \min(x_1, p) > x_0$$

したがって X is Q -homo for である。したがって $x_0 \geq p$.

補題 5 $FMS(t)$ for t . 任意の n に対して n -dense X for

$$\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) < y \text{ である } t \text{ が存在する。}$$

[証明] $p \geq 2 \in M$ に対して. 補題 4 を $[M]^{\leq \omega}$ partition (D) として.

$[M]^{\leq \omega}$ 2-partition $(C) = (C_i)_{i \in 2}$ を次のように定義する

$$X \in [M]^{\leq \omega} \text{ に対して } X \in C_0 \iff \forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) < y$$

補題 3 を $t \geq 2(C), (D)$ と combine して $(E) = (E_i)_{i \in r}$ となる。

$FMS(t)$ for t 補題 2 と同様にして $FMS_r(t)$ が成立する; 任意の n に対して $FMS_r(t)$ に適合する集合 $X \in M$ として M 上の (E) を考える。

したがって $Y \subseteq M$ が存在して Y is n -dense f -large for (E) -homo,

[FMS] Th. 2.1 に示すように証明の一部分は X の f_m の増加性や
は無関係に成立する。ゆえに $I \models Th \Pi_m^0$ である。

また $a \in I \Rightarrow f_m(a) \in I$

$a < \min(X_i)$ $X_i = \{s_0, s_1, \dots, s_{i-1}\}$ と $X_j \subseteq X_i (j < i)$ である。

補題 1 の証明中の (C_0, C_1) は (C_0^j, C_1^j) $j > i$ である。

十分大なる j に対して $X_j \subseteq \{s_2, \dots, s_{i-1}\}$ である。

(2) $a < f_m(a) < f_m(s_0) < s_1 < \min(X_j)$, ゆえに $f_m(a) \in I$

$\varphi_i = \forall v_0 \exists v_1 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$ $\psi \in \Pi_0^0$

は true Π_m^0 -sentence である。

$h_1(v_0) = \mu v_1 \forall v_2 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$

$h_3(v_0, v_2) = \mu v_1 \forall v_4 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2, \dots, v_{i-1})$

$h_5(v_0, v_2, v_4) = \mu v_1 \forall v_6 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2, h_3(v_0, v_2), \dots, v_{i-1})$

$h_1^*(u_0) = \max\{h_1(v_0); v_0 \leq u_0\}$

$h_2^*(u_0, u_2) = \max\{h_2(v_0, v_2); v_0 \leq u_0, v_2 \leq u_2\}$

$g(x) = \max\{h_1^*(x), h_3^*(x, x), h_5^*(x, x, x), \dots\}$ である。

$h_i = h_i^*$ g は Δ_{m-1} -function である。

$a \in I$ ならば $h_i(a) \in I$ である。

$a_0, a_2, \dots, a_{i-1} \in I \Rightarrow h_i(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) \in I$ である。

$a_0, a_2, \dots, a_{i-1} \in \mathbb{N}$ である。

$a = \max(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) > \mathbb{N}$

$h_i(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) \leq h_i^*(a_0, \dots, a_{i-1}) \leq h_i^*(a, a, \dots, a) \leq g(a) < f_m(a) \in I$

(g は Δ_{m-1} であり f_m が g を支配する, a は nonstandard であり $g(a) < f_m(a)$)。

φ a Skolem-function s.t. $I \models \varphi$ iff $I \models \varphi$ and $I \models \varphi$.

$\exists x \varphi \rightarrow I \models \varphi$

Reference

- [FMS] Friedman, McAloon, Simpson
in "PATRAS Logic Symposium, North Holland" (1982)
- [G,P] Galvin, Prikey in "J. Symb. Logic 38" (1973)
- [K,S] Ketonen, Solovay in "Ann. of Math. 113" (1981)
- [KI] Kurata in "Saitama J. 2" (1984)
- [KII] Kurata in "Ann. of Pure & Applied Logic 31" (1986)
- [M] McAloon in "Springer L.N. in Math. 710" (1979)
- [P,H] Paris, Harrington in "Handbook of Math. Logic" (1977)
- [vT] van der Tweer in "Springer L.N. in Math. 872" (1979)