

Stability of Periodic Time Dependent Dynamical Systems

名大 教養部 池上宜弘

§ 0.

Periodic time dependent dynamical system のある種の安定性, $\tilde{\Omega}$ -stability, を [1] に於て定義した. この小論では, この定義の必然性について少し詳しく説明し, [1] の結果を発展させた定理を述べる.

§ 1.

多様体 M 上の time dependent dynamical system とは次の形の方程式をいう.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \text{----- (1)}$$

以後, M は境界を持たない compact manifold とする. (1) は次の様な $M \times \mathbb{R}$ 上のベクトル場 X と対応する.

$$X_{(x,t)} = (f(x,t), 1) \in T_x(M) \times T_t(\mathbb{R}) \approx T_{(x,t)}(M \times \mathbb{R}) \quad \text{----- (2)}$$

(1)が $f(x, t) = f(x, t+1)$ をみたすとき, この system は 周期 1 を持つという. M 上の周期 1 を持つ C^r 級の time dependent dynamical system 全体が作る集合を $P^r(M \times \mathbb{R})$ で示すことにする.

(x_0, t_0) を初期値とする (1) の解

$$\varphi(x_0, t_0, \cdot): \mathbb{R} \longrightarrow M \quad (t \longmapsto \varphi(x_0, t_0, t))$$

を (x_0, t_0) から出る M 上の軌道 ということにする. $\varphi(x_0, t_0, t)$ を $\varphi_t(x_0, t_0)$ と書く. $\varphi(x_0, t_0, \cdot)$ の像を 軌跡 といふが, 軌道 という言葉で軌跡を意味することもある. $\varphi(x_0, t_0, \cdot)$ が 周期軌道 であるとは, 実数 σ _($\sigma \neq 0$) が存在して任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\varphi_{t+\sigma}(x_0, t_0) = \varphi_t(x_0, t_0)$ が成立することである. 周期軌道に対して, この σ は正数にとれる. この様な σ の最小正数 σ_0 をこの 軌道の周期 といふ. 上の σ は σ_0 の整数倍である.

$X \in P^r(M \times \mathbb{R})$ に対して $M \times S^1$ 上の autonomous system $\bar{X}$ が次の様に定義される. $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と考えて, 写像 $\rho: M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times S^1$ は $\rho(x, t) = (x, [t]) \in M \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ により定義されるものとする. ただし, $[t]$ は t を含む $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の class である. このとき,

$$\bar{X}_{(x, [t])} = (f(x, t), 1) \in T_x(M) \times T_{[t]}(S^1) \approx T_{(x, [t])}(M \times S^1)$$

により $\bar{X}$ が与えられる. つまり, $\bar{X}$ は $M \times \mathbb{R}$ 上の system X を, $M \times S^1$ 上に最も自然に巻きつけて得られるものである.

$X \in P^r(M \times R)$ の flow を $\Phi: (M \times R) \times R \rightarrow M \times R$ であらわし, $\bar{X}$ の flow を $\bar{\Phi}: (M \times S^1) \times R \rightarrow M \times S^1$ であらわすことにする. $\pi_M: M \times R \rightarrow M$ 又は $\pi_M: M \times S^1 \rightarrow M$ を M 成分への射影とすると,

$$\pi_M \circ \Phi(x, t_0, t) = \varphi(x, t_0, t) = \pi_M \circ \bar{\Phi}(x, [t_0], t)$$

が成立する. $\Phi(x, t_0, \cdot)$ を X の $M \times R$ 上の軌道, その像を $M \times R$ 上の軌跡 といい, $\pi_M \circ \Phi = \varphi$ が周期軌道であるとき, Φ を $M \times R$ 上の周期軌道 という.

