

## Teichmüller 空間論への函数環の応用

東理大・理 宮原 靖

最近, Riemann 面の moduli の理論に函数環や微分空間の理論を応用する試みかなさされている (Rochberg, Marden, Minda etc.). 例えば, Rochberg の方法は次の通りである.

$\mathcal{S}$  をコンパクトな境界付 Riemann 面の全体から成る集合とする.  $\bar{S} \in \mathcal{S}$  に対し, その内部を  $S$ , 境界を  $\partial S$  で表す.  $\bar{S}$  の種数を  $p$ , 境界成分の個数を  $q$  とし,  $N = 2p + q - 1$  とおく.  $S$  において解析的, かつ  $\bar{S}$  において連続な函数の全体を  $A(S)$  で表すとき, これは一様ノルムによる Banach 環となる.  $\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$  に対して,  $A(S)$  から  $A(S')$  の上への連続な 1 対 1 線型写像の全体を  $L(A(S), A(S'))$  で表す.  $\bar{S}$  と  $\bar{S}'$  が同位相ならば,  $L(A(S), A(S')) \neq \phi$  なることが知られている.

$T \in L(A(S), A(S'))$  に対して

$$c(T) = \|T\| \|T^{-1}\|$$

とおく. つねに  $c(T) \geq 1$  が成立つ. また,  $T/\|T\|$  が等長写像であるのは  $c(T)=1$  なるときに限る.

$z \in S$ ,  $z' \in S'$  に対し, ある  $\varepsilon > 0$  及びある  $T \in L(A(S), A(S'))$  があって, すべての  $f \in A(S)$  に対して

$$|f(z) - (Tf)(z')| \leq \varepsilon \min(\|f\|, \|Tf\|)$$

が成立つとき,  $z$  と  $z'$  は  $T$  に関して  $\varepsilon$ -related であるという.

$\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$  に対して

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = \inf \{ \log c(T) \mid T \in L(A(S), A(S')) \}$$

とおくとき, これは  $\bar{S}$  と  $\bar{S}'$  の間の距離を与える. (正確には  $S$  と  $S'$  の等角同値類の間の距離である.) 距離の公理をみる. この証明は次のもの以外は容易である.

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = 0 \Rightarrow S \text{ と } S' \text{ は等角同値である.}$$

これは次のように言い換えることができる.

定理 1.  $\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$  に対して

$$\inf \{ c(T) \mid T \in L(A(S), A(S')) \} = 1$$

ならば,  $S$  と  $S'$  は等角同値である.

これは Rochberg により示された ([1]), その証明は間接的なものであった.  $S$  と  $S'$  の間の等角写像を具体的に構成することにより, これを直接に証明することも可能である. その方法を後述する定理 3 の証明においても用いられるので, ここで述べてない. また, この結果自体, 函数環の問題

としても興味深い。更に, Rochberg は次の結果を証明した ([1], [2]) .

定理2.  $\bar{S} \in \mathcal{S}$  の Riemann 空間において, 距離  $d(\cdot, \cdot)$  の定める位相は Teichmüller 距離の定める位相と同値である。

このように,  $c(T)$  が 1 に近いような  $T \in L(A(S), A(S'))$  が存在すれば,  $S$  と  $S'$  は等角同値に近い状態にあると考えられるが, これに関連して次の結果が示される。これは, 自己同型  $T \in L(A(S), A(S))$  について,  $c(T)$  が 1 に十分近いときは,  $T$  は  $S$  の 1 つの自己等角写像により引き起こされる  $A(S)$  の自己同型に近いということを示している。

定理3.  $\bar{S} \in \mathcal{S}$  に対して,  $N = 2p + q - 1 \geq 2$  とする。十分小さな任意の  $\varepsilon > 0$  及び  $S$  の任意の相対コンパクトな部分領域  $D$  に対して, 次の条件をみたす定数  $d > 1$  が存在する。 $T \neq 1$  かつ  $c(T) < d$  なる任意の  $T \in L(A(S), A(S))$  に対して  $S$  の自己等角写像  $w$  が唯一つ定まり, すべての  $z \in D$  につき,  $z$  と  $w(z)$  は  $T$  に関して  $\varepsilon$ -related である。

この結果を証明するために少し準備をしておく。  $\bar{S} \in \mathcal{S}$  とする。  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_p, \beta_p$  はそれぞれ  $S$  上の単純閉曲線

であって,  $\alpha_i, \beta_i$  は homologically independent modulo  $\partial S$  であるとする. しかも,  $i \neq j$  のとき

$$\alpha_i \cap \alpha_j = \emptyset, \quad \beta_i \cap \beta_j = \emptyset, \quad \alpha_i \cap \beta_j = \emptyset,$$

