

時空カオスにおける相関カスケードのウェーブレット解析*

中尾 裕也 (理化学研究所 脳科学総合研究センター)
〒 351-0198 埼玉県和光市広沢 2-1 (nakao@mns.brain.riken.go.jp)

強く相互作用する多体系は自然界に偏在するが、その複雑な力学過程をどう捉えて記述するかという問題は、長い間議論の対象となってきた。また自然科学が現時点で直面しているものでもある。その中で、発達した流体乱流におけるリチャードソンのカスケード描像を、強く相互作用する多体系の本質を捉えた成功例のひとつとして挙げることができよう。つまり大きな渦が徐々に小さな渦に分解され、最終的に粘性によって散逸されるという描像である。間欠性の難しい問題を別にすれば、この描像はコロモゴロフの1941年の理論によって数学的な記述を与えられ、有名なエネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則を導いた。これは、運良く流体乱流においては、多数のモードの複雑な非線形ダイナミクスの結果、空間(あるいは時間/エネルギー)スケールにおける単純な階層構造が形成されていることによる。流体乱流での成功以来、エネルギー、あるいはより一般に、情報や因果関係が異なるスケールの事象間を流れるという描像に基づいて多体系の挙動を捉えようという試みが、いくつかの系についてなされてきた。

さて、種々の現象の空間-スケールにおける性質を解析する上で、ウェーブレット変換はその空間とスケールの両方における局在性から有用な道具であることが期待され、たくさんの応用が試みられてきた。この研究では、空間的に広がった場の時空スケール相関のウェーブレットを用いた簡単な解析方法を提案し、それをスケーリング則を示す典型的な時空カオス系に対して適用する。

以下では時空カオス系として非局所的に結合した複素ギンツブルクランダウ (CGL) 振動子系を扱う。通常の拡散結合したCGL振動子系とは異なり、この系はフラクタル的な空間パターンを示す。非局所結合CGL方程式は

$$\dot{W}(x,t) = W - (1 + ic_2)|W|^2 W + K(1 + ic_1) \int dx' g(|x' - x|) [W(x',t) - W(x,t)]$$

で与えられ、蔵本によって最初に導入された。各振動子は、拡散的な相互作用のかわりに、距離 $|x|$ の減少関数である重み $g(|x|)$ によって平均された他の振動子の非局所平均場を感じて運動する。重みとしては $g(|x|) = g_0 \exp(-|x|/\gamma)$ という形のものをを用い、非局所結合距離は γ である。以下これをNCGLと呼ぶ。図1にNCGLの振幅パターンとパワースペクトルを示す。振幅パターンはフラクタル的で、パワースペクトルはべき的な減衰を示す。このように、NCGLは通常の拡散結合CGL方程式とは相互作用が違うだけだが、種々の統計量が特異なスケーリング則を示す。

さて、パワースペクトルのべき的な挙動は、流体乱流におけるエネルギースペクトルの $-5/3$ 乗則を思い出させる。

(ただし、NCGL方程式においてはべきの指数が結合強度 K とともに変化する。) 流体乱流においては、エネルギースペクトルのべき的な挙動は渦の崩壊のカスケード過程に関連づけられている。そこで我々はナイーブに、NCGLにも何らかのカスケード過程が内在しているのではないかと予想することにする。もちろんNCGLにはエネルギーやエンストロフィーのような保存量は存在しない。しかし、なお、因果関係や情報、あるいは単に相関と呼んでもよいが、何らかの量の長波長から短波長へのカスケードを期待してもよからう。以下、そのようなカスケード過程が実際に存在することを示すために、スケール間の揺らぎの時空相関を解析する方法を議論する。

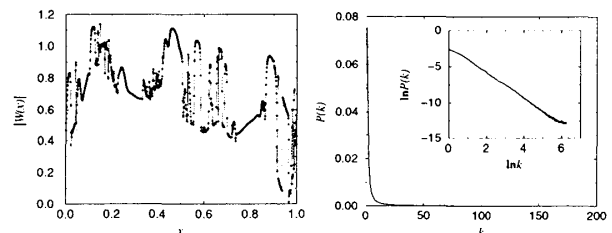


図1. (左)NCGLの振幅場のスナップショット. (右)NCGLの振幅場のパワースペクトル. 挿入図は両対数プロット.