$X \in P^r(M \times R)$ に対し C^r 微分同相写像 $T_X: M \rightarrow M$ が, $T_X(x) = \varphi_1(x, 0)$ により定義される. $M_0 = M \times [0] \subset M \times S^1$ とすると, M_0 は $\bar{X}$ の cross-section であるが, $M_0 = M$ と考えるとき, T_X は $\bar{X}$ に関する M_0 上の Poincaré transformation と一致する. 従って, 以後 T_X を X に対する Poincaré map と呼ぶことにする. 任意の t に対して $\varphi(x, t_0, t) = x$ となる x を X の 特異点 といい, $\varphi(x, t_0, \cdot)$ が周期軌道であるとき, (x, t_0) は X の 周期点 という.

Proposition 1. x が T_X の周期点. (不動点も含む.)

$\iff (x, 0)$ が周期を有理数とする X の周期点, 又は x が特異点.

$\iff (x, [0]) \in M_0$ を通る $\bar{X}$ の軌道は閉軌道.

特に, $(x, 0)$ の周期を $\frac{m}{n}$ (既約分数) とするとき, x は n

を周期とする T_X の周期点である。

Proposition 2. $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$ とし、各々の Poincaré map を T_X, T_Y とするとき、同相写像 T_X, T_Y は topologically equivalent であるならば、 $\bar{X}, \bar{Y}$ は topologically equivalent である。

注意 ある境界を持たない compact manifold M に対し、次の条件を持つ $X, Y \in P^0(M \times \mathbb{R})$ が存在する； (i) $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ は topologically equivalent, (ii) T_X と T_Y は topologically equivalent ではない, (iii) T_X, T_Y は, Morse-Smale system である。

Proposition 1, 2 により、 T_X の軌道の状態から X の軌道に関する情報がある程度得られる。N. Levinson は、ある種の X に関する Poincaré map T_X について、特に T_X の周期点の数についてしらべている [4]。

しかし、 T_X の軌道の状態からは X の軌道の状態は十分には分らない。たとえば、 x が T_X の不動点としても、 $(x, 0)$ が X の周期点なのか持異点なのか分らない。

例. 2階微分方程式

$$x'' - A^2 x = \varepsilon \sin 2\pi t, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A \neq 0 \quad \dots (*)$$

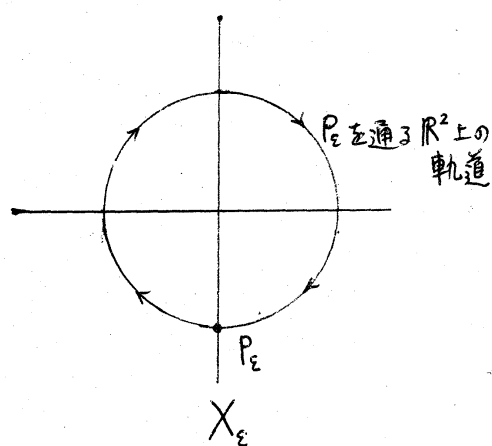
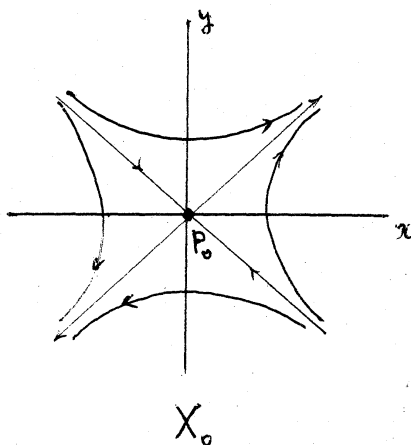
の一般解は

$$x(t) = c_1 e^{At} + c_2 e^{-At} - \frac{\varepsilon}{4\pi^2 + A^2} \sin 2\pi t$$

である。(*) は次の time dependent system $X_\varepsilon \in P^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ と同じである。

$$X_\varepsilon: \begin{cases} x' = y \\ y' = A^2 x + \varepsilon \sin 2\pi t \end{cases}$$

X_ε の Poincaré map を T_ε とする. $\varepsilon = 0$ のとき, T_0 は唯一つの周期点 (不動点) $P_0 = (0, 0)$ を持つ. 実は, P_0 は hyperbolic な不動点であるから, ε が十分小さければ T_ε は P_0 の近傍に hyperbolic な不動点 P_ε を1つ持つはずである. P_ε は T_ε の唯一つの周期点である. 故に, Poincaré map に関して, P_0 と P_ε は全く同じ定性的性質を持つ. しかし, X_0 と X_ε に関しては, P_0 は特異点であり, P_ε は周期1の周期点である.