かつ  $\alpha_i$  と  $\beta_i$  は唯一矢で交わるものとする.  $S$  を  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_p, \beta_p$  に沿って切ることでより得られる領域を  $S_0$  とする. 即ち,  $S_0 = S - \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i \cup \beta_i)$ .  $S_0$  にすべて  $\alpha_i, \beta_i$  の上の矢の定める境界要素をすべて付加した集合を  $S_0^*$  で表す.  $S_0^*$  には自然な位相が定められる. 次に,  $D$  を  $S$  の相対コンパクトな部分領域とすると,  $\bar{D} - \bigcup_{i=1}^p (\alpha_i \cup \beta_i)$  は  $\bar{D} \cap \{\bigcup_{i=1}^p (\alpha_i \cup \beta_i)\}$  の矢が定める境界要素をすべて付加して得られる集合を  $D^*$  で表す.  $D^*$  は  $S_0^*$  の部分集合である.

定理 2 を証明するため, 次の Lemma が必要である.

Lemma.  $\bar{S} \in \mathcal{S}$ ,  $D$  を  $S$  の任意の相対コンパクトな部分領域とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 次の条件をみたす  $d > 1$  が存在する.  $\bar{S}' \in \mathcal{S}$  とするとき,  $T1 = 1$  かつ  $c(T) < d$  なる  $T \in L(A(S), A(S'))$  が存在するならば,  $D^*$  から  $S'$  の中への連続写像  $w_T$  が存在して, すべての  $s \in D^*$  につき,  $s$  と  $w_T(s)$  は  $T$  に関して  $\varepsilon$ -related である.

証明は省略する.

さて, 定理 2 を証明しよう.  $N \geq 2$  だから  $S$  の自己等角写像は有限個しか存在しない. それを  $w_1, \dots, w_M$  とする.

任意の  $\varepsilon > 0$  及び  $S$  の任意の相対コンパクトな部分領域  $D$  を与える. このとき  $d > 1$  があって,  $T1 = 1$  かつ  $c(T) < d$  なる任意の  $T \in L(A(S), A(S))$  に対して, ある  $j$  ( $1 \leq j \leq M$ ) が対応して, すべて  $z \in D$  及びすべて  $f \in A(S)$  につき

$$|f(z) - (Tf)(w_j(z))| \leq \varepsilon \min(\|f\|, \|Tf\|)$$

を満足せよ. これが成立しないと仮定すると, ある  $\varepsilon > 0$  及びある相対コンパクトな部分領域  $D$  に対して,  $d_n \rightarrow 1$  なる列  $\{d_n\}$  があって次の性質をみたす. 各  $n$  につき,  $T_n 1 = 1$  かつ  $c(T_n) < d_n$  なる  $T_n \in L(A(S), A(S))$  が存在して, 各  $j$  ( $1 \leq j \leq M$ ) に対しある  $f_{j,n} \in A(S)$  及びある  $z_{j,n} \in D$  が

$$(1) \quad |f_{j,n}(z_{j,n}) - (T_n f_{j,n})(w_j(z_{j,n}))| > \varepsilon \|f_{j,n}\|$$

を満たす

$$(2) \quad |f_{j,n}(z_{j,n}) - (T_n f_{j,n})(w_j(z_{j,n}))| > \varepsilon \|T_n f_{j,n}\|$$

をみたす.

今,  $\{S_n\}$  を  $S$  の近似とし,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  なる正数列  $\{\varepsilon_n\}$  をとる. Lemma において  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $D = S_n$  とすることにより  $S_n^*$  から  $S$  の中への連続写像  $w_{T_n}$  が存在して, 各  $s \in S_n^*$  と  $w_{T_n}(s)$  は  $T_n$  に関して  $\varepsilon_n$ -related であるとしてよい.  $S_0^*$  及び  $S$  上にそれぞれ適当な距離を導入しておく. このとき, 任意のコンパクト集合  $K (\subset S_0^*)$  に対して番号  $n_0$  があって,  $\{w_{T_n} \mid n \geq n_0\}$  は  $K$  上で同程度連続であることが,

集合  $\{w_{T_n}(z) \mid z \in K, n=1, 2, \dots\}$  が  $\partial S$  から離れていること  
及び種分表示式を用いて証明される。従って  $\{w_{T_n}\}$  は  $S_0^*$   
上の正規族である。そこで、部分列を選んで番号をつけ変え  
ることにより、ある連続写像  $w: S_0^* \rightarrow S$  に対して、 $S_0^*$  の  
任意のコンパクト部分集合において一様に  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{T_n} = w$  と  
してよい。各点  $z \in S_n^*$  と  $w_{T_n}(z)$  が  $\varepsilon_n$ -related であること  
を用いて、この写像  $w$  が  $S$  の自己等角写像であることが証明  
される。即ち、ある  $j$  ( $1 \leq j \leq M$ ) に対して  $w = w_j$  となる。  
従って、この  $j$  に対し、

