

Banach 束における submarkov 半群について.

名大理 国田 寛

Banach 束における正の contraction 半群の infinitesimal generator による特徴づけに関しては, Phillips [3], Hasegawa [1], Sato [4] の結果がある. これらの結果は, 特に Banach 束 E の連続関数の空間 $C_0(E)$ のときは, submarkov 半群の特徴づけになっている. しかし Markov 過程にこの種の議論を応用するためには, L^2 を含む一般の Banach 束で submarkov 半群を生成する infinitesimal generator を特徴づけることが重要である. §1 では Sato によって導入された Banach 束上の functional を用いて, この特徴づけを行いたい. §2 では §1 の結果を用いて, Dirichlet space の構造を調べる. これは M. Zdo [2] によって得られた非対称な Dirichlet space に関する結果と密接に関連している. §3 ではいくつかの例を挙げる.

§1. Submarkov semigroup と infinitesimal generator.

X を vector 束とする. 以下定義 1.1 の記号はこゝからなる.

つまり Hasegawa [] にしたから、例としては $f^+ = f \vee 0$, $f^- = f \wedge 0$,
 $\|f\| = \|f^+ + f^-\|$ 等がある。 X' の $\varepsilon > 0$ に対する条件を ε にするときは
 unit を ω , 今後 ε を固定する。

$$O\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} f_{1/\varepsilon} = f, \quad \forall f \in X'$$

ただし, f が $\{f_n\}$ の $O\text{-}\lim$ ならば $\|f - f_n\| \leq g_n$, $g_n \downarrow 0$ となる
 $\{g_n\}$ があることである。 X' の subvector 束 X が
 $\forall f \in X \Rightarrow f_{1/\varepsilon} \in X$ となることを, complete と呼ぶことに
 する。 X' の subvector 束 X 上に定義された norm (完備)
 $\|f\| \leq \|g\| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$ となることを, $(X, \|\cdot\|)$ は Banach
 束という。以下 complete の Banach 束 X を固定する。

Hasegawa [] と Sato [] にしたから $X \times X$ 上の
 functional τ と σ のように定義する

$$\tau(f, g) = \lim_{a \downarrow 0} \frac{1}{a} (\|f + ag\| - \|g\|)$$

$$\sigma(f, g) = \inf \tau(f, g + h \vee (-hf))$$

ただし $\inf$ は $\|h\| \wedge f = 0$ となるすべての $h \in X$ と $h \in [0, +\infty)$
 に関して取る。

Proposition 1.1. $f \geq 0$ とする。

- (i) $-\|g\| \leq \sigma(f, g) \leq \|g\|$. 特に $\sigma(f, 0) = 0$.
- (ii) $\sigma(f, ag) = a\sigma(f, g)$, $\forall a \geq 0$.

$$(iii) \quad \sigma(f, af + g) = a\|f\| + \sigma(f, g) \quad \forall a$$

$$(iv) \quad \sigma(f, g+h) \leq \sigma(f, g) + \sigma(f, h). \text{ 特に } \sigma(f, -g) \geq -\sigma(f, g).$$

$$(v) \quad g \leq h \Rightarrow \sigma(f, g) \leq \sigma(f, h)$$

$$(vi) \quad f \wedge h = 0 \Rightarrow \sigma(f, g) = \sigma(f, g+h)$$

$$\text{特に } f \wedge g = 0 \Rightarrow \sigma(f, g) = 0.$$

$$(vii) \quad f \wedge g \leq 0 \Rightarrow \sigma(f, g) \leq 0$$

$$f \wedge (-g) \leq 0 \Rightarrow \sigma(f, g) \geq 0.$$

よって (i) - (vi) の証明は [4] にある. (vii) の前半の不等式の証明のためには, $f \wedge g \leq 0 \Rightarrow f \wedge g^+ = 0$ を示せばよい. 実際, このことと, (i) と (vi) から (vii) の前半はたやすく得られる. $f \wedge g^+ + g^- = (f + g^-) \wedge (g^+ + g^-) \leq f \wedge g \leq 0$. したがって, $f \wedge g^+ \leq -g^-$. ゆえに $(f \wedge g^+) \wedge g^+ \leq (-g^-) \wedge g^+ = 0$. したがって $f \wedge g^+ \leq 0$. $f \vee g^+ \geq 0$ は明らか. したがって $f \wedge g \leq 0 \Rightarrow f \wedge g^+ = 0$ が言える. (vii) の後半は, (vii) の前半と (iv) の後半から得られる.

