

高次元ブラックホールの幾何学と コンパクト Einstein 多様体

大阪市立大学大学院理学研科 安井 幸則

Department of Mathematics and Physics
Osaka City University

1. はじめに

正のスカラー曲率を持つコンパクトな Einstein 多様体の知られている例はそれほど多くない. 最初の非等質な例は Page によって S^2 上の S^2 束に構成された Einstein 計量である [16]. その後 Bérard-Bergery は, 底空間 S^2 を正の第 1 Chern 類を持つ Kähler-Einstein 多様体の場合に拡張した [1].

本稿では高次元ブラックホール計量を解析接続することにより非等質なコンパクト Einstein 多様体が組織的に構成できることを述べる. 実際, Page 計量はこのような方法を使って導出されたものである. Page は 4 次元 Kerr-de Sitter 計量と呼ばれるブラックホール計量から, Lorentz 計量を Riemann 計量に解析接続する方法 (Wick 回転) と, ある種の極限操作を組み合わせて Einstein 計量を誘導した. 橋本-阪口-安井は, Page の方法を 5 次元に拡張して, 5 次元 Kerr-de Sitter 計量から S^2 上の S^3 束に無限個の非等質な Einstein 計量を構成した [10]. ここでは, 共形キリング・矢野 (CKY) テンソルを持つブラックホール時空の分類を行うことにより, 上記の研究に対して統一的な見方を提供するとともに, 新しい Einstein 多様体の大域的な構成を行う.

CKY テンソル h とは, n 次元 Riemann 多様体 (M, g) 上の次式を満足する p 次微分形式のことである [11][18][19]:

$$\nabla_X h = \frac{1}{p+1} i(X) \alpha + \frac{1}{n-p+1} X \wedge \beta \quad (1)$$

ここで X はベクトル場, $i(X)$ は内部積である. また, ベクトル場 X は計量によって同一視された 1 次形式としても使われる. α, β はそれぞれ $p+1$ 次形式, $p-1$ 次形式であり,

$$\alpha = e_a \wedge \nabla_{e_a} h = dh, \quad \beta = i(e_a) \nabla_{e_a} h = -\delta h \quad (2)$$

と書ける. 従って, $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^p M$ の切断 ∇h が $\Lambda^{p-1} M$ と $\Lambda^{p+1} M$ への自然な射影の kernel に属するときだけ h は CKY テンソルとなる. 特に 1 次微分形式 h に双対なベクトル場は共形 Killing ベクトル場である. (M, g) 上の p 次の CKY テンソル全体の集合を $CK^p(M)$ とするとき

$$\dim CK^p(M) \leq \binom{n+2}{p+1} \quad (3)$$

が成立する [18].

2. 物理的な背景

高次元ブラックホール計量に対する関心が高まった大きな理由は, 1997 年に発表された Maldacena[13] のゲージ・重力対応と呼ばれる超弦理論の予想に負うところが大きい. この予想を使って 4 次元ゲージ理論の量子論的な解析を対応する高次元の重力理論で行うことができるようになってきた. このような研究の流れの中で, 近年高次元ブラックホール解の研究は大きく発展した.

本稿で注目する研究は, 2006 年 Chen-Lü-Pope によって発見されたブラックホール解である [2]. この解は, Kerr-NUT-de Sitter 計量と呼ばれるものであり, Einstein 方程式

$$\text{Ric}(g) = \Lambda g \quad (4)$$

に従う現在知られている最も一般的なブラックホール解である¹.

最近, Kerr-NUT-de Sitter 時空には CKY テンソルが存在することが発見され [3], その性質を使って測地線方程式 [6][17], Klein-Gordon 方程式 [4], Dirac 方程式 [14], 重力摂動方程式 [15] の可積分性が示された. このような可積分構造は, 高次元ブラックホール時空の安定性解析においても重要な役割を果たすと期待されている.

3. CKY テンソルを持つ Einstein 多様体

以下の定理は, CKY テンソルによって Kerr-NUT-de Sitter 計量を幾何学的に特徴づけるものである.

