

ある種のコンパクト Riemann 面の 同値問題と自己同型群

東北大 理 難波 誠

§0. 昨年(1979年)におこなわれた. 多変数函数論問題特集において. 志賀弘典氏は. 次のような問題を提出している.

問題. V, V' を次式で定義される compact Riemann 面とする.

$$V: y^n = f(x),$$

$$V': y^n = h(x),$$

ここに. n は自然数, f, h は x の有理函数. この時.

$V \cong V'$ (biholomorphic) となるための. f と h の関係は何か?

以下. 我々はこの同値問題に対して. いくつかの条件のもとで. 解答を与える. 方程式が. かくもやさしい形であるにもめめわらず. 一般的な解答を得るのは. むずかしいように見える. 同値問題が解けると. 自然に. 自己同型群も

決定される事が多い。それについて得られた結果も合せて記す。(数解研で話した後に得た結果も、一諸に記すので、あらかじめ、ご了承ください。)

なお、この種の方程式で定義された compact Riemann 面は、多変数 modular 函数の具体的構成等に関連して、

Picard [5], Lefschetz [2], Shimura [6], Kuribayashi [1] 等によって、研究された。

§ 1. 始めに、 $\eta = p$ を素数と仮定する。 f, h を次のように因数分解する。

$$V: y^p = f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m} (f_1(x))^p,$$

$$V': y^p = h(x) = (x - \beta_1)^{l_1} \cdots (x - \beta_g)^{l_g} (h_1(x))^p,$$

ここに、 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は互いに異なる複素数、 $k_1, \dots, k_m$ は $k_j \not\equiv 0 \pmod{p}$ を満たす整数、 $f_1(x)$ は x の有理函数とする。 V' の方についても同様とする。座標 x は V 上の、 $\text{order} = p$ の meromorphic function を定義するが、これを holomorphic map $V \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ とみた時、 $x = \infty$ が branch point となる時とならない時がある。(同値問題を考えるのだから)^前 者の場合、てきとうな $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の元 B を f に合成させる (i.e., $f \circ B$ を考える) ことにより、 ∞

は. branch point でないとしてよい。この時. branch points 全体の集合は. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ となり. $k_1 + \dots + k_m \equiv 0 \pmod{p}$ が成立している. V' の方も同様とする。

Hurwitz の公式より. V の genus は. $(p-1)(m-2)/2$ である。従って. (同値問題を考えるのであるから) V' の方の. 異なる β の数 g は. m に等しいとしてよい。さて我々は. 次の定義を与える。

$$h(x) = (x-\beta_1)^{l_1} \dots (x-\beta_m)^{l_m} (h_1(x))^p,$$

$$\hat{h}(x) = (x-\gamma_1)^{r_1} \dots (x-\gamma_m)^{r_m} (\hat{h}_1(x))^p,$$

(ただし. β_j は互いに異なり. $l_j \not\equiv 0 \pmod{p}$, $\sum l_j \equiv 0 \pmod{p}$ を満たす. $\hat{h}$ の方も同様) において. $h \equiv \hat{h}$ とは. $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_m = \gamma_m$ かつ $l_1 \equiv r_1, \dots, l_m \equiv r_m \pmod{p}$ であること。

定理 1. p を素数, $m \geq 2p+1$ とする。この時 compact Riemann 面

$$V: y^p = f(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_m)^{k_m} (f_1(x))^p,$$

$$V': y^p = h(x) = (x-\beta_1)^{l_1} \dots (x-\beta_m)^{l_m} (h_1(x))^p,$$

(ただし. α_j は互いに異なり. $k_j \not\equiv 0$, $\sum k_j \equiv 0 \pmod{p}$, V' の方も同様) の biholomorphic であるための必要十分条件は. $\text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の元 B と. $r \not\equiv 0 \pmod{p}$ なる

整数 r が存在して $h \equiv (f \circ B)^r$ となることである。

定理 1'. 同じ条件のもとで. 次の exact 列がある.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{ここに. } K &= \left\{ \sigma^j \in \text{Aut}(V) \mid \sigma^j(x, y) = (x, \zeta^j y) \right\} \\ &\quad \left\{ \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/P}, 0 \leq j \leq P-1 \right\} \\ L &= \left\{ B \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \mid \exists r \not\equiv 0 \pmod{P} \right\} \\ &\quad \left\{ \text{such that } f \equiv (f \circ B)^r \right\} \end{aligned}$$

例. $P=2$ とすると. 定理 1, 1' は. hyperelliptic Riemann 面の. よく知られた命題になる.