異なる時刻の空間パターンをスケール毎に分解して、その成分間の時間相関を調べることを考えよう。正規直交ウェーブレット基底を使って空間パターン $V(x)$ を展開する:

$$V(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k} \psi_{j,k}(x).$$

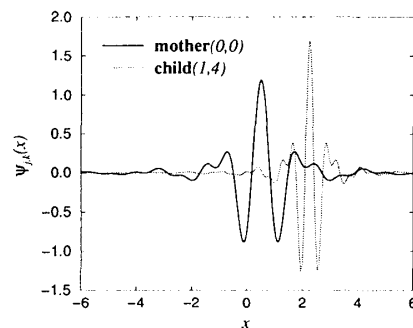


図2. Meyerのウェーブレット; 母とひとつの子.

* 当初予定していた発表内容は「結合素子系の時空カオスのリアブノフベクトル」であったが都合により変更した。この発表の詳細内容は Int. J. Bif. Chaos 11 (2001) 1483 に出版された。

ここで $a_{j,k}$ は展開係数で、 $\psi_{j,k}(x)$ は母ウェーブレット $\psi(x)$ から並進と縮小 $\psi_{j,k}(x) = \sqrt{2^j} \psi(2^j x - k)$ により作られた子ウェーブレットである。子ウェーブレット $\psi_{j,k}(x)$

は空間とスケールの両方で、位置 $k/2^j$ 、スケール $1/2^j$ に
だいたい局在しているのを、

$$a_{j,k} = \langle V, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V(x') \psi_{j,k}^*(x') dx'$$

で与えられる展開係数は、その空間-スケールにおける点の
近傍の $V(x)$ の揺らぎを定量化する。得られたウェーブレッ
ト展開係数 $a_{j,k}$ から、粗視化された場 $b_j(x)$ ($0 \leq x < 1$)
を $b_j(x) = \log |a_{j,k}|^2$ で新たに定義しておく。なお、ここ
では Meyer のウェーブレット (図 2) を使用する。

$V_1(x)$ をある時刻 t での系の振幅パターン、すなわち
 $V_1(x) = |W(x, t)|$ とし、 $V_2(x) = |W(x, t + \Delta t)|$ とし
よう。これらの振幅パターンから得た展開係数より、粗視
化された場 $b_{j_1}^1(x)$ と $b_{j_2}^2(x)$ が得られる。次に、これらの場
 $b_{j_1}^1(x)$ と $b_{j_2}^2(x)$ の平均からの揺らぎを $\Delta b_{j_1}^1(x)$ と $\Delta b_{j_2}^2(x)$
として、一種の相互相関行列 $C_{j_1, j_2}(\Delta t)$ を

$$C_{j_1, j_2}(\Delta t) = \frac{(\Delta b_{j_1}^1, \Delta b_{j_2}^2)}{[(\Delta b_{j_1}^1, \Delta b_{j_1}^1)(\Delta b_{j_2}^2, \Delta b_{j_2}^2)]^{1/2}}$$

と定義しよう。(,) は空間での内積、上線は時間平均をと
ることを表す。明らかに $C_{j_1, j_2}(\Delta t) = C_{j_2, j_1}(-\Delta t)$ が成立
する。図 3 にこの状況を図示した。

