

巨視的量子ダイナミクスにおける非線形項の効果¹

大阪市立大学大学院 工学研究科 中村勝弘²

1 はじめに

本稿では、講演の前半部で展開した**非線形シュレーディンガー方程式と量子干渉効果**について詳しく記載しよう。これは、中園直史氏との共同研究に基づくもので他の学術論文に未発表のものである。この研究の究極の目的は、量子カオスの研究を「カオスの量子論的徴候」の研究（例えば、K. Nakamura and T. Harayama: Quantum chaos and quantum dots (Oxford University Press, Oxford, 2004))にとどめないで、文字どおり、量子ダイナミクスにおけるカオスの誕生を見い出すことにある。近年、ボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) の研究で着目されている Gross-Pitaevskii 方程式 (GPE) は、非線形シュレーディンガー方程式 (非線形項を持つシュレーディンガー方程式) であり、巨視的波動のカオスの誕生を期待できる力学系である。ここでは、時間発展の初期段階の考察に限定し、特に、時間 1 次元、空間 2 次元の BEC の干渉問題に着目する。モデルは一電子干渉の実験で周知の二重スリットを用い、重力落下により 2 重スリットで分裂した巨視的波束の干渉縞を考察した。本研究では非線形項が干渉縞に及ぼす影響を明らかにした。また近年、宇宙開発プロジェクトに伴う微小重力、重力変調下における物理実験の企画立案が広く求められていることを考慮し、重力項を地表重力に固定せず、変調させることでの干渉縞に対する影響も明らかにした。

モデルは 2 次元の重力系で、BEC 波束を重力落下させ 2 重スリットを通過させることで 2 つに分かれた BEC が互いに干渉する様子を考察する。ここで注目したいのは干渉縞に対する非線形性の効果と重力の影響である。一般に、非線形項により初期波束の大きさが異なってくるので、閉じ込めポテンシャルの振動数を変化させ初期波束の大きさが一定になるようにする。

時間発展に際して閉じ込めポテンシャルを取り除いて重力落下させるので計算上は非線形項 u_0^2 に依存して特別なことは起こらない。

初期波束を時間発展させるため、2 次元平面を grid に分け、1+2 次元の GPE を差分化して解く。差分方程式は陰解法で、値が収束するまで繰り返し計算を行うことになる。差分方程式には Crank-Nicolson 法や Peaceman-Rachford により開発された Alternating Direction Implicit Method (ADI 法) がある。ADI 法の利点は 2 次元においては精度を大きく落とすことなく比較

¹ この原稿は、京大基研短期研究会「量子力学とカオス：基礎的問題からナノサイエンスまで」での講演に基づいている。

² E-mail: nakamura@a-phys.eng.osaka-cu.ac.jp

的高速な点である。本研究では両方の方法で計算を行い同様の結果を得た。

用意する計算領域に対して説明する。 $x' - y'$ 平面で考察を行う。 y' 方向に重力がかかっている。初期の位置 $(0,0)$ に波束の中心を置き、トラップポテンシャルを切って重力落下させる。 $y' = 5$ の位置に 2 重スリットを設定する。スリットの幅を 1、スリットの中心間の距離を 4 とした。また、干渉縞を観測する位置、つまりスクリーンは $y' = 18 (= L_{sc})$ に設置する。このスクリーンは 2 重スリットとは違い波束には影響は与えず、単に測定する位置のみを表すものになっている。

2 干渉縞 (線形極限)

最初に、線形極限 ($u_0 = 0$) での結果、つまり通常のシュレーディンガー方程式にしたがう波束の結果を示す。とくに、干渉縞に注目する。ここでの重力は $g' = 1$ とし、スクリーンは $L_{sc} = 18$ に設定している。最終時刻は波束の重心が重力落下し、スクリーン位置に到達した際の値を参考にした。最終時刻 T_{max} は $T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$ となる。また、 $\delta x_s = \delta y_s = 0.1, \delta t = 0.002$ で計算を行った。図 1 は、線形極限での時間発展のダイナミクスである。巨視的波束が重力落下し、2 重スリットを通過した後、2 つに分かれ干渉する様子が読み取れる。これが線形極限 ($u_0 = 0$) で重力 $g' = 1$ の干渉縞パターンである。スリットの上部には、スリットの通過に失敗した波束の一部が残留し、それ自体がスリットに平行な方法に干渉縞を作っている。

3 干渉縞 (非線形領域と重力制御)

線形極限での結果を基準とし、非線形性と重力の影響について議論する。求める量は最終時刻 $T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$ での等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンである。