定理 1. [7][12] 非退化閉な CKY 2 形式が存在する時空の計量は Kerr-NUT-de Sitter ブラックホール計量に一意的に定まる.

¹正確には, ブラックホール地平面のトポロジーが球面であるという範囲内で最も一般的である. Emparan-Reall(2002 年) によって Kerr-NUT-de Sitter 計量と異なるタイプの 5 次元ブラックホール計量が発見された. この解の地平面は $S^2 \times S^1$ である.

d 次元 Kerr-NUT-de Sitter 計量の具体形は以下のように書かれる [2].

(a) $d = 2n$

$$g^{(2n)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^n Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 \quad (5)$$

(b) $d = 2n + 1$

$$g^{(2n+1)} = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx_\mu^2}{Q_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^n Q_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) d\psi_k \right)^2 + \frac{c}{\sigma_n} \left(\sum_{k=0}^n \sigma_k d\psi_k \right)^2 \quad (6)$$

計量に現れる関数を説明しよう. Q_μ は

$$Q_\mu(x) = \frac{X_\mu}{U_\mu}, \quad U_\mu = \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^n (x_\mu^2 - x_\nu^2) \quad (7)$$

と定義され, $X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ は座標 x_μ だけに依存している. さらに, σ_k は x_μ^2 ($\mu = 1, \dots, n$) の k 次の基本対称多項式, $\sigma_k(\hat{x}_\mu)$ は x_μ を含まない k 次の基本対称多項式である.

Kerr-NUT-de Sitter 計量は X_μ を次式に選ぶときだけ Einstein 方程式をみたす [2][5]:

$$\bullet \quad X_\mu = \sum_{k=0}^n c_k x_\mu^{2k} + b_\mu x_\mu \quad (d = 2n) \quad (8)$$

$$\bullet \quad X_\mu = \sum_{k=0}^n c_k x_\mu^{2k} + b_\mu + \frac{(-1)^n c}{x_\mu^2} \quad (d = 2n + 1) \quad (9)$$

ここで $\{c_k, b_\mu, c\}$ はブラックホールの質量, 角運動量, 宇宙定数に対応する d 個のパラメータである.

定理 1 では, CKY テンソルの非退化性を仮定した. 奇数次元では CKY テンソルに零固有値が現れるため, 考える時空は自動的に偶数次元に制限される. 従って奇数次元の Kerr-NUT-de Sitter 計量は含まれない. そこで論文 [8][9] では非退化性を仮定しないで閉 CKY 2-形式を許すすべての Riemann (Lorentz) 多様体そして Einstein 多様体の局所的な分類を行った.

定理 2.[8][9] 閉 CKY2 形式 h が存在するとき、計量 g および h は以下の形になる:

$$g = \sum_{\mu=1}^n \frac{dx_\mu^2}{P_\mu(x)} + \sum_{\mu=1}^n P_\mu(x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) \theta_k \right)^2 + \sum_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^n (x_\mu^2 - \xi_i^2) g^{(i)} + \sigma_n g^{(0)}, \quad (10)$$

$$h = \sum_{\mu=1}^n x_\mu dx_\mu \wedge \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k(\hat{x}_\mu) \theta_k \right) + \sum_{i=1}^N \xi_i \prod_{\mu=1}^n (x_\mu^2 - \xi_i^2) \omega^{(i)}. \quad (11)$$

ここで関数 P_μ は (7) 式と同様に

$$P_\mu(x) = \frac{X_\mu(x_\mu)}{x_\mu^{m_0} \prod_{i=1}^N (x_\mu^2 - \xi_i^2)^{m_i} U_\mu} \quad (12)$$

と定義される。以下順に (10)(11) 式について説明する:

- 座標 $\{x_\mu\}$ ($\mu = 1, \dots, n$) は h の関数固有値であり, $\text{grad} x_\mu$ は互いに直交している. $\{\xi_i\}$ ($i = 1, \dots, N$) は h の多重度 m_i の零でない定数固有値である.
- $(g^{(i)}, \omega^{(i)})$ は, ξ_i の多重度 m_i と同じ複素次元を持つ Kähler 多様体上の計量および Kähler 形式である.
- $g^{(0)}$ は, h の零固有値の多重度 m_0 と同じ次元を持つ Riemann 多様体上の計量である. 特に $m_0 = 1$ のとき, (10) 式の最後の項は

$$\sigma_n g^{(0)} \longrightarrow \frac{c}{\sigma_n} \left(\sum_{k=0}^n \sigma_k \theta_k \right)^2 \quad (13)$$

とおき換えることができる. 奇数次元の Kerr-NUT-de Sitter 計量はこのクラスに属する.