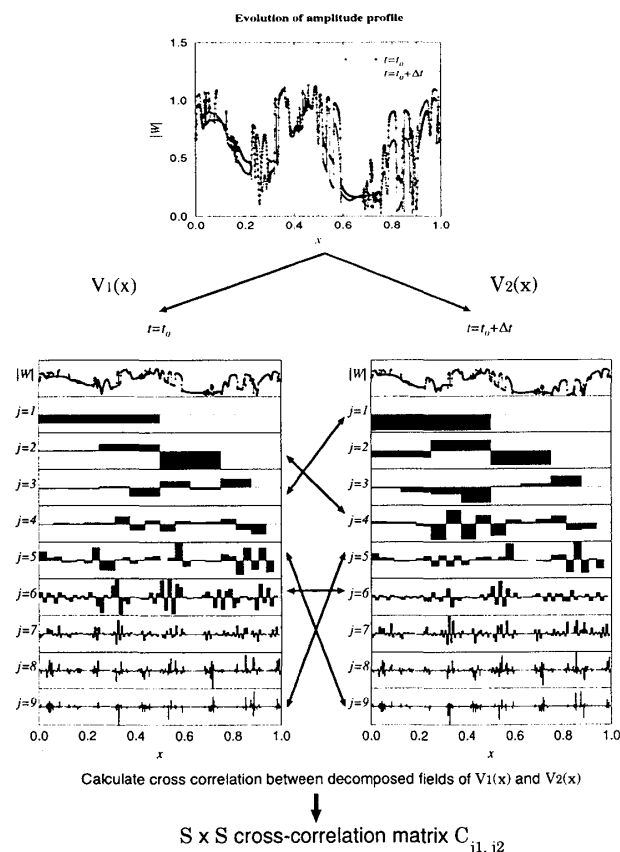


図 3. 各スケールの成分間の時間相関関数。

さて、 $\Delta t = 0$ なら $V_1(x)$ と $V_2(x)$ は同じものであり、
揺らぎ $\Delta b_{j_1}^1(x)$ と $\Delta b_{j_2}^2(x)$ も同一なので、 C_{j_1, j_2} は単なる
対称行列となる。一方、 $\Delta t \neq 0$ では $V_1(x)$ と $V_2(x)$ は Δt
に応じて異なるので、 C_{j_1, j_2} はもはや対称ではなく、その
非対称性が振幅パターンのスケール間相関の変動を特徴づ
けることが予想される。そのために、行列 C_{j_1, j_2} をさらに
対称部分と反対称部分に分解しよう：

$$D_{j_1, j_2}(\Delta t) = \frac{1}{2} \{C_{j_1, j_2}(\Delta t) + C_{j_2, j_1}(\Delta t)\},$$

$$E_{j_1, j_2}(\Delta t) = C_{j_1, j_2}(\Delta t) - C_{j_2, j_1}(\Delta t). \quad (1)$$

対称部分 D_{j_1, j_2} は時間反転変換 $\Delta t \leftrightarrow -\Delta t$ について不変
であるのに対し、反対称部分 E_{j_1, j_2} は不変ではない (反対
称である)。よって、行列 E_{j_1, j_2} が時間反転について対称
でない時空スケール相関、つまり何らかの情報あるいは相
関のスケール間の流れの計量を与えることが期待できる。

結合距離より小さなスケールについて、隣接するふたつ
のスケール j と $j+1$ の間の相関の反対称成分 $E_{j, j+1}$ の
時間差 Δt に対する変化を各スケールでの最大値で規格化
したものを、図 4 に示す。時間変動の様子にスケールに対
応した明確な時間順序が見られ、長波長 (小さな j) の事
象間の相関は比較的早く立ち上がり、短時間で減衰する一
方で、短波長 (大きな j) の事象間の相関は遅れて立ち上
がり、減衰にはより長い時間がかかることが分かる。さら
に、各空間スケール j 毎に時間差を適当にリスケールする
と各カーブが重なることから、NCGL における揺らぎの
スケール間の伝達には、自己相似性があることが分かる。
このことは場のフラクタル性に関する直観と矛盾しない。

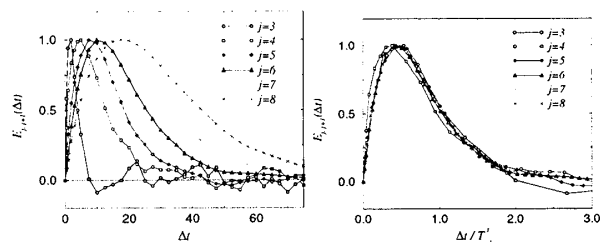


図 4. (左) NCGL の最大値で規格化した連続するふたつの
スケール j と $j+1$ の間の相関行列の反対称成分 $E_{j, j+1}$.
(右) スケール毎に時間差をリスケールしたもの。

以上の結果から、我々の簡単な相関行列による方法は時
空カオス系の力学過程の時空スケール相関をうまく捉えら
れるものと考えられる。特にスケーリング則を示す非局所
結合 CGL 系については、揺らぎの相関の長波長から短波
長へのカスケード的な伝播があることを示した。

[1] Frisch, U. [1995] *Turbulence, the legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge).

[2] Kuramoto, Y. [1995] "Scaling behavior of turbulent oscillators with non-local interaction", *Prog. Theor. Phys.* **94**, 321-330.

[3] Mallat, S. [1999] *A Wavelet Tour of Signal Processing* (Academic Press, San Diego).