定義 1.1 $X \rightarrow X$ の bounded linear operator の system $T_t, t \geq 0$ に対して条件が与えられ, submarkov semigroup と略称する.

$$(T.1) \quad T_t \cdot T_s = T_{t+s}, \quad T_0 = I = \text{identity}$$

$$(T.2) \quad \lim_{t \downarrow 0} T_t f = f \quad (\text{strongly}), \quad \forall f \in X.$$

(T.3) $\|T_t\| \leq e^{\beta_0 t}$, $\forall t \geq 0$ $\Leftrightarrow \exists t_0 \exists \beta_0 \geq 0$ 存在

(T.4) $f \geq 0 \Rightarrow T_t f \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

(T.5) $f \leq c \Rightarrow T_t f \leq c$, $\forall t \geq 0$.

定義 1.2. $X \rightarrow X$ の linear operator A を completely dispersive とす

$$\sigma((f-ce)^+, Af) \leq \beta_0 \|(f-ce)^+\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A), \quad \forall c \geq 0$$

$\Leftrightarrow \exists t_0 \exists \beta_0 \geq 0$ 存在すること. $t \geq t_0 \Rightarrow (f-ce)^+ = f - f_1 ce$

定理 1.1. X に於ける linear operator A に対し, 次の (a),

(b) は同値.

(a) A はある submarkov semigroup の infinitesimal generator.

(b) A は completely dispersive, $\mathcal{D}(A)$ は dense かつある $\beta_0 \geq 0$ 存在し,

$$(1.1) \quad R(\alpha - A) = X, \quad \forall \alpha \geq \beta_0.$$

特に A が有界作用素の場合は, (a), (b) は次の (c) と同値.

$$(c) \quad \mathcal{D}(A) = X \Rightarrow$$

$$(1.2) \quad \sigma((f-ce)^+, A(f_1 ce)) \leq 0, \quad \forall c \geq 0, \quad \forall f \in X.$$

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 以下, $ce = c$ と置く (ことにする $\|T_t\| \leq e^{\beta_0 t}$

$\Leftrightarrow \exists t_0 \exists \beta_0 \geq 0$).

$$\begin{aligned}
 (T_t - I)f &= (T_t - I)(f - c)^+ + (T_t - I)f \wedge c \\
 &= (e^{-\beta_0 t} T_t - I)(f - c)^+ + (1 - e^{-\beta_0 t}) T_t (f - c)^+ + (T_t - I)f \wedge c
 \end{aligned}$$

これから, Prop 1.1, (iv) より

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad \sigma((f - c)^+, (T_t - I)f) &\leq \sigma((f - c)^+, (e^{-\beta_0 t} T_t - I)(f - c)^+) \\
 &\quad + \sigma((f - c)^+, (1 - e^{-\beta_0 t}) T_t (f - c)^+) \\
 &\quad + \sigma((f - c)^+, (T_t - I)f \wedge c).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{右辺の第1項} &\leq \sigma((f - c)^+, e^{-\beta_0 t} T_t (f - c)^+) - \| (f - c)^+ \| \quad (\text{by (iii)}), \\
 &\leq e^{-\beta_0 t} \| T_t (f - c)^+ \| - \| (f - c)^+ \| \quad (\text{by (i)}) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

$$\frac{\dot{\lambda} = \text{項}}{t} \xrightarrow{t \downarrow 0} \beta_0 \| (f - c)^+ \|.$$

$\dot{\lambda} = \text{項}$ は $(f - c)^+ \wedge \{(T_t - I)f \wedge c\} \leq 0$ より, (vii) により ≥ 0 .

これから (1.3) の両辺を $t > 0$ で割り, $t \rightarrow 0$ とすれば

$$\sigma((f - c)^+, Af) \leq \beta_0 \| (f - c)^+ \|.$$

b) $\Rightarrow$ a) の証明のために, $\forall f$ $(\alpha - A)f = g \leq 0 \Rightarrow f \leq 0$ かつ $\alpha > \beta_0$ を成立させることを示す. Prop. 1 (iii) $\frac{(v)}{(v)}$ より

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \beta_0 \|f^+\| &\geq \sigma(f^+, \alpha f^+ + \alpha f^- - g) \\
 &= \alpha \|f^+\| + \sigma(f^+, -g) \\
 &\geq \alpha \|f^+\|.
 \end{aligned}$$

$\alpha \geq 1$ なら $\|f^+\| = 0$ 即ち $f \leq 0$ と得る. 又上の事案から, $(\alpha - A)^* f = 0$ なら $f = 0$ かもしれない. $\alpha > \beta_0$ ならば $(\alpha - A)^{-1}$ が存在する. $G_\alpha = (\alpha - A)^{-1}$ とおく.