- 1 形式 θ_k は次式に従う:

$$d\theta_k + 2 \sum_{i=1}^N (-1)^{k+n} \xi_i^{2n-2k-1} \omega^{(i)} = 0. \quad (14)$$

定理 3.[8] (10) 式で与えた計量 g は, $g^{(i)}$ および $g^{(0)}$ が Einstein, そして関数 X_μ が次式の形を取るときに限り Einstein になる:

$$X_\mu = \beta_\mu x_\mu + x_\mu \int \chi(x_\mu) x_\mu^{m_0-2} \prod_{i=1}^N (x_\mu^2 - \xi_i^2)^{m_i} dx_\mu. \quad (15)$$

$$\chi(x) = \sum_{i=-\epsilon}^n \alpha_i x^{2i}, \quad \epsilon = 0, 1 \quad (16)$$

($m_0 = 1$ のとき $\epsilon = 1$, それ以外は $\epsilon = 0$). ここで β_μ, α_i は任意定数である.

以下では, 定理 2, 3 で与えた局所的な Einstein 計量 g が Kähler-Einstein 多様体上の球面束の全空間で大域的に定義される条件を考察する. そのためには, 計量 g に含まれるパラメータ β_μ, α_i を適切に調整しなければならない. 以下これらのパラメータをまとめて $a_i (i = 1 \sim n)$ と書く. 簡単のため h の零でない定数固有値が 1 個の場合を考える. それを $\xi = 1$ と規格化し多重度は m とする. また, 零固有値の個数も $m_0 \equiv \epsilon = 0, 1$ と仮定する². 定理 3 より定数固有値に対応する複素 m 次元の Kähler 多様体 $(M, \hat{g})$ は Einstein でなければならない. ここでは M の第 1 Chern 類は $c_1(M) > 0$ とする. 従って, 正の整数 p を使って $c_1(M) = p\alpha$, $\alpha \in H^2(M, \mathbf{Z})$ と書ける. p は $M = \mathbf{CP}(m)$ のとき最大となり $p = m + 1$ である. $\hat{g}$ は $\text{Ric}(\hat{g}) = p\hat{g}$ によって規格化された計量を使う. (10) から Einstein 計量 g は次式の形に変形できる:

$$g = \sum_{\mu=1}^{n-\epsilon} \frac{dx_\mu^2}{P_\mu(x)} + \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta}(x) \hat{\theta}^\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta + b(x) \hat{g} \quad (17)$$

ここで $b(x) = c \prod_{\mu=1}^{n-\epsilon} (x_\mu^2 - 1)$ そして c はパラメータ a_i を使って書かれる定数である.

補題 1. $\hat{\theta}^\alpha$ は 1 次の微分形式で

$$d\hat{\theta}^\alpha = k_\alpha \hat{\omega} \quad (18)$$

を満たす. $\hat{\omega}$ は M の Kähler 形式である. 定数 $k_\alpha = k_\alpha(a_1, \dots, a_n)$ は以下のように定まる:

$$k_\alpha = \frac{p a_\alpha}{m+1} A_\alpha \frac{\partial}{\partial A_\alpha} \log f_{m+1} \Big|_{A_\alpha=1/(1-a_\alpha^2)}. \quad (19)$$

$f_{m+1} = f_{m+1}(A_1, \dots, A_n)$ は次の母関数の $m+1$ 次の係数として与えられる:

$$\frac{(1-t)^{(1+\epsilon)/2}}{\prod_{\beta=1}^n (1-tA_\beta)} = \sum_{i=0}^{\infty} f_i t^i. \quad (20)$$