P_0 は T_0 の安定な不動点であるか, P_0 を $X_0 \in P^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$ の特異点とすれば, P_0 は安定とは言えない.

上の考察より, $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$ に対して $\bar{X}, \bar{Y}$ 又は T_X, T_Y の topological equivalence は X, Y の M 上の軌跡の位相的状态を保存しない. ここで, X, Y の M 上の軌跡の位相的性質を保存するような equivalence を X, Y に対して定義する.

定義 1. $X, Y \in P^r(M \times \mathbb{R})$ が equivalent であるとは、同相写像 $h_0: M \rightarrow M$, $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$ が存在し、次の条件を満たすことである。

i) h は $M \times \mathbb{R}$ における X の軌跡を Y の軌跡に方向を保てうつす。(すなわち、 h は X, Y の topological equivalence.)

ii) $\pi_M h = h_0 \pi_M$. すなわち、次の図が可換である。

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & M \times \mathbb{R} \\ \downarrow \pi_M & \circlearrowright & \downarrow \pi_M \\ M & \xrightarrow{h_0} & M \end{array}$$

iii) h は時間に関して周期 1 を持つ；

$$h(x, t+1) = (\pi_M h(x, t), \pi_R h(x, t) + 1) \in M \times \mathbb{R}.$$

ただし、 $\pi_R: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 成分への射影である。

Proposition 3. X, Y が equivalent ならば、 X の M 上の軌跡 $\phi^X(x, t_0, \mathbb{R})$ の h_0 による像は Y の 1 つの軌跡 $\phi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$ となる。

Proposition 4. h が X から Y への equivalence で、軌跡 $\phi^X(x, t_0, \mathbb{R})$ が h により軌跡 $\phi^Y(y, s_0, \mathbb{R})$ へ写せれるとき、 $\phi^X(x, t_0, \cdot)$ が有理数を周期とする周期軌道ならば、 $\phi^Y(y, s_0, \cdot)$ もそうである。その上、各々の周期を $n_x/m_x, n_y/m_y$ (既約分数) とすれば、 $n_x = n_y$ である。従って、 M 上の有理数を周期とする軌跡は h_0 により有理数を周期とする軌跡にうつされ、特異点

は特異点にうつされる。

定義1の equivalence は, Proposition 3, 4 をみたす自然な equivalence のうちで最も条件のゆるいものと思われる。

次に, 無理数を周期とする周期軌道の様子を示しておく。実際に無理数を周期とする周期軌道を持つ $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$ を作ることができる。又, 有理数を周期とする $M \times \mathbb{R}$ 上の周期軌道 γ で, $\pi_M(\gamma)$ が単純閉曲線でないようなものを持つ X も作ることができる。

Proposition 5. $X \in P^r(M \times \mathbb{R})$, Φ を X の flow とする。 γ が X の $M \times \mathbb{R}$ 上の軌道で無理数周期 σ を持つとき, 次が成立する。

(i) $p \in \gamma$ に対して, 写像 $[0, \sigma] \rightarrow M$ ($t \mapsto \pi_M \circ \Phi(p, t)$) の像 C は単純閉曲線となる。

(ii) $\pi_M^{-1}(C)$ の任意の点 q を通る軌道 γ_q も周期 σ を持ち, γ_q は $C \times \mathbb{R}$ に含まれる。