ここでは非線形項を $u'_0 = -3, 0, 20$ の 3 パターン、重力を $g' = 1, 3, 5$ の 3 パターンとし、全体として 9 パターンの計算を行った。等高線図とスクリーン上での干渉縞パターンより非線形性の効果、重力の影響を明らかにする。非線形性は波束の粒子性、波動性に関係し、重力はスクリーン上に到達した時の波束の速度を変化させる (*deBroglie* 波長の変化に対応) 効果があると考えられる。これらがどのように干渉縞に影響を与えるのかを明らかにする。

重力に注目した場合、干渉縞のピーク間隔が重力が増えるにつれて狭くなってきているのがわかる。これはスクリーン到達時の波束の速度が異なることにより、*deBroglie* 波長の変化が影響していると考えられる。次に、非線形性に注目すると波束が非線形項 u'_0 が大きいほど広範囲に広がっていることが確認できる。非線形性が負または小さいと波束が広がりにくい、つまり粒子性の性質を反映していると考えられる。また逆に非線形性が大きいと波束が広がりやすい、つまり波動性の性質を反映していると考えられる。さらに、スクリーン上の干渉縞パターンを用いて具体的な考察を行う。

非線形性と重力の影響を理論的に考察しよう。特に、スクリーン上での干渉縞パターンを用いて考察を行っていく。まずは非線形項一定とし、重力の影響を考察する。各 u'_0 に対して重力が干渉縞ピークの間隔を狭くしていることがわかる。これが干渉縞に対する重力の影響である。重力