² $\epsilon = 1$ のとき, 以下では (10) の n を $n-1$ にシフトする.

k_α が整数値をとるとき, $\hat{\theta}^\alpha$ は主 T^n 束 $\pi : P_{k_1, \dots, k_n} \longrightarrow M$ の接続と理解できる. このとき曲率は $\hat{\Omega}^\alpha = d\hat{\theta}^\alpha = k_\alpha \hat{\omega}$ である. 関数 P_μ は以下のように選ぶことができる.

補題 2. $a_1, a_2, \dots, a_n$ を $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ を満たす正の実数とする.

(a) $\epsilon = 0$: $V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid -a_1 \leq x_1 \leq a_1 \leq \dots \leq x_n \leq a_n < 1\}$ とする. m 次の多項式

$$L_m^{(0)}(X) = \sum_{i=0}^m c_i X^i, \quad c_i = c_i(a_1, \dots, a_n) < 0 \quad (21)$$

($i = 0, 1, \dots, m$) が存在し V 上で

$$P_\mu(x) = \frac{\prod_{\alpha=1}^n (x_\mu^2 - a_\alpha^2) L_m^{(0)}(1 - x_\mu^2)}{(1 - x_\mu^2)^m U_\mu} \geq 0 \quad (22)$$

が成立する. 等号は x_μ が境界値 $a_\mu, a_{\mu-1}$ を取るときに限る.

(b) $\epsilon = 1$: 領域 $W = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid 1 < a_1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq a_n\}$ とする. m 次の多項式

$$L_m^{(1)}(X) = \sum_{i=0}^m d_i X^i, \quad d_i = d_i(a_1, \dots, a_n) < 0 \quad (23)$$

($i = 0, 1, \dots, m$) が存在し W 上で

$$P_\mu(x) = \frac{\prod_{\alpha=1}^n (x_\mu^2 - a_\alpha^2) L_m^{(1)}(x_\mu^2 - 1)}{x_\mu^2 (x_\mu^2 - 1)^m U_\mu} \geq 0 \quad (24)$$

が成立する. 等号は x_μ が境界値 $a_\mu, a_{\mu+1}$ を取るときに限る.

補題2の P_μ を使って V あるいは W 上で, x_μ の境界を除き計量 g は正定値となることが示される. x_μ が境界に近づいても S^1 が適切に“つぶれる”ため特異点は生じない. こうして境界を含めて $a_i (i = 1, \dots, n)$ でパラメトライズされた正定値な計量 $g = g_{\{a_1, \dots, a_n\}}$ に拡張される.

以上の結果を総合して最終的に以下の定理を得る.

定理 4. $(M, \hat{g}, \hat{\omega})$ を $c_1(M) > 0$ なる m 次元 Kähler-Einstein 多様体とする. 正の実数 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ は, 補題 2 の不等式と $k_\alpha = k_\alpha(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}$ ($\alpha = 1, \dots, n$) をみたすと仮定する. このとき計量 $g_{\{a_1, \dots, a_n\}}$ は主 T^n 束 $P_{k_1, \dots, k_n}$ に同伴する M 上の $S^{2n-\epsilon}$ 束上の全空間に持ち上がる.

4. 例題

以下では, 定理 4 の成立条件 $k_\alpha \in \mathbf{Z}$ についていくつかの例題を述べる.

例 1. $(\epsilon, n, m) = (0, 1, m)$

$k \in \mathbf{Z}$ ($1 \leq k < p$) に対し a ($0 < a < 1$) が存在し, M 上の S^2 束の全空間に Einstein 計量が定まる [1]. 特に $M = \mathbf{CP}(1)$ ($p = 2$) のとき $a \simeq 0.282$ と求まり Page 計量を再現する.

例 2. $(\epsilon, n, m) = (1, 2, 1)$

$M = \mathbf{CP}(1)$ とする. $(k_1, k_2) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ に対し (a_1, a_2) ($a_1, a_2 > 1, a_1 + a_2 > 2$) が存在し, $M = \mathbf{CP}(1)$ 上の S^3 束の全空間に無限個の Einstein 計量が定まる [10].

