

局所コンパクト空間上の adapted cone に関する
測度の掃散と dilation について

お茶の水大理 渡 辺 ヒサ子

§ 1. 序

K は locally convex 線型位相空間の compact, convex, metrizable subset とする。P. Cartier, J. M. Fell と P. A. Meyer は K 上の二つの positive Radon measure λ , μ に對して、次の (a), (b) は同値であることを証明した。

(a) μ は λ の balayage である。

(b) $\lambda T = \mu$ とする dilation T が存在する。

ここで、 K の Borel σ -field 上の Markov kernel T が dilation であるというのは、 K 上の任意の点 x に對して、 $\varepsilon_x T$ の重心が x であることという。

また、P. A. Meyer は K が compact, metrizable の場合に balayage と dilation の意味を拡張することにより、やはり (a), (b) は同値であることを証明した。

ここでは、locally compact, σ -compact K に對しても、

adapted coneの理論を使うことにより、上の定理を拡張できることを示す。

§ 2. adapted cone と測度の掃散について

Ω は locally compact, σ -compact とする。 Ω 上の実数値連続関数の全体を $C(\Omega)$ で表わし、compact support を持つ実数値連続関数の全体を $C_c(\Omega)$ で表わす。 $C^+(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f \geq 0\}$
 $C^+_b(\Omega) = \{f \in C_b(\Omega); f \geq 0\}$ とおく。

$C^+(\Omega)$ の関数 u, v に対して、どんな $\varepsilon > 0$ に対しても

$$x \in K \Rightarrow v(x) \leq \varepsilon u(x)$$

であるような compact $K \subset \Omega$ が存在するとする。このとき $v \prec u$ と書く。

P は $C^+(\Omega)$ の convex cone とする。 P が次の条件を満足するとする。 P は adapted cone と呼ばれる。

$$(i) \quad \forall x \in \Omega, \exists g \in P \quad g(x) > 0,$$

$$(ii) \quad \forall g \in P, \exists h \in P, \quad g \uparrow \prec h.$$

$C^+(\Omega)$ に属する関数 f に対して

$$H_g = \{f \in C(\Omega); \exists \alpha > 0 \quad |f| \leq \alpha g\}$$

とおく。このとき、 H_g は線型空間となり、 $\|\cdot\|_g$ と

$$\|f\|_g = \inf \{\alpha; \exists \alpha > 0, |f| \leq \alpha g\}$$

で定めることにより、 H_g は Banach 空間となる。cone $P \subset C^+(\Omega)$

に於いて、 $H_P = \bigcup_{g \in P} H_g$ とおけば、 H_P は vector space である。
 H_P に Banach 空間 $\{H_g\}_{g \in P}$ の inductive limit の位相を導入
 する。おなめち。

$H_P \cap O$ が open $\iff \forall g \in P, H_g \cap O$ は H_g で open.

μ は Ω 上の正値測度である。 μ が P -可積分であるとは、
 P のどんな元 f に於いても、 $\mu(|f|) < +\infty$ が成り立つことであ
 る。 P -可積分であるような正値測度の全体を $\mathcal{M}_P^+$ で表わす。
 特に P が adapted cone の時には、 H_P 上のどんな positive
 linear form も $\mathcal{M}_P^+$ の measure として表わされる。[6]

$C \in C(\Omega)$ の cone である。 Ω 上の正値測度 λ, μ に於いて、
 どんな $f \in C$ に於いても、 $\mu(f) \leq \lambda(f)$ であるとき、 $\lambda \prec \mu$ と
 書き、 μ は C に関する階級であるという。 $C(\Omega)$ 上の cone
 C, P は $P \subset C \subset H_P$ を満足すると仮定する。 $g \in H_P$ に
 於いて、

$$\hat{g}(x) = \inf \{ f(x); f \geq g, f \in C \}$$

と定義する。このとき、 $|\hat{g}(x)| < +\infty$ である。 $x \in \Omega$ に於いて、
 写像 $g \rightarrow \hat{g}(x)$ は H_P 上の sublinear function である。
 特に C が inf-stable ならば、おなめち。

$$f, g \in C \implies \inf(f, g) \in C$$

を満足するならば、 Ω 上の関数 $x \rightarrow \hat{g}(x)$ は上半連続関数であ
 る。

Proposition 1.

C は $C(\Omega)$ の inf-stable cone, P は $C^+(\Omega)$ の adapted cone で $P \subset C \subset H_P$ を満たすものと仮定する. λ, μ は Ω 上の P -integrable positive measure とするとき、次の 2 条件は同値である。

(i) $\lambda < \mu$,

(ii) $\mu(g) \leq \int \hat{g}(x) d\lambda(x) \quad \forall g \in H_P.$

Proposition 2.