(proof) $p_*(X) = \bar{X}$ とし, $\Phi, \bar{\Phi}$ を各々 $X, \bar{X}$ の flow, ρ は X の M 上の軌道とすれば, $(x_0, t_0) \in M \times \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \varphi_t(x_0, t_0) &= \pi_M \circ \Phi_t(x_0, t_0) = \pi_M \circ \rho \circ \Phi_t(x_0, t_0) \\ &= \pi_M \circ \bar{\Phi}_t(x_0, [t_0]). \quad (\pi_M: M \times S^1 \rightarrow M) \end{aligned}$$

任意の点 $(x_0, t_0) \in \gamma$ に対して, $\varphi_t(x_0, t_0) = \varphi_{t+s}(x_0, t_0)$ をみたす正数 s の最小数が σ である。 $p(\gamma) = \bar{\gamma}$ は $\bar{X}$ の軌道で

ある. $p(x_0, t_0) = (x_0, [t_0]) \in \bar{Y}$ を p とおけば, $x_0 \times S^1$ 上には $\{\bar{\Phi}_{n,r}(p) | n \in \mathbb{Z}\}$ が dense に存在する. 今 $0 < \tau < \delta$ なる τ が存在して, $\pi_M \bar{\Phi}_\tau(p) = x_0 (= \pi_M(p))$ と仮定する. $\bar{\Phi}_\tau(p) = q$ とおけば, 数列 $\{n_i\} \subset \mathbb{Z}$ が存在して, $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_{n_i, r}(p) = q$. 故に,

$$\bar{\Phi}_s(q) = \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_\tau(p) = \bar{\Phi}_s \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_{n_i, r}(p) = \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i, r}(p).$$

従って,

$$\pi_M \bar{\Phi}_s(q) = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi_M \bar{\Phi}_s \bar{\Phi}_{n_i, r}(p) = \pi_M \bar{\Phi}_s(p).$$

故に,

$$\pi_M \bar{\Phi}_\tau(\bar{\Phi}_s(p)) = \pi_M \bar{\Phi}_s(p).$$

これより, $\bar{\Phi}_\tau \bar{\Phi}_s(x_0, t_0) = \bar{\Phi}_s(x_0, t_0)$ を得るが, $\bar{\Phi}_s(x_0, t_0)$ は Y の任意の点としてよいから, $0 < \tau < \delta$ より, この式は δ が Y の周期である事に矛盾する. 故に (i) が証明された. (ii) も同様の方法で示される.

§ 2.

$P^r(M \times R)$ における安定性を考察するために, $P^r(M \times R)$ に位相を入れる. $M \times R$ 上の C^r 級 vector 場の空間と考え, $P^r(M \times R)$ には uniform C^r topology を入れる. もしも, Whitney topology を入れたら, $P^r(M \times R)$ は discrete space になる.

$T_{(\alpha, s)}(M \times S^1) \approx T_\alpha(M) \times T_s(S^1)$ を同一視して,

$$\mathcal{X}_1^r(M \times S^1) = \{\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1) \mid \bar{X}_{(\alpha, s)} \text{ の } T_s(S^1) \text{ 成分} = 1\}$$

とする. これは, $M \times S^1$ 上の C^r vector 場全体の作る集合に C^r topology を入れた空間 $\mathcal{X}^r(M \times S^1)$ の部分空間である. 写像 p :

$M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times S^1$ より写像 $p_*: p^r(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1^r(M \times S^1)$ が自然に得られる. するはち, $p_*(X) = \bar{X}$, $X_{(\alpha, t)} = (f(\alpha, t), 1) \in T_\alpha(M) \times T_t(\mathbb{R})$ とすると, $\bar{X}_{(\alpha, [t])} = (f(\alpha, t), 1) \in T_\alpha(M) \times T_{[t]}(S^1)$ である. $p_*: p^r(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1^r(M \times S^1)$ は同相写像である.

定義1の equivalence に関して (structurally) stable な system を一般の M の上に採することは難しい^{自動的} ようなので, Ω -stability に相当するものについて考えたい. $X \in p^r(M \times \mathbb{R})$ は微分方程式 (1) に対応するものとし, φ, ψ を各々 M 上, $M \times \mathbb{R}$ 上の軌道とする.