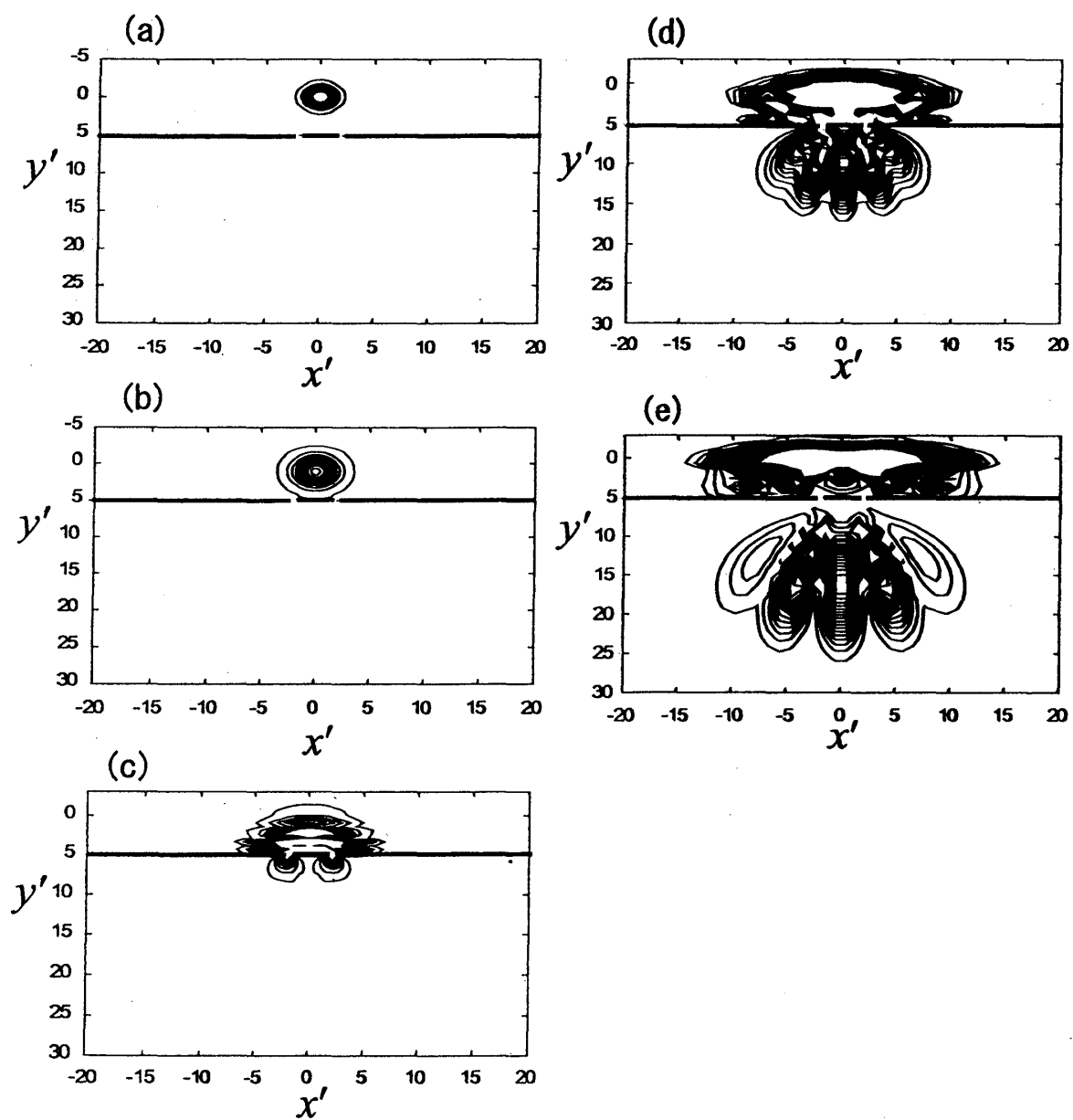


図 1: $u'_0 = 0, g' = 1$ の場合。2 重スリットの等高線図。(a)-(e) $t' = 0.0, 1.5, 3.0, 4.5, 6.0$ に対応。

は波束の速度に影響を与える。重力制御下ではこの速度変化 (*deBroglie* 波長の変化) に対応した違いのある干渉が見られると考えられる。

干渉縞ピーク間隔は *deBroglie* 波長に比例する。具体的には最終時刻で *deBroglie* 波長が $\lambda' \equiv \frac{2\pi}{p'}$ であり、運動量 p' として波束の中心の「古典運動」の運動量を採用すると、 $p' = V_{max} = g'T_{max} = g'\sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}} = \sqrt{2g'L_{sc}}$ となる。よって $\lambda' = \frac{2\pi}{\sqrt{2g'L_{sc}}}$ となる。次に非線形性について着目する。非線形性は波束の広がりに関係している。つまり干渉の影響を受ける範囲の拡大を意味している。また、ピーク数に着目すると $g' = 1$ ではピーク数の変化が見られない。これはピーク間隔が大きく、非線形性による波の広がりが起きても次のピークまで波が到達しないためであると考えられる。逆に $g' = 3, 5$ ではピーク数に変化が見られる。これは $g' = 1$ の場合と異なり、非線形性による波の広がりの影響で次のピークに波が到達するためピーク数が増加していると考えられる。

まとめると重力の増加は干渉縞ピーク間隔を狭める効果があり、非線形性の増大は波束の広がりを強める効果があることが明らかになった。これらの影響により、干渉縞が影響を受け、干渉縞ピーク数の増加などの現象を見ることが出来た。

波の広がり と ピーク間隔 が非線形性と重力にどのように依存しているかを明らかにすることにより、ピーク数の推測を行なおう。最初に波の広がりに対する推測を行う。ここでは波の広がり方だけに注目するので2次元波束を平面状円柱で近似 ($\phi = AR^{-1}$) する。 t が大きな場合、波の広がり は次の関係になる。

$$R \approx \sqrt{u_0 - \frac{1}{A^2}} \sqrt{t} \quad (1)$$

ピーク数の考察は最終時刻 ($T_{max} = \sqrt{\frac{2L_{sc}}{g'}}$) で行うので、 $t = T_{max}$ として計算すると波の広がり は次のように推測される。

$$R_{sc} \propto \sqrt{\frac{u_0 - \frac{1}{A^2}}{\sqrt{g'}}} \quad (2)$$

次にピーク間隔の推測を行う。ピーク間隔には *deBroglie* 波長 λ' が大きく関係している。既に明らかにしているように、 $\lambda' \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ である。ピーク間隔 x'_{peak} は波長に比例しているので、 $x'_{peak} \propto \frac{1}{\sqrt{g'}}$ となる。

ピーク数 = $\frac{\text{波の広がり}}{\text{ピーク間隔}}$ より、ピーク数が推測できるので上で得た R_{sc} と x'_{peak} を用いると次式の関係を得る。

$$\text{ピーク数} = \frac{R_{sc}}{x'_{peak}} \propto \sqrt{(u_0 - \frac{1}{A^2})\sqrt{g'}} \quad (3)$$

非線形性と重力が増大することでピーク数の増大が起こることがこの関係より推測される。

重力制御については、近年の宇宙開発計画で提案されている宇宙空間（宇宙ステーション、人工衛星）での実験において可能であり、非線形性の制御については、Feshbach 共鳴の技術や BEC に関与する原子数の調節で可能となる。

本稿の非線形シュレーディンガー方程式は、ノルムを保存し、ガリレイ変換および同種粒子間の座標入れ替えに対して不変な形式を持っている。そこで、この非線形シュレーディンガー方程式を巨視的ではなく微視的量子論の基礎方程式とみなすと、どのようなことになるのだろうか？これは、量子カオスの最も根源的で歴史貫通的なテーマといえよう。