次に $\|G_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta_0}$ ($\forall \alpha > \beta_0$) を示そう. $g \geq 0$ かつ $f = G_\alpha g \geq 0$ となるから, (1.4) より

$$\beta_0 \|f\| \geq \alpha \|f\| + \sigma(f, -g) \geq \alpha \|f\| - \alpha \sigma(f, g) \quad (\text{by iv}),$$

即ち $\sigma(f, g) \geq (\alpha - \beta_0) \|f\|$. Prop 1.7 (i) を使えば $\|g\| \geq (\alpha - \beta_0) \|f\|$.

一般の $g \in X$ に対しては,

$$|G_\alpha g| \leq |G_\alpha g^+| + |G_\alpha g^-| = G_\alpha g^+ - G_\alpha g^- = G_\alpha |g|$$

となるから

$$\|G_\alpha g\| \leq \|G_\alpha |g|\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta_0} \|g\| = \frac{1}{\alpha - \beta_0} \|g\|.$$

$\alpha \geq 1$ なら $\|G_\alpha\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta_0}$ が得られる.

上の結果から, Hille-Yosida の定理によれば, A は infinitesimal generator に $t > 0$ semigroup T_t が一意に定まる. T_t は $\|T_t\| \leq e^{\beta_0 t}$ となり, (T.4) 及び (T.5) を証明する.

3. ために

$$(1.5) \quad 0 \leq g \leq e \Rightarrow 0 \leq \alpha G_\alpha g \leq e, \quad \forall \alpha > \beta_0.$$

を示せば十分である。実際、Hille-Yosida の semigroup の表現

$$(1.6) \quad T_t g = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t^{(n)} g$$

$$T_t^{(n)} g = \exp(-\alpha t) \sum \frac{(\alpha t)^n}{n!} [\alpha G_\alpha]^n g$$

にあると、(1.5) を示す。 $T_t^{(n)}$ は submarkov 性、 $(T_t x)$

も、 T_t の submarkov 性から得られる。 $g \geq 0 \Rightarrow G_\alpha g \geq 0$

はすでに示したから、 $g \leq e \Rightarrow f = G_\alpha g \leq e$ を示す。

仮定より

$$\sigma((f-e)^+, Af) = \sigma((f-e)^+, \alpha f - g) \leq \beta_0 \| (f-e)^+ \|.$$

ゆえに

$$0 \leq \sigma((f-e)^+, \alpha f - g - (f-e)^+)$$

$$= \sigma((f-e)^+, (\alpha - \beta_0)(f-e)^+ + \alpha(f-e) - g)$$

$$= (\alpha - \beta_0) \| (f-e)^+ \| + \sigma((f-e)^+, \alpha(f-e) - g).$$

よって

$$\{-(f-e)^+\} \vee \{\alpha(f-e) - g\} \geq 0$$

よって Prop. 1.1, (iv) により $\sigma((f-e)^+, \alpha(f-e) - g) \geq 0$.

したがって, $\|(f-c)^+\| = 0$, 即ち $f \leq c$ を得る.

つまり (a) $\Rightarrow$ (c). (a) $\Rightarrow$ (b) の証明の段階で, 不等式

$$\sigma((f-c)^+, (T_t - I)f \wedge c) \leq 0$$

を示した. したがって $\sigma((f-c)^+, Af \wedge c) \leq 0$ を得る.

(c) $\Rightarrow$ (e). A は有界作用素だから, ある $\beta_0 \geq 0$ があって

$$|\sigma(f, Af)| \leq \|Af\| \leq \beta_0 \|f\|.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \sigma((f-c)^+, Af) &\leq \sigma((f-c)^+, A(f-c)^+) + \sigma((f-c)^+, Af \wedge c) \\ &\leq \beta_0 \|(f-c)^+\|. \end{aligned}$$

$\alpha > \beta_0$ の $R(\alpha - A) = X$ と仮定することは, A にはある semi-group の infinitesimal generator に対応することは明らか. (証明終)

注意 1 A を dense T_0 domain $\mathcal{D}(A)$ で定義され, $\alpha > 0$ かつ $R(\alpha - A) = X$ となる α に対して $R(\alpha - A)$ は linear operator とする. A に対応する semi-group が存在すれば, これを $T_t(A)$ と書くことにする. 定理 1.1 の証明から, 次のことが容易に示される.

