

非定常ストークス方程式の解

東大 理学部 橋本 英典

§ 1. はじめに

ナビエ・ストークスの方程式の慣性項の $\partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ を $\partial \mathbf{V} / \partial t$ で置きかえた非定常ストークス方程式は i) レイノルズ数が小さい ($\rho \sigma L / \mu \ll 1$) とするばかりでなく ii) 流れの変動時間 $1/\omega$ が通過時間 L/U に比べて短かいとき ($\omega L \gg U$) にも有効である。ただし L は代表長さ, U は代表流速, ρ は流体の密度, μ は粘性率である。また解の存在, 唯一性の議論 両方にも重要な役割を演ずる。

ここでは方程式の線型性にもとづき, まず固定点に置かれた $F e^{i\omega t}$ の強さの集物源に対する基本解を導き, その重ね合わせにより一般解を構成する。また非定常性にかかれた物体に依るかと, その物体によっていかにこたれが場の遠くでいかに減衰する間に簡単な関係があることを示す。また強さが任意の時間変化とし, 任意の

運動を行なう集中力源に対する2解を合わせることにより、
構成し、運動速度が一定値に近づくときそれがオセーンの
方程式の基本解（オセーンレット）を与えることを示す。

§ 2. 集中力 $F_p e^{\alpha t} \delta(x-x_p)$ に対する基本解¹⁾

点 x_p に集中力 $F_p e^{\alpha t} \delta(x-x_p)$ が働くときの基本解
は関数 $e^{\alpha t}$ を除く。

$$\nabla \cdot V = 0, \quad (1)$$

$$\rho \alpha V = \mu \Delta V - \nabla p + F_p \delta(x-x_p), \quad (2)$$

あるいは

$$\Delta_E[\mu V] \equiv (\Delta - k^2)[\mu V] = \nabla p - F_p \delta_p \quad (2')$$

を満足する。ここで $k^2 = \rho \alpha / \mu$ ($\text{Re } k > 0$), $\delta_p = \delta(x-x_p)$ (3)

(2) の div をとれば、(1) により

$$\Delta p = (F_p \cdot \nabla) \delta(x-x_p)$$

であるから、圧力 p はラプラスの方程式の基本解

$$\phi_p = \begin{cases} -1/(4\pi r); \dots (3\text{-次元}), \\ \frac{1}{2\pi} \log r; \dots (2\text{-次元}), \end{cases} \quad r = |x-x_p|, \quad (4)$$

を用いて力の方向に軸をとって2次元を出し

$$\phi_p = (F_p \cdot \nabla) \phi_p \quad (5)$$

の形に表わすことが出来る。これを (2') に代入し、ヘルムホルツ方程式の基本解 ($\Delta \chi_p = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p)$)

$$\chi_p = \begin{cases} -e^{-k_0 r}/(4\pi r) & (3\text{-次元}), \\ -\frac{1}{2\pi} K_0(k_0 r) & (2\text{-次元}), \end{cases} \quad (6)$$

(ただし k_0 は第2種の変形ベッセル函数) を用いれば
速度 $\mathbf{V}$ に対し

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{V}_p &= -\frac{1}{k^2} (\mathbf{F}_p \cdot \nabla) \nabla (\phi_p - \chi_p) - \mathbf{F}_p \chi_p \\ &= \frac{1}{k^2} [-\nabla p_p + \text{rot rot} (\mathbf{F} \chi_p)] \quad (7) \end{aligned}$$

が得られる。

(7) の第1項は渦度 ω_p 、 ϕ_p は圧力に関係し、 $\mathbf{F}_p \chi_p$ の項は

$$\mu \omega_p = \text{rot} (\mu \mathbf{V}_p) = \mathbf{F}_p \times \text{grad } \chi_p \quad (8)$$

が示すように 渦度 ω_p を与えれば、純非定常 ($k \neq 0$) であり限り遠く ($k r \rightarrow \infty$) では指数関数的に小さくなる。遠方場が渦度 ω_p により与えられることを示す。

任意の流れの中に置かれた物体による擾乱場は流体に $\mathbf{F}_p$ の力を受ける基本解の重畳 ($\mathbf{F}_p$ の種々の値に対して) により表わされることが (ストークス近似の成り立つ領域で) 遠方場を与えるのは χ_p の重畳によることは指数関数的に小さく (非定常境界層の外)、物体の中心を原点と

37

2重放射出しのポテンシャル場

$$V = \nabla \left(-\frac{1}{\mu k^2} p \right), \quad p = (\mathbf{F} \cdot \nabla) \phi. \quad (9)$$