定義2. 次の条件を満たす点 $\alpha \in M$ を X 又は方程式 (1) の wandering point といい; 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対して, α の開近傍 $U \subset M$ と自然数 n が存在して, $|t| > n$ なる任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\varphi_t(U, t_0) \cap U = \emptyset$ が成立する. wandering point ではない点を non-wandering point といい. non-wandering point 全体から成る集合を X の non-wandering set といい, $\omega(X)$ であらわす.

定義3. 次の条件を満たす $M \times \mathbb{R}$ の点 (α, t) の集合として, $\tilde{\Omega}(X)$ を定義する; (α, t) の任意の開近傍 $U \subset M \times \mathbb{R}$ と任意の自然数 n に対して, 整数 m , $|m| > n$, が存在して, $U_m \cap \psi_m(U) \neq \emptyset$ となる. ただし, $U_m = \{(y, s+m) \mid (y, s) \in U\}$ とする.

M 上又は $M \times \mathbb{R}$ 上の周期軌道や特異点は $\omega(X)$ や $\tilde{\Omega}(X)$ に含まれている。 $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S^1)$ に対して, 自励系 $\bar{X}$ の non-wandering set を $\Omega(\bar{X})$ であらわす。

Proposition 6.

(i) $p_*(X) = \bar{X}$ とすれば, $\tilde{\Omega}(X) = p^{-1}(\Omega(\bar{X}))$ である。従って, $\tilde{\Omega}(X)$ は X の invariant set である。

(ii) $\omega(X) = \pi_M(\tilde{\Omega}(X)) = \pi_M(\Omega(\bar{X}))$. (ただし, π_M は $M \times \mathbb{R}$ 又は $M \times S^1$ から M 上への射影である, $\pi_M(\Omega(\bar{X})) = \omega(\bar{X})$ とおく.)

(iii) $\omega(X) \subset M$, $\tilde{\Omega}(X) \subset M \times \mathbb{R}$ は閉部分集合である。

(注意) $\tilde{\Omega}(X)$ の定義において, $m \in \mathbb{Z}$ のかわりに $m \in \mathbb{R}$ とすると, $\tilde{\Omega}(X)$ は閉集合で $\pi_M(\tilde{\Omega}(X)) = \omega(X)$ はやはり成立するが, $\tilde{\Omega}(X)$ は invariant set でなくなる。

$\omega(X)$ や $\tilde{\Omega}(X)$ は特異点や周期軌道を含むことや, Proposition 6 や上の注意から察して, $\omega(X)$ や $\tilde{\Omega}(X)$ の構造は定性的に重要である) と考えられる。次に, 定義1の equivalence の概念を non-wandering set 上で定義する。

定義4. $X, Y \in \mathcal{P}^r(M \times \mathbb{R})$ が $\tilde{\Omega}$ -equivalent であるとは, 次の条件を満たす同相写像 $h: \tilde{\Omega}(X) \rightarrow \tilde{\Omega}(Y)$, $h_0: \omega(X) \rightarrow \omega(Y)$ が存在することである;

(i) h は $X|_{\tilde{\Omega}(X)}$ と $Y|_{\tilde{\Omega}(Y)}$ の topological equivalence である。

(ii) $h_0 \pi_M = \pi_M h$ が $\tilde{\Omega}(X)$ 上で成立する。

(iii) h は時間に関して周期 1 を持つ.

$\tilde{\Omega}\omega$ -equivalence を ρ や ρ_* を使って $\mathcal{X}_1^r(M \times S')$ 内に焼き直し概念として, 次のものが定義される.