数値計算の結果, $\epsilon = 0$ のときは $k_\alpha \in \mathbf{Z}$ をみたす解が有限個, $\epsilon = 1$ のときは $k_\alpha \in \mathbf{Z}$ をみたす解が無限個存在することが予想される.

例 3. $(\epsilon, n, m) = (0, 2, 4)$

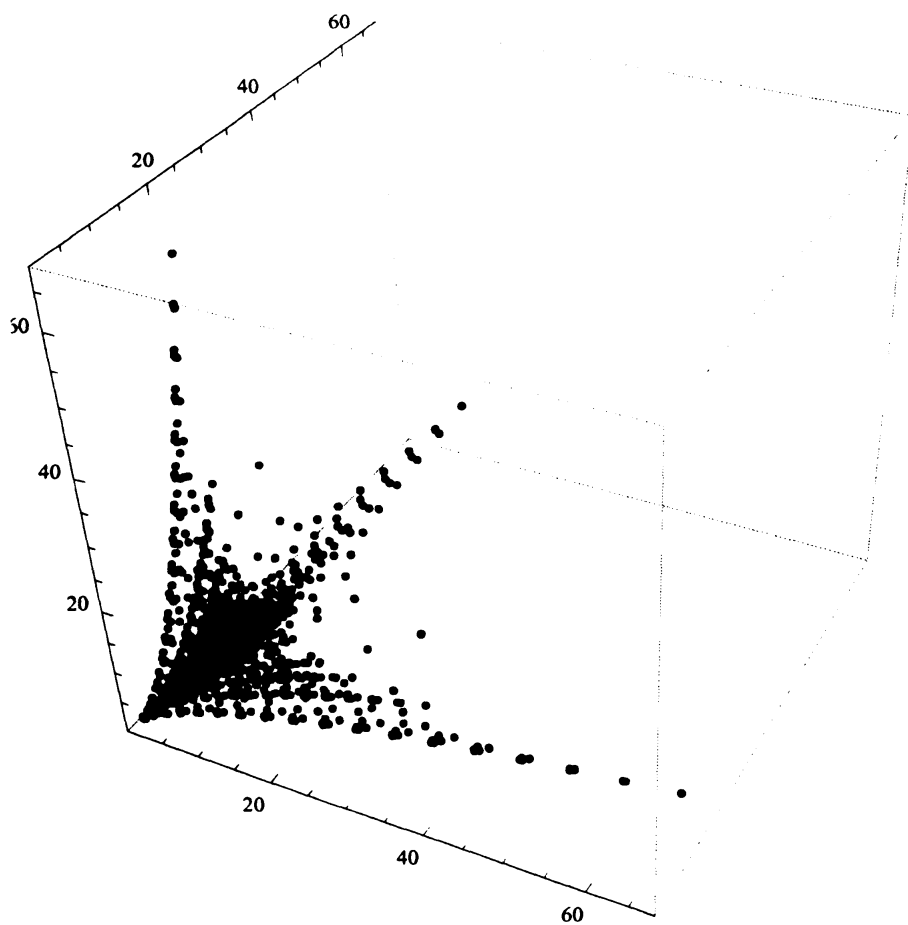
$(k_1, k_2) = (1, 2)$ の場合を計算する.

- $p = 5$ のとき $(a_1, a_2) \simeq (0.450, 0.577)$
- $p = 4$ のとき $(a_1, a_2) \simeq (0.643, 0.732)$
- $p = 1, 2, 3$ のとき $0 < a_1 < a_2 < 1$ をみたす解は存在しない.

一般に $\epsilon = 0$ のとき, 「 $\sum_{\alpha=1}^n k_\alpha < p$ を満たす正整数 k_α に対し $k_\alpha(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}$ なる 1 より小さい正の実数 a_i ($i = 1, \dots, n$) がただ一つ定まる。」ことが予想できる. 特に $n = 1$ のときは例 1 に帰着する.