C は $C(\Omega)$ の cone, P は $C^+(\Omega)$ の adapted cone で $P \subset C \subset H_P$ を満たすとき、どんな $x \in \Omega$ に於いても

$$\hat{g}(x) = \sup_{\substack{E_x \prec \mu \\ \mu \geq 0}} \int g d\mu$$

(証明) $E_x \prec \mu$ ならば $f \geq g$ ならば $f \in C$ に於いて $\mu(g) \leq \mu(f) \leq \int f(x) d\mu$ であるから $\sup_{E_x \prec \mu} \mu(g) \leq \int g(x) d\mu$ が成り立つ。

逆に、 $x \in \Omega$ を固定して、写像 $\varphi \rightarrow \varphi(x)$ は H_P 上の sub-linear function である。従って $g \in H_P$ に於いて

Hahn-Banach の拡張定理により、 H_P 上の linear form L で g に於いては $L(g) = \hat{g}(x)$ であり、 H_P のどんな φ に於いても $L(\varphi) \leq \varphi(x)$ であるような L が存在する。また P は adapted であるから、どんな $\varphi \in H_P$ に於いても $\mu(\varphi) = L(\varphi)$ であるような

正値測度 μ が存在する. $f(x) = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in C_c(\Omega)}} \varphi(x)$ なる f とする.

$f \in C$ に對して

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu ; \varphi \leq f, \varphi \in C_c(\Omega) \right\}$$

である. $\exists T: C_c(\Omega) \subset H_p$ なる.

$$\int f d\mu = \sup L(\varphi) \leq \sup \varphi(x) \leq f(x).$$

従って $\exists x \in \mu$ である. 特に $\mu(g) = \hat{g}(x)$ なる.

$$\hat{g}(x) \leq \sup_{g \in \mu} \mu(g) \text{ が成り立つ.}$$

(証明)

§ 3. H_p の separability.

ある $x \in \Omega$ に對して $f(x) > 0$ である f は Ω 上の関数で strictly positive であるという.

Proposition 3

Ω は locally compact, σ -compact, P は $C^1(\Omega)$ の adapted cone で strictly positive f を含むとする. そのとき $C_c(\Omega)$ は H_p で稠密である.

(証明). $\cup \ni \varphi \in H_p$ の近傍とある。 $H_u \ni \varphi$ であるような
 どんな $u \in P$ に対しても、 $\cup \cap H_u$ は H_u における open set
 だから、 $\{k: \|\varphi - k\|_u < \varepsilon\} \subset \cup \cap H_u$ なる $\varepsilon > 0$ が存在する。
 従って、 $C_k(\Omega)$ が H_p で稠密を証明するためには、 次の2条件
 を満足する $u \in P$ が存在することが必要である。

(i) $H_u \ni \varphi$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \{k: \|\varphi - k\|_u < \varepsilon\} \cap C_k(\Omega) \neq \emptyset$.

$\varphi \in H_u$ であるような u に対して、 $|\varphi| \leq \|\varphi\|_u u$ であり、 P
 は adapted だから、 $v \uparrow u$ なる $u \in P$ が存在する。 又な
 め、 どんな $\varepsilon > 0$ に対しても、 ある compact set K が
 ある。

$$x \in K^c \implies v(x) \leq \varepsilon u(x)$$

を満足する。 Ω 上で $f > 0$ であるような $f \in P$ は存在するから、
 必要ならこの f を加えてことにし、 K 上で $u > 0$ と
 仮定しよう。 従って、 ある $\lambda > 0$ に対して、 Ω 上で

$$|\varphi| \leq (\lambda + \varepsilon \|\varphi\|_u) u \text{ が成り立つ。 又なめ、 } \varphi \in H_u \text{ である。}$$

さらに、 K 上で $|\varphi| \leq g$ なる $g \in C_k^+(\Omega)$ は存在する。

$$k = \sup\{-g, \inf(\varphi, g)\} \text{ とおけば、 } k \in C_k^+(\Omega) \text{ であり、}$$

$$\|\varphi - k\|_u < \varepsilon \|\varphi\|_u \text{ を満足する。}$$

(証明終)

Proposition 4.