Remark. 上の 2 定理の証明には. Namba [4], p.86, Cor. 2.4.5 : 『 V を genus g の compact Riemann 面, P を $(P-1)^2 \leq g-1$ を満たす素数とし. f を V 上の $\text{order} = P$ の meromorphic function とする. この時. V 上には (1). $\text{order} < P$ なる meromorphic function は存在せず. (2) $\text{order} = P$ なる meromorphic function は必ず $B \circ f, B \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の形になる.』 を本質的に用いる. しかるに. $P=2$ の時. よく知られた楕円函数論の知識により. 定理 1 の方は $m \geq 5$ でなくても無条件で成立している. さらに. $P=3$

の時点にも. 定理1の方は. $m \geq 7$ でなくても. 無条件で成立している事が. (直接的計算等によって) わかる. それ故定理1の. $m \geq 2p+1$ なる条件を落すか弱めるか. したいのであるが. 未だ成功していない. ただし. 定理1'の方は. $m \geq 2p+1$ なる条件は. sharp である.

例. ($p=3, m=5, \text{genus}=3$). 次の例は.

Picard [5] によって. とりあつかわれたもので. 彼はこれを用いて. 2変数 modular 函数を. 楕円 modular 函数と類似の方法で構成している.

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の点 P に対し. それを決める point divisor を (P) で記すことにする. $0, 1, \alpha, \beta$, を互いに異なる複素数とし. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の divisor $D = (\alpha) + (\beta)$ に対し.

$$V_D: y^3 = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく. $D' = (\gamma) + (\delta)$ に対し.

$$V_D \cong V_{D'}$$

$$\iff \exists B \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \text{ such that } B\{0, 1, \alpha, \beta\} = \{0, 1,$$

$$\iff \text{divisor } D' = (\gamma) + (\delta) \text{ は. 次のどれかに等しい. } \left. \begin{matrix} \gamma, \delta \end{matrix} \right\}$$

$$(\alpha) + (\beta), \left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \left(\frac{1}{\beta}\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right),$$

$$(1-\alpha) + (1-\beta), \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right), \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) + \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right),$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1-\alpha}\right) + \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha}\right), \quad \left(\frac{1}{1-\beta}\right) + \left(\frac{1-\alpha}{1-\beta}\right), \\ & \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}\right), \quad \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right) + \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}\right), \\ & \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right) + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}\right), \quad \left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right) + \left(\frac{\beta-1}{\beta-\alpha}\right). \end{aligned}$$

例. $(p=3, m=6, \text{genus}=4).$

$$V: y^3 = (x^3-1)/(x^3+1)$$

には. $(x, y) \mapsto (-y, -x)$ なる automorphism があって. $\# \text{Aut}(V) = 2 \cdot 3 \cdot 12 = 72.$

§2. 次に. n を自然数, p を素数とし. V, V' を次式で定義される compact Riemann 面とする.

$$V: y^n = (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_p),$$

$$V': y^n = (x-\beta_1) \cdots (x-\beta_p),$$

ここに. α_j は互いに異なる複素数, β_j の方も同様. 共に $\text{genus} = (p-1)(n-1)/2$ である, ただし. n は. p で割り切れないとする.

定理2. 上の V, V' において. $n \geq 2p+1,$

かつ. $(n, p) = 1$ (互いに素) と仮定する. この時 V と V' とが biholomorphic であるための必要十分条件は. $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の元 B が存在して. $B\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\} = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ となることである.

系. $n \geq 2$, $(n, 3) = 1$ とする. $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ に対して.

$$V_\lambda: y^n = x(x-1)(x-\lambda)$$

とおく. この時. $V_\lambda \cong V_{\lambda'} \iff \lambda'$ は. 次のどれかに等しい.

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Remark. 定理2の証明にも. やはり上述の事を. 本質的に用いる. $n \geq 7$ とすると定理2から系が出るが. $n = 2, 4, 5$ の時には. 直接. 考察して系を出す.

定理2'. 定理2と同じ条件のもとで. 次の exact 列がある.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

$$\text{即ち. } K = \left\{ \sigma^j \in \text{Aut}(V) \mid \begin{array}{l} \sigma^j(x, y) = (x, \zeta^j y) \\ \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}, 0 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\}$$

$$L = \left\{ B \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} B\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \\ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \end{array} \right\}.$$

§ 3. n を自然数とし. V, V' を次式で定義される compact Riemann 面とする.

$$V: y^n = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

$$V': y^n = (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_n),$$

ここに. α_j は互いに異なる複素数, β_j の方も同様. これらは. $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の curves として. non-singular であり. 従って. $\text{genus} = (n-1)(n-2)/2$ である.

定理 3. $V \cong V' \iff \exists B \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$
such that $B\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Remark. 証明には. 次を用いる. 『degree $n \geq 4$ の non-singular curve C on $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上には. degree n , dimension 2 の linear system は. 唯一存在して. それはすなわち. line sections 全体から成るものである.』 (Namba [4], p.228, Theorem 5.1.5, 又は. 石井, 東大修論, 1980, 参照の事.)