例 4. $(\epsilon, n, m) = (1, 3, 2)$

図は $\mathbf{CP}(2)$ 上の S^5 束の場合に方程式 $k_\alpha \in \mathbf{Z}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) を解いたものであり, 3 次元の (a_1, a_2, a_3) 空間において Einstein 計量が現れる “ ∞ ” の場所をプロットしている.



参考文献

- [1] L. Bérard Bergery, “Sur de nouvelles variétés riemanniennes d’Einstein,” Publications de l’Institut E.Cartan, n4,(Nancy), (1982),1-60.
- [2] W. Chen, H. Lü and C.N. Pope, “General Kerr-NUT-AdS metrics in all dimensions,” *Class. Quantum. Grav.* **23**, (2006) 5323-5340, arXiv:hep-th/0604125.
- [3] V.P. Frolov and D. Kubizňák, “Hidden Symmetry of Higher Dimensional Rotating Black Holes,” *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 11101, arXiv:gr-qc/0605058.
- [4] V.P. Frolov, P. Krtous and D. Kubizňák, “Separability of Hamilton-Jacobi and Klein-Gordon Equations in General Kerr-NUT-AdS Spacetimes,” *J. High Energy Phys.* **02** (2007) 005, arXiv:hep-th/0611245.
- [5] N. Hamamoto, T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, “Kerr-NUT-de Sitter curvature in all dimensions,” *J. Phys. A* **40** (2007) F177-F184, arXiv:hep-th/0611285.
- [6] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, “Closed conformal Killing-Yano tensor and geodesic integrability,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 025204, arXiv:hep-th/0707.4039.
- [7] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, “Closed conformal Killing-Yano tensor and Kerr-NUT-de Sitter uniqueness,” *Phys. Lett. B* **656** (2007) 214-216, arXiv:hep-th/0708.1368.
- [8] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, “Generalized Kerr-NUT-de Sitter metrics in all dimensions,” *Phys. Lett. B* **666** (2008) 391-394, arXiv:hep-th/0805.0834.
- [9] T. Houri, T. Oota and Y. Yasui, “Closed conformal Killing-Yano tensor and uniqueness of generalized Kerr-NUT-de Sitter spacetime,” *Class. Quantum. Grav.* **26** (2009) 045015, arXiv:hep-th/0805.3877.
- [10] Y. Hashimoto, M. Sakaguchi and Y. Yasui, “New Infinite Series of Einstein Metrics on Sphere Bundles from AdS Black Holes,” *Commun.Math.Phys.* **257** (2005) 273-285, arXiv:hep-th/0402199.
- [11] T. Kashiwada, “On conformal Killing tensors,” *Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.*, **19** (1968) 67-74.
- [12] P. Krtous, V.P. Frolov and D. Kubizňák, “Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime,” *Phys.Rev.D* **78**, (2008) 064022, arXiv:hep-th/0804.4705.

- [13] J. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** (1998) 231-252, arXiv:hep-th/9711200.
- [14] T. Oota and Y. Yasui, “Separability of Dirac equation in higher dimensional Kerr-NUT-de Sitter spacetime,” *Phys. Lett.* **B659** (2008) 688-693, arXiv:hep-th/0711.0078.
- [15] T. Oota and Y. Yasui, “Separability of Gravitational Perturbation in Generalized Kerr-NUT-de Sitter Spacetime,” arXiv:hep-th/0812.1623.
- [16] D. Page, “A compact rotating gravitational instanton”, *Phys. Lett.* **B79** (1979) 235-238.
- [17] D. Page, D. Kubizňák, M. Vasudevan and P. Krtous, “Complete Integrability of Geodesic Motion in General Higher-Dimensional Rotating Black Hole Spacetime”, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 061102, arXiv:hep-th/0611083.
- [18] U. Semmelmann, “Conformal Killing forms on Riemannian manifolds”, arXiv:math/0206117.
- [19] S. Tachibana, “On conformal Killing tensor in Riemannian space,” *Tohoku Math. J.* **21** (1969) 56-64.