

一次元スピン系における振動的モードの存在

蔵 本 由 紀 (京大)

Long range order がない場合にもスピン波的モードが存在するということを示す簡単なモデルとして一次元 classical Heisenberg スピン系を考える。特に低温 ($k_B T \ll J$) 領域に限る。ハミルトニアンは

$$H = -J \sum_i \underline{S}_i \underline{S}_{i+1} \quad (J > 0) \quad \text{----- (1)}$$

運動方程式は

$$\frac{d\underline{S}_i}{dt} = J \underline{S}_i \times (\underline{S}_{i+1} + \underline{S}_{i-1}) \quad \text{----- (2)}$$

さて $\underline{S}_i$ を二つの部分に分ける。

$$\underline{S}_i = \underline{S}_i + \underline{\sigma}_i, \quad \text{----- (3)}$$

$$\underline{S}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^Q (\underline{S}_k e^{ikr_i} + \text{C. C.}),$$

$$\underline{\sigma}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=Q}^{\pi} (\underline{S}_k e^{ikr_i} + \text{C. C.})$$

つまり $\underline{S}_i$ の部分は空間的にゆるやかに変化するが $\underline{\sigma}_i$ の変化は激しい。ところでこの二つの部分の fluctuation の大きさはそれぞれどの様になるかという低温にゆけばゆくほど Q を非常に小さくとっても $\underline{S}_i$ による fluctuation が圧倒的な部分を占めてしまう。実際我々は Q を非常に小さく ($\ll \pi$) しかも $\langle (\underline{S}_i)^2 \rangle \gg \langle (\underline{\sigma}_i)^2 \rangle$ となるようにとる。 $k_B T \ll J$ ではこれが可能なのである。すると(2)は

$$S \frac{d\underline{\eta}_i}{dt} + \frac{d\underline{\sigma}_i}{dt} \cong JS \underline{\eta}_i \times (\underline{\sigma}_{i+1} + \underline{\sigma}_{i-1} - 2\underline{\sigma}_i), \quad \text{---(4)}$$

ここに $\underline{\eta}_i = \underline{S}_i / |\underline{S}_i|$. $\underline{\eta}_i$ が 時間的空間的に一定なら(4)は低温のスピン波

の場合と同様の式ですぐ解けるのだから $\underline{\eta}_i$ はゆるやかながらも時間的空間的に変化している。時間的变化がゆるやかになるというのは Kinematical slow down による。そこで(7)を巧く扱うには $\underline{\eta}_i$ を常に座標軸のひとつ z' とする様な新しい座標系を考えるとよい。二つの座標系の変換を $T(i, t)$ とする。Tはオイラー角で表わされる。

さてあるベクトル $\underline{A}(i, t)$ に対し $T(i, t) \underline{A}(i, t) = \tilde{\underline{A}}(i, t)$ とかくと T の時間空間変化がゆるやかという近似の下に(4)は

$$\frac{d\tilde{\underline{\sigma}}_i}{dt} \cong JS \tilde{\underline{\eta}}_i \times (\tilde{\underline{\sigma}}_{i+1} + \tilde{\underline{\sigma}}_{i-1} - 2\tilde{\underline{\sigma}}_i) \quad (5)$$

となる。 $\underline{\eta}_i$ は実は i, t にはよらないベクトルだから(5)はすぐ解けて

$$\tilde{\underline{\sigma}}_k \pm(t) = \tilde{\underline{\sigma}}_k \pm(0) e^{\mp i \omega_k t}, \quad (6a)$$

$$\tilde{\underline{\sigma}}_k^0(t) = \tilde{\underline{\sigma}}_k^0(0) \cong 0. \quad (6b)$$

ここに $\omega_k = S(J(0) - J(k))$, $J(x) = 2J \cos x$ である。したがって新しい座標系での Correlation function $\tilde{\gamma}^\pm(t) = \langle \tilde{\underline{\sigma}}_k^\pm(t) \tilde{\underline{\sigma}}_{-k}^\mp(0) \rangle$ は

$$\tilde{\gamma}_k^\pm(t) = c e^{-\frac{\omega_k}{k_B T}} e^{\mp i \omega_k t}, \quad (7a)$$

$$\tilde{\gamma}_k^0(t) \cong 0 \quad (7b)$$

となる。ところが我々が欲しいのは laboratory frame での Correlation function $\gamma^\pm(R, t) = \langle \underline{\sigma}^\pm(R, t) \underline{\sigma}^\mp(0, 0) \rangle$ だから $\gamma^\alpha(R, t)$ と $\tilde{\gamma}^\alpha(R, t)$ との関れんをつけねばならない。 $\underline{\sigma}_i(t)$ と $\tilde{\underline{\sigma}}_i(t)$ の関れんは

$$\underline{\sigma}_i(t) = T^*(i, t) \tilde{\underline{\sigma}}_i(t)$$

であるからこれをもとにして

$$r^+(R, t) \approx \frac{1}{4} \left(\frac{\Gamma^0(R, t)}{S^2} + 1 \right) (\tilde{r}^+(R, t) + \tilde{r}^-(R, t)) \quad (8)$$

が得られる。ここに

$$\Gamma^0(R, t) = \langle S^z(R, t) S^z(0, 0) \rangle$$

である。(8)より $r^+(R, t)$ のspace-time フーリエ変換 $r_k^+ \omega$ の実部を調べてみると $\omega = \pm \omega_k$ にpeakがあり $\Gamma^0(R, t)$ がかかっていることから来る巾をもっている。その巾 Δ は $\Delta \sim S J Q \sin k$ となるか低温においては $Q \ll \pi$ だから $\Delta \ll \omega_k$ となり二つのpeak ははっきり分かれて見える。なお $r_k^- \omega, r_k^0 \omega$ についても結果は全く同じであるかこれは空間的な方向の同等性 (paramagnetic phase だから) によって当然予想されることである。