定義 5. $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S')$ が $\Omega\omega$ -equivalent であるとは, 次の条件を満たす同相写像 $h: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y})$ と $h_0: \omega(\bar{X}) \rightarrow \omega(\bar{Y})$ が存在することである;

- (i) $\pi_M h = h_0 \pi_M$ が $\Omega(\bar{X})$ で成立.
- (ii) 次の条件を満たす isotopy

$H_s: \Omega(\bar{X}) \rightarrow \Omega(\bar{Y}), s \in I$ が存在する;

(a) $H_0 = h, H_1(\Omega(\bar{X}) \cap M_0) = \Omega(\bar{Y}) \cap M_0$, すなわち, H_1 は cross-section M_0 の部分を M_0 にうつす.

(b) 任意の $s \in I$ に対して, H_s は $\bar{X}|_{\Omega(\bar{X})}$ と $\bar{Y}|_{\Omega(\bar{Y})}$ の topological equivalence である.

Lemma 1. X, Y が $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent ならば, $\rho_*(X) = \bar{X}$ と $\rho_*(Y) = \bar{Y}$ は $\Omega\omega$ -equivalent である.

Lemma 2. $\Omega\omega$ -equivalence は closed orbit の周期を保つ. すなわち, Y が $\bar{X}$ の closed orbit ならば $h(X)$ も $\bar{Y}$ の closed orbit で, Y と $h(X)$ の周期は等しい.

定義 6. $X \in P^r(M \times R)$ が $C^r \tilde{\Omega}\omega$ -stable であるとは, X の近傍 $N \subset P^r(M \times R)$ が存在して, 任意の $Y \in N$ は X と $\tilde{\Omega}\omega$ -equivalent であることである. $\bar{X} \in \mathcal{X}_1^r(M \times S')$ に対して $C^r \Omega\omega$ -

stability が同様に定義される。 $\bar{X}$ の近傍 $N \subset \mathcal{X}^r(M \times S')$ が存在して、任意の $\bar{Y} \in N$ に対して、 $\bar{X}|_{\Omega(\bar{X})}$ と $\bar{Y}|_{\Omega(\bar{Y})}$ が topologically equivalent であるとき、 $\bar{X}$ は $C^r\Omega$ -stable であるという。

§3.

次に、 Ω -stability の特徴づけについて考えてみたい。 M と S' に Riemannian metric d と d' を任意に与えておく。

定義 1. $\bar{X} \in \mathcal{X}^r(M \times S')$ に対し、 $\Omega(\bar{X})$ が π_M に関して general position にあるとは、次の条件がみたされることである。

(i) $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の軌道 γ に対し、 $\pi_M|_{\gamma}$ は正則な写像である。

(ii) $\dim M \geq 3$ のとき、

(a) $K > 0$ が存在して、 $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の異なる 2 点 $(x, s), (y, t)$ に対して、次の式が成立する、

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t).$$

(ii') $\dim M = 2$ のとき、

(b) $K > 0$ が存在して、 $\Omega(\bar{X})$ に含まれる任意の相異なる 3 点 $(x, s), (y, t), (z, u)$ に対して、次の式の少なくとも 1 つが成立する；

$$d(x, y) > K \cdot d'(s, t),$$

$$d(y, z) > K \cdot d'(t, u),$$

$$d(z, x) > K \cdot d'(u, s).$$

(c) $\pi_M|_{\Omega(\bar{X})}$ に関する任意の 2 重点 $(\alpha, s), (\alpha, t)$ に対して, $(\alpha, s), (\alpha, t)$ を通る $\bar{X}$ の軌道を γ, γ' とするとき, $\pi_M(\gamma)$ と $\pi_M(\gamma')$ は α に於て transversal に交わる.

(注意) (a) より $\pi_M: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$ は self-intersection を持たないことがわかり, (b) より $\pi_M: \Omega(\bar{X}) \rightarrow M$ は 3 重点の self-intersection を持たないことがわかる.

Theorem $X \in P^1(M \times R)$ が $C^1\tilde{\Omega}W$ -stable ならば次のことが成立する.

(i) $p_*(X) = \bar{X}$ は $C^1\Omega$ -stable.