例. ($n=5$, genus = 6). 次の例は. Shimura [6] によってとりあつかわれたもので. 2次元 Ball B 上の不連続群 G で. B/G が compact になり. G -automorphic functions 全体の体が $\mathbb{C}$ 上 purely transcendental になるという興味深い例の構成にもちびついている.

$0, 1, \alpha, \beta$ を異なる複素数とし. divisor $D = (\alpha) + (\beta)$ on $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対し.

$$V_D : y^5 = x(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)$$

とおく. $D' = (\gamma) + (\delta)$ に対し

$$V_D \cong V_{D'}$$

$\Leftrightarrow \exists B \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ such that

$$B\{\infty, 0, 1, \alpha, \beta\} = \{\infty, 0, 1, \gamma, \delta\}$$

$\Leftrightarrow$ divisor $D' = (\gamma) + (\delta)$ は. 次の 60 個の divisor のどれかに等しい。

$$(\alpha) + (\beta), \left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \dots \quad (12 \text{ 個}),$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \left(\frac{1}{\beta}\right), (\alpha) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \dots \quad (12 \text{ 個}),$$

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right), (1-\alpha) + \left(\frac{\beta-\alpha}{\beta}\right), \dots \quad (12 \text{ 個}),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) + \left(\frac{\alpha\beta-\alpha}{\alpha\beta-\beta}\right), \left(\frac{\beta}{\beta-1}\right) + \left(\frac{\alpha\beta-\beta}{\alpha\beta-\alpha}\right), \dots \quad (24 \text{ 個}).$$

定理3'. V を定理3の如くとし. $n \geq 4$ とする.

Then (i) V が Fermat curve $x^n + y^n + 1 = 0$ と biholomorphic でないならば. 次の exact 列がある.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \text{Aut}(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち. } K &= \left\{ (x, y) \mapsto (x, \zeta^j y) \mid \zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}, 0 \leq j \leq n-1 \right\}, \\ L &= \left\{ B \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \mid B\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \right\}. \end{aligned}$$

(ii). $V: x^n + y^n + 1 = 0$ においては. $\text{Aut}(V)$ は.

$$(x, y) \mapsto (x, \zeta y)$$

$$(x, y) \mapsto (y, x)$$

$$(x, y) \mapsto (1/x, y/x)$$

で生成され. $\#\text{Aut}(V) = 6n^2$.

例. ($n=6$, genus = 10).

$$V: y^6 = x(x^4 - 1)$$

においては. 定理3'の L は. 正六面体群になる. 故に.

$$\#\text{Aut}(V) = 144.$$

§4. 上の定理3は、次のように一般化される。

定理4. r, n を自然数として、 $\mathbb{P}^{r+1}(\mathbb{C})$ 内において次式で定義される non-singular hypersurfaces V, V' of degree n を考える。

$$V: X_{r+1}^n = F(X_0, \dots, X_r),$$

$$V': X_{r+1}^n = G(X_0, \dots, X_r),$$

ここに、 $(X_0: \dots: X_{r+1})$ は $\mathbb{P}^{r+1}(\mathbb{C})$ の homogeneous coordinate で、 F, G は homogeneous polynomials of degree n . Suppose $(r, n) \neq (2, 4)$ (つまり、 V, V' は $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の4次曲面ではないとする.)。この時、 V と V' とが biholomorphic であるための必要十分条件は、

$\text{Aut}(\mathbb{P}^r(\mathbb{C}))$ の元 B が存在して、 $G = F \circ B$ となる事である。

Remark. (1). 定理3' も同様に一般化されるが、それは略す。(Fermat variety $V: X_0^n + \dots + X_{r+1}^n = 0$ は、 $r \geq 2, n \geq 3, (r, n) \neq (2, 4)$ の時、 $\# \text{Aut}(V) = (r+2)! n^{r+1}$ 。) (2). 定理4の証明には、 $r \geq 2$ では、Matsumura-Monsky [3] を用いる。しかし、定理4において、 $(r, n) \neq (2, 4)$ は必要か不明。

References.

- [1] A. Kuribayashi: On analytic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphisms, *Nagoya M.J.*, (1967), 119-164
- [2] S. Lefschetz: On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to abelian varieties, *Trans. Am. M.* 31 (1922), 327-482.
- [3] H. Matsumura - P. Monsky: On the automorphisms of hypersurfaces, *J. M. Kyoto*, 3 (1964), 347-361.
- [4] M. Namba: Families of meromorphic functions on compact Riemann surfaces, *Lecture notes in Math.* 767, Springer, 1979.
- [5] E. Picard: Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, *Acta M.* 2 (1883), 114-135
- [6] G. Shimura: On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, *Osaka J. M.* 1 (1964), 1-14.