Ω は locally compact, σ -compact, metrizable とする。

cone P は 次の条件(*) を満足する;

$$(*) \quad \forall x \in \Omega, \exists f \in P, f(x) > 0.$$

このとき、可算集合 $D \subset C(\Omega)$ で D は H_P の位相で $C(\Omega)$ で稠密であるような D が存在する。

(証明) $\{K_n\}$ は $\bigcup_n K_n = \Omega$ かつ $K_n \subset K_{n+1}^c$ を満足する compact set の増大列とする。各 $C(K_n)$ は一様収束の位相で可分だから、次の条件を満足するような可算集合 $D_n \subset C(K_n)$ が存在する;

$$(a). \quad \forall h \in D_n, \text{Supp } h_n \subset K_{n+1},$$

$$(b). \quad \{h|_{K_n}; h \in D_n\} \text{ は一様収束の位相で } C(K_n) \text{ で稠密。}$$

$D' = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{-h; h \in D_n\} \cup D_n]$, $D = \{ \sup(h_1, \inf(h_2, h_3)); h_i \in D' \}$ とおく。 D は可算集合である。

$C(\Omega)$ の φ を考える。 φ の support は K_n に含まれるとする。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $h_1 \in D_{n+1}$ で K_{n+1} 上で $|\varphi - h_1| < \varepsilon$ なる

$h_1 \in D_{n+1}$ が存在する。 また K_n 上で $h_2 \geq |\varphi|$ であり、

$\text{Supp } h_2 \subset K_{n+1}$ なる $h_2 \in D_{n+1}$ が存在する。 $f = \sup(-h_2, \inf(h_1, h_2))$

とおけば、 $f \in D$ であり、 K_{n+1} 上で $|\varphi - f| < \varepsilon$ であり、 K_{n+1}^c

上で $|\varphi - f| = 0$ である。 また K_{n+1} 上で $\psi > 1$ なる $\psi \in P$

が存在し、 Ω 上で $|\varphi - f| < \varepsilon$ かつ $\|\varphi - f\|_0 < \varepsilon$ である。

従って、 D は $C_c(\Omega)$ で H_p の位相で稠密である。 (証明終)

Proposition 3 と Proposition 4 より、次の系が得られる。

系. Ω は locally compact, σ -compact, metrizable とし、

$C(\Omega)$ の cone P は strictly positive f を含む adapted cone とする。そのとき、 H_p は separable である。

§ 4. Strassen の定理の拡張.

E は vector space, α は directed set (order $<$) で、 $\alpha \rightarrow \beta$ に E の subspace E_α が対応していて、次の条件を満足するものとする、

$$(a). \alpha < \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta,$$

$$(b). E = \bigcup_{\alpha \in \alpha} E_\alpha.$$

(c). 各 E_α は norm $\|\cdot\|_\alpha$ を持つ Banach space.

このとき、 E は Banach space $\{E_\alpha\}$ の inductive limit の位相を導入する。

また、 $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$ は measure space とする。 $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, $\lambda(K_n) < +\infty$ を満足するよる単増大列 $\{K_n\}$ が存在するとする。

S_E は E 上の sublinear function の全体とし、 P は Ω 上 S_E の中への写像 $\omega \rightarrow P_\omega$ とする。 P が条件 (c) を満足する

とは、各 α に対して 次の条件 (i), (ii), (iii) を満足している Ω 上の関数 $g_\alpha \geq 0$ が対応していることをいう。

- (i). g_α は λ -可積分,
- (ii). $\forall K_n, \|g_\alpha|_{K_n}\|_\infty < +\infty,$
- (iii). $\exists M(\alpha) > 0$ constant.

$$|P_\omega(x)| \leq M(\alpha) \|x\|_\alpha g_\alpha(\omega), \quad \forall x \in E_\alpha, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

次の定理 1, 2 は H. Watanabe [7] で証明されている。

定理 1.

Vector space E は Banach space $\{E_\alpha\}$ の inductive limit で表わされ、 E の位相が separable とする。

$(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ は positive, complete, σ -finite measure λ を

持つ measure space とする。 Ω から S_E の中への写像 $P:$

$\omega \rightarrow P_\omega$ は条件 (C) を満足するものとする。

$$S(x) = \int P_\omega(x) d\lambda(\omega)$$

とおく。 $\forall x' \in E'$ に対して、次の (a), (b) は同値である;

(a). $\langle x', x \rangle \leq S(x), \quad \forall x \in E.$

(b). 次の条件を満足する Ω から E' の中への写像 $\omega \rightarrow x'_\omega$ が存在する;

(i). $\forall x \in E, \quad \omega \rightarrow \langle x'_\omega, x \rangle$ は λ -measurable,

$$(vi) \quad \langle x'_\omega, x \rangle \leq p_\omega(x) \quad \forall x \in E, \forall \omega \in \Omega,$$

$$(vii) \quad \langle x', x \rangle = \int \langle x'_\omega, x \rangle d\lambda(\omega) \quad \forall x \in E.$$

定理2.

定理1で特に E が ordered vector space である時は、 E 上の positive linear form $x' \mapsto \langle x', x \rangle$ に対して (vi) の x'_ω が positive であるようにできる。

§5. dilation の存在.