に近づく。ここに $\mathbf{F}$ は $\mathbf{F}_p$ の総和であって、固定した物体に流体が及ぼす力 $-\mathbf{F}$ の反作用である。こゝに、静止物体に働く力が2重放射出しの形に与えられ、圧力場（遷移速度場）の係数からただちにみいだされることは、 ϕ にフーリエ合成を行ふ、 ϕ もかゝる一般的形式であることが明らかである。

以上では物体が静止してゐるものだが、体積 V_0 の物体が $V_0 e^{at}$ の速度で運動するとき、物体に固定した加速度座標系をとればよい。 $\sim V_0 e^{at}$ の加速度をよめる一様重力場にかける浮力 $\sim \rho V_0 e^{at}$ が物体に働く力につけ加わることがわかる。

また e^{at} を分離した一般解は (15), (17) を流れの外側（あるいは物体内）に分布させ得るものもあり、これを含ませる結果は、一般解として

$$\begin{aligned} \mu V &= -\frac{1}{k^2} (\nabla p + \text{rot rot } \Phi) \\ &= \Phi - \frac{1}{k^2} \nabla (p + \text{div } \Phi) \end{aligned} \quad (10)$$

と与える。ただし p は調和関数

$$\Delta p = 0 \quad (11)$$

Ψ は ヘルムホルツ の 方程式

$$\nabla^2 \Psi = (\Delta - k^2) \Psi \quad (12)$$

を満足するベクトル関数である。

例. 固定球 (半径 a) を過する振動流 $V_\infty (\propto e^{at})$

球面上で $V = -V_\infty$, 無限遠で 0 に近づく場合
 e^{at} を除く定数に

$$p = (\nabla \cdot \nabla) \phi, \quad \frac{F}{6\pi\mu a} = -E V_\infty \quad (13)$$

$$E = 1 + ka + \frac{1}{3} k^2 a^2$$

$$\Psi = -\frac{3\mu a}{2\eta} e^{k(a-r)} \quad (14)$$

で与えられる。 $-F$ は 流体が球に及ぼす力である。

E の第 3 項は F に $-2\pi\rho a^3 \dot{V}_\infty$ を与える (17 時間微分)

さらに $\frac{4\pi}{3} \rho a^3 \dot{V}_\infty$ を加えれば 静止流体中を V_∞ が流れる速度で

振動する球に働く抵抗 $-6\pi\mu a \tilde{E} V_\infty$, $\tilde{E} = E - \frac{2}{9} k^2 a^2$

を与える。一般に $V_\infty (e^{at})$ の流れの中で $V_0 (e^{at})$

の速度で振動する球には $6\pi\mu a E (V_\infty - V_0) + \frac{4\pi\rho a^3}{3} \dot{V}_0$

の力²⁾が働くことも容易にわかる。任意の運動についてはフーリエ合成から

ここでも一般解を用いると V_∞ が場所により場合につ

いて、流体に働く力を $V_\infty(x)$ あるいは $p_\infty(x)$ を用いる

ことができる (Faxén の公式の拡張) こともできる。(次の機会に別)。

§ 3 瞬間集中力による基本解¹⁾

時刻 $t = \tau$ における瞬間集中力 $F(\tau) \delta(t - \tau) \delta(x - x_p)$ に対する基本解 $V_c(x, t)$, $p_c(x, t)$ は

$$\nabla \cdot V_c = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial V_c}{\partial t} = \mu \Delta V_c - \text{grad } p_c + F(\tau) \delta(t - \tau) \delta(x - x_p) \quad (2)$$

から見ておこう。

ラプラス変換 $f^* = \mathcal{L}[f] = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) dt$ ($\alpha > 0$)
 を行なえば (2.1), (2.2) で V, p のかわりに V_c^*, p_c^*
 F_p のかわりに $F(\tau) e^{-\alpha \tau}$ とおいたものが得られよう。
 したがって

$$p_c^* = (F_p \cdot \nabla) \phi_p e^{-\alpha \tau} \quad (3)$$

$$\mu V_c^* = \left[-\frac{1}{k^2} (F_p \cdot \nabla) \nabla (\phi_p - \chi_p) - F_p \chi_p \right] e^{-\alpha \tau} \quad (4)$$

と書ける。 $k^2 = \rho \omega / \mu = \alpha / \nu$ ($\nu = \mu / \rho$ は動粘性係数)。

ラプラス逆変換の公式 (Erdélyi³⁾ p. 245, 283)

$$\mathcal{L}^{-1}[f^*(\alpha) e^{-\alpha \tau}] = f(t - \tau) \quad t > \tau$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\exp(-\alpha^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}})] = \frac{1}{2} \alpha^{\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \exp(-\frac{\alpha}{4t})$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha^{-1} \exp(-\alpha^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}})] = \text{erfc}(\frac{1}{2} \alpha^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[K_0(\alpha^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}})] = \frac{1}{2t} \exp(-\frac{\alpha}{4t})$$