(ii) $\Omega(\bar{X})$ が π_M に関して general position にある.

紙数の都合で, 証明は書かないが, 特に C^1 級であることが必要となる部分を示すと, general position の条件 (ii) を示すのに $C^1\Omega$ -stability であることを使った. 又, C. C. Pugh の general density theorem [5], "周期点は Ω の中で稠密であるという性質は C^1 -topology で生成的である" という結果と, J. Franks の " $C^1\Omega$ -stable ならば周期軌道は双曲型である" という結果 [2] も定理の証明の中で C^1 -topology がきいた部分である. 他には, 特に Lemma 1 と Lemma 2 が本質的な部分である.

Corollary $X \in P^1(M \times R)$ が自然数と異なる周期の周期軌道又は持異点を持てば, X は $C^1\tilde{\Omega}W$ -stable ではない.

(proof) γ が X の (周期) 軌道ならば, $p(\gamma) = \bar{\gamma}$ は $\bar{X}$ の軌道で

ある。 γ の周期 σ が有理数ならば、 $\bar{\gamma}$ は閉軌道だから $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$ である。 σ が無理数ならば Proposition 5 により $\bar{\gamma} \subset \Omega(\bar{X})$ である。 次に、 σ が自然数でないとする。 σ が無理数のときは、 Proposition 5 により $\pi_M: \bar{\gamma} \rightarrow M$ の無限重点がある。 $\sigma = n/m$ (自然数の既約分数) であるとき、 $\pi_M: \bar{\gamma} \rightarrow M$ は m 重点を持つ。 故に $\dim M \geq 3$ ならば、 Theorem により X は $C^1\tilde{\Omega}\omega$ -stable ではない。 $\sigma = n/2$ のとき、 2 重点しか存在しないが、 この π_M の self-intersection に於て $\pi_M(\bar{\gamma})$ は transversal ではない。 故に $\dim M = 2$ の場合も、 Theorem により X は $C^1\tilde{\Omega}\omega$ -stable ではない。

Theorem の逆に関連して、 次の予想を示しておく。

予想. $\dim M \geq 3$, $X \in P^r(M \times R)$, そして $r \geq 2$ とし、 次の条件が満たされているものとする。

- (i) $p_*(X) = \bar{X}$ の Poincaré map $T_{\bar{X}}$ は Axiom A と no-cycle property を満たす。
 - (ii) $\Omega(\bar{X})$ が π_M に関して general position にある。
- すると、 X は $C^r\tilde{\Omega}\omega$ -stable になる。
- 条件 (i) により、 $\bar{X}$ の perturbation $\bar{Y}$ に対して $T_{\bar{X}}$ と $T_{\bar{Y}}$ は Ω -equivalent, 従って $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ は $\Omega\omega$ -equivalent となる。 この Ω -equivalence, $h(\bar{Y}): \Omega(T_{\bar{X}}) \rightarrow \Omega(T_{\bar{Y}})$ の性質は例えば J. Franks [3] 等によって示されているが十分ではない。 $\bar{Y}$ が $\bar{X}$ の C^2 -

perturbation のとき, $h(\bar{Y})$ が Lipschitz topology で十分に恒等写像に近いことが, もし言えるならば, $\Omega(\bar{Y}) \in \pi_n$ に因して general position となる. 従って $\pi_n: \Omega(\bar{Y}) \rightarrow \omega(\bar{Y})$ も同型写像となり, このことから, X が $C^r \Omega$ -stable となる.

文 献

- [1] 池上宜弘, Periodic time dependent dynamical system について, 常微分方程式の定性的研究, 京都大学数理解析研究所講究録, 1976年5月.
- [2] J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. A.M.S. 158 (1971), 301-308.
- [3] —, Differentiably Ω -stable diffeomorphisms, Topology 11 (1972), 107-113.
- [4] N. Levinson, Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. Math. 45 (1944), 723-737.
- [5] C.C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021.