Ω は locally compact, σ -compact とし、 P は $C^+(\Omega)$ の convex cone とする。 P -integrable positive Radon measure の全体を $\mathcal{M}_P^+$ で表わす。 $\exists T \in C(\Omega)$ の cone とし、 $P \subset C \subset H_P$ とする。 Cone C に関する $\mathcal{M}_P^+$ の中の掃散に上る order $\leq$ で表わす。 Ω 上の Borel σ -field 上の kernel T が C -dilation であるとは、 Ω の各元 ω に対して $\varepsilon_\omega \leq \varepsilon_\omega T$ であることとをいう。 ここで、 ε_ω は ω における point measure である。

定理3.

Ω は locally compact, σ -compact, metrizable とする。
 $C^+(\Omega)$ の convex cone P は strictly positive $f \in \text{int } P$ を含む。

adapted cone とある。 $\exists T_2(C(\Omega))$ の cone C は $H_p \supset C \supset p$ を満足ある inf-stable cone とある。 このとき $M_p^+ \ni \lambda$ μ に $\#$ して、次の (a), (b) は同値である。

$$(a) \quad \lambda \prec \mu$$

$$(b) \quad \lambda T = \mu \text{ とする dilation } T \text{ が存在する。}$$

(証明) Vector space H_p は Banach spaces $\{H_g\}_{g \in p}$ の inductive limit として表わされ、 ξ の系により

separable である。 $f \in H_p$ に $\#$ して、 $\hat{f}(\omega) = \inf_{\substack{g \geq f \\ g \in C}} g(\omega)$ とおけば、 $\hat{f}$ は上半連続であり、 λ -integrable である。

$f \rightarrow \hat{f}(\omega)$ は sublinear function で proposition 2 に
より $\hat{f}(\omega) = \sup_{E_\omega \leq \theta} \langle \theta, f \rangle$ である。 $\exists T_2$ proposition
1 により、(a) は次の (a)' と同値である；

$$(a)' \quad \mu(f) \leq \int \hat{f}(\omega) d\lambda(\omega)。$$

従って、(a)' と (b) が同値であることがわかる。よい。

$$(b) \rightarrow (a)'$$

T は dilation で $\mu = \lambda T$ なる $E_\omega \leq E_{\omega T}$ であり、任意
の $f \in H_p$ に $\#$ して、

$$\langle \mu, f \rangle = \int \langle E_{\omega T}, f \rangle d\lambda(\omega)$$

が成り立つ。従って、

$$\langle \mu, f \rangle \leq \int \hat{f}(\omega) d\lambda(\omega)。$$

(a)' $\rightarrow$ (b).

定理2を使う。 $(\Omega, \mathcal{A})$ は Ω 上の λ -measurable set $\mathcal{A}$ が generate した σ -field として、 $E = H_P$ とする。 $P_\omega(f) = \hat{f}(\omega)$ とおく。 $\{K_n\}$ は Ω の compact set からなる増大列で $\bigcup K_n = \Omega$, $K_n \subset K_{n+1}$ を満足するものとする。 P の元 v は λ -可積分であり、 $v \in C(\Omega)$ だから、各 K_i への restriction $v|_{K_i}$ は bounded である。また、任意の $f \in H_P$ に対して

$$|P_\omega(f)| \leq \|f\|_P v(\omega)$$

だから、 P は条件 (C) を満足する。従って、定理2を適用できる。また、 H_P 上の positive linear form は Ω 上の P -可積分正値測度として表現されること、 H_P の separability に注意すれば、 C -dilation T の存在が証明される。

文献

- [1]. P. Cartier, J. M. G. Fell and P. A. Meyer;
 Comparaison des mesures portées par
 un ensemble convexe compact. Bull. Soc.
 M. France, 92 (1964), 435-445.

- [2] G. Choquet: Le problème des moments.
Sémi. Choquet, 1. (1962).
- [3] G. Choquet; Lectures on Analysis, Vol 1, 2.
(Benjamin, 1969).
- [4] A. I. Tulcea and C. I. Tulcea; Topics in
the Theory of liftings. (Springer, 1969).
- [5] P. A. Meyer; Probability and potentials.
(Blaisdell, 1968).
- [6] G. Mokobodzki and D. Sibony; Cônes adaptés
de fonctions continues et théorie du
potentiel. Sémi. Choquet, 6 (1966/67).
- [7] H. Watanabe; Liftings and a generalized
Strassen's theorem. Natu. Sci. Rep. Ochanomizu
Uni. (To appear).
- [8] V. Strassen; The existence of probability
measures with given marginals. Am. M.
Stat, 36 (1965), 423-439.