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_{T_n} = w_j \quad \text{uniformly on every compact subset of } S_0^*.$$

この  $j$  について、(1) または (2) のいずれかがすべての  $n$  に  
対して成立つと仮定してもよい。また、ある  $z_0 \in \bar{D}$  に対し、  
 $z_{j,n} \rightarrow z_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) としてよい。更に、 $f_{j,n}/\|f_{j,n}\|$  及び  
 $(T_n f_{j,n})/\|f_{j,n}\|$  の一様有界性より、 $S$  上で広義の一様に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{j,n}}{\|f_{j,n}\|} = f_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n f_{j,n}}{\|f_{j,n}\|} = g_0$$

としてもよい。ここに、 $f_0, g_0$  は  $S$  上のある解析関数であ  
る。

さて、(1) がすべての  $n$  に対して成立っているとすれば、

$$\left| \frac{f_{j,n}(z_{j,n})}{\|f_{j,n}\|} - \frac{(T_n f_{j,n})(w_j(z_{j,n}))}{\|f_{j,n}\|} \right| > \varepsilon.$$

$n \rightarrow \infty$  として次の不等式を得る;

$$(4) \quad |f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \geq \varepsilon.$$

一方, Lemma により,  $n$  が十分大きいならば,

$$|f_{j_n}(z_{j_n}) - (T_n f_{j_n})(w_{T_n}(z_{j_n}))| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|f_{j_n}\|.$$

従って (3) により

$$|f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る. これは (4) に矛盾する.

(2) がすべての  $n$  に対して成立しているときも, 同様に矛盾を生ずる.

これで条件をみたす自己等角写像  $w$  の存在が示された.

最後に  $w$  の一意性を証明する. 一意性が成立しないと仮定すると,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  なる正数列  $\{\varepsilon_n\}$  及び  $T_n 1 = 1$  かつ  $C(T_n) \rightarrow 1$  なる  $T_n \in L(A(S), A(S))$  が存在して, ある  $j, k$  について ( $j \neq k$ ), すべての  $z \in D$  及びすべての  $f \in A(S)$  に対し,

$$(5) \quad \begin{cases} |f(z) - (T_n f)(w_j(z))| \leq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|), \\ |f(z) - (T_n f)(w_k(z))| \leq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|) \end{cases}$$

が成立つ. そこで,  $w_j(z_1) \neq w_k(z_1)$  なる  $z_1 \in D$  をとると,

(5) により, すべての  $f \in A(S)$  に対して

$$\begin{aligned} & |f(w_j(z_1)) - f(w_k(z_1))| \\ & \leq |f(w_j(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| + |f(w_k(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| \end{aligned}$$

$$\leq 2\varepsilon_n \|f\|.$$

$n \rightarrow \infty$  とすれば, すべて  $f \in A(S)$  に対して

$$f(w_j(z_1)) = f(w_k(z_1))$$

となる.  $A(S)$  は実を分離するから, これは矛盾である. かくして一意性が示された. (証明終)

定理3の応用として,  $f$  と  $Tf$  の零点の間の関係を示す次の結果が得られる.

定理4.  $\bar{S} \in \mathcal{S}$  に対して,  $N = 2p + q - 1 \geq 2$  とする.

$f_0 \in A(S)$  を任意とする. 十分小さな任意の  $\varepsilon > 0$  及び  $f_0 \neq 0$  on  $Bd D$  のような  $S$  の任意の相対コンパクト部分領域  $D$  に対して次の性質をみたす定数  $d > 1$  が存在する:

$T \in L(A(S), A(S))$  が  $T1 = 1$  及び  $c(T) < d$  をみたすならば,  $f_0$  の  $D$  における零点の個数は  $Tf_0$  の  $w(D)$  における零点の個数に等しい. ここで,  $w$  は定理3により一意に定まる  $S$  の自己等角写像である. 更に,  $w(D)$  における  $Tf_0$  の零点の集合  $N_{Tf_0}(w(D))$  から  $D$  における  $f_0$  の零点の集合  $N_{f_0}(D)$  の上への写像  $\theta$  があって, すべての  $z \in N_{Tf_0}(w(D))$  に対して,  $\theta(z)$  と  $z$  は  $T$  に関して  $\varepsilon$ -related である. しかもこのような写像  $\theta$  は唯一つしかない.

## 参 考 文 献

- [1] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces, Duke Math. J., 40 (1973), 41-52.
- [2] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces II, Ibid., 42 (1975), 167-182.