$\text{erfc}(\xi) = 1 - \text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha^{-1} K_0(\alpha^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}})] = \frac{1}{2} E(\frac{\alpha}{4t}), \quad E(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

$$\text{したがって } \alpha = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^2 / \nu = R / \nu^2, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|$$

を用いるれば

$$P_c = (F(\tau) \cdot \nabla) \phi_p \delta(t - \tau), \quad \phi_p = -\frac{1}{4\pi R}$$

$$\rho \mathbf{V}_c = F(\tau) [4\pi\nu(t - \tau)]^{-N/2} \exp\left[-\frac{R^2}{4\nu(t - \tau)}\right] - (F(\tau) \cdot \nabla) \nabla \bar{\Psi}_c$$

を得る。したがって N は次元数

(6)

$$\bar{\Psi}_c = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi R} \operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{\nu(t - \tau)}}\right), & : N = 3 \\ \frac{1}{4\pi} \left[E\left(\frac{R^2}{4\nu(t - \tau)}\right) + 2 \log R \right], & : N = 2 \end{cases} \quad (7)$$

である。

2次元の流れでは複素量 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$,

$\bar{z} = F_x + iF_y$, $\zeta = z - z_p(\tau)$ を導入することによ

り複素速度 $w = v_x - iv_y$ を用いるのが便利である。(6), (7)

から $2\pi\rho w_c$ に就いて

$$2\pi\rho w_c = \frac{\bar{z}}{\zeta^2} + \left\{ -\frac{\bar{z}}{\zeta^2} + \frac{\bar{z}}{4\nu(t - \tau)} \left(1 - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta}\right) \right\} \exp\left[-\frac{\zeta\bar{\zeta}}{4\nu(t - \tau)}\right]$$

が導かれる。

(8)

§4 移動する非定常集中力による場

時刻 t に $\mathbf{x}_p(t)$ にあり $F(t)$ の強さをもつ非定常集中力

$F(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(t))$ の生じる場は §3 で求めた $F(\tau) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p(\tau))$

$\delta(t - \tau)$ による場 $\mathbf{V}_c, P_c$ がある。これは w_c を物体が静止して、

無限の過去から現在の時刻 $t = t_0$ まで τ について積分

が求められる。ただし x_p は $x_p(t)$ であることを留意する。

したがって

$$pV = \int_{-\infty}^t pV_\tau d\tau, \quad p = \int_{-\infty}^t p_\tau d\tau = (F(t) \cdot \nabla) \phi_p, \quad 2\pi p\omega = \int_{-\infty}^t 2\pi p_\tau \omega_\tau d\tau,$$

$$\text{ただし} \quad \phi_p = -1/(4\pi |x - x_p(t)|). \quad (1)$$

したがって、圧力はその瞬間の源の位置と流線によつて定まるものがあり、(2.1), (2.2) に相当して

$$\Delta p = F(t) \delta(x - x_p(t)) \quad (2)$$

から直接導くこともできる。

物体の速度が x 軸の負の方向に一定値 U ($x_p = -Ut$)

に、 F が一定値 F に漸近する（あるいは原点 $x_p(t)$ に移り、極限をとる）ことにより、

$$pU = \frac{F}{4\pi R} e^{-\kappa(2-x)} + \frac{1}{4\pi} (F \cdot \nabla) \nabla [\log(2-x) - E(\kappa(2-x))],$$

: $N=3$

$$4\pi pU = -\frac{F}{2} + \kappa e^{\kappa x} [\bar{F} K_0(\kappa x) + F K_1(\kappa x) \bar{x}/e], \quad (3)$$

$\kappa = U/(2\nu)$

: $N=2$

がえられる。これは x 方向に一定の定常流 U があるとき、原点にゐた定常集中力に対するオセーニの方程式（ナビエ-ストークス方程式の慣性項を $U \partial/\partial x$ で置きかえたもの）の基本解^{1,4)}に他ならない。このように非定常ストークス方程式がオセーニの方程式を特別の場合として含むことは、ガリレイ変換により示すことも可能である。

文 献

- 1) Hasimoto, H: Theor. and Appl. Mech. (Tokyo Univ. Press)
22 (1972) 287.
- 2) Lamb, H: Hydrodynamics (Cambridge at the Univ.
press, 6th ed. 1932),
- 3) Erdelyi, A: et al: Tables of Integral Transforms I. (Mc
Graw-Hill, 1954).
- 4) 今井 功: 流体力学 前編 (裳華房, 1973).