(I). (T.1) $\sim$ (T.3) とする $T_t(A)$ が存在する.

$$\iff \text{ある } \beta_0 \geq 0 \text{ があって, } \sigma(f, Af) \leq \beta_0 \|f\|, \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

(II). (T.1) ~ (T.4) とは同値 $T_+(A)$ が存在する.

$$\Leftrightarrow \text{ある } \beta_0 \geq 0 \text{ があつて, } \sigma(f^+, Af) \leq \beta_0 \|f^+\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

(III). (T.1) ~ (T.3) 及び (T.5) とは同値 $T_+(A)$ が存在する.

$$\Leftrightarrow \text{ある } \beta_0 \geq 0 \text{ があつて, } \sigma((f-e)^+, Af) \leq \beta_0 \|(f-e)^+\|$$

$$\text{かつ } \sigma(f, Af) \leq \beta_0 \|f\| \quad \text{が } \forall f \in \mathcal{D}(A) \text{ で成立する.}$$

注意 2. 定理 1.1 の証明では, σ の定義にもとづいてな
 る, Prop. 1.1 の性質のみを用いた. したがって, Prop. 1.1 の
 諸性質あるものは, もっと強い性質をもつ, $X \times X$ 上の functional
 が与えられる場合も当然定理 1.1 が成り立つ. 特に
 Prop. 1.1 の (iv) sub-additivity が $\forall f \in X$ で成り立つ場合
 は次の結果が成立する.

定理 1.1' A は dense (s domain $\mathcal{D}(A)$ で定義された linear
 operator で, λ が実数 λ に対して $\mathcal{D}(\lambda - A) = X$ となつて
 いる. このとき定理 1.1 の (a), (b) は更に次の条件と
 同値である.

$$(e') \quad \sigma(f - Uf, Af) \leq \beta_0 \|f - Uf\|, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

ただし $Uf = f^+ \wedge e$.

更に, A が有界なとき, (c) は次の (c') と同値である.

$$(c') \quad \sigma(f - Uf, AUf) \leq 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A)$$

証明. (a) $\Rightarrow$ (e') は 定理 1.1 の (a) $\Rightarrow$ (b) の証明にあ
 いて, $f \wedge e$ の代りに Uf を代入すれば, 全く同様になる.

と仮定する。 (2') $\Rightarrow$ (a) の証明。 $0 \leq g \leq 1$, $f = Gg$ とする。

$$\begin{aligned} \beta_0 \|f - Uf\| &\geq \sigma(f - Uf, \alpha f - g) \\ &= \sigma(f - Uf, \alpha(f - Uf)) + \alpha \sigma(f - Uf, Uf - \frac{g}{\alpha}) \end{aligned}$$

とすると

$$\{f - (f - Uf)\}^V (Uf - g\alpha^{-1}) \geq 0$$

だから右辺の最後が正。 したがって $\beta_0 \|f - Uf\| \geq \alpha \|f - Uf\|$ となり $f = Uf$ と得る。 (c) $\Leftrightarrow$ (c') の証明も同様である。

§2. Dirichlet space.

以後, Banach 束は Hilbert 空間に与えられ, その内積は次の条件を満たす。

$$(2.1) \quad f, g \geq 0 \Rightarrow (f, g) \geq 0$$

$$\|f\|_1 \|g\|_1 = 0 \Rightarrow (f, g) = 0.$$

L^2 -空間は代表的な例である。 H は X の dense な linear subspace $\mathcal{Q}(H)$ を定義した bilinear form $\mathcal{Q}$ 上に有限であるとする。 すなわち, ある $\beta_0 \geq 0$ があって

$$H(u, u) + \beta_0 (u, u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{Q}(H).$$

更に, H が

条件 (C). $|H(u, v)| \leq K H_{\beta_0}(u, u)^{\frac{1}{2}} H_{\beta_0}(v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(H)$

とある定数 K が存在する

とあるとき, H は連続な bilinear form である. $T_t = C$

$$(2.2) \quad H_\alpha(u, v) \equiv H(u, v) + \alpha(u, v)$$

である.

$$(2.3) \quad \langle u, v \rangle_\alpha = \frac{1}{2} \{ H_\alpha(u, v) + H(v, u) \}, \quad \alpha > \beta_0$$

とあるとき, $\mathcal{D}(H)$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ による pre-Hilbert 空間

である. $\mathcal{D}(H)$ のノルム $\|u\|_\alpha = \langle u, u \rangle_\alpha^{\frac{1}{2}}$ による完備化を $\mathcal{X}_\alpha$

と置く. $\|u\|_\alpha \geq (\alpha - \beta_0) \|u\|$ であるから $\mathcal{X}_\alpha \subset X$. 更に各 $\|u\|_\alpha > \beta_0$

は同値 T_t ノルム $\|\cdot\|_\alpha$ であるから $\mathcal{X}_\alpha$ は α に無関係. 以下 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_\alpha$ と置く.

と

Proposition 2.1. H は, 条件 (C) とあるとき下に有限な bilinear form である. このとき, (T.1) ~ (T.3) とあるとき semigroup T_t であり, A は infinitesimal generator である.

$$(2.4) \quad H(u, v) = -(u, Av), \quad \forall u \in \mathcal{X}, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

とあるとき A は唯一に定まる.

証明 7. $f \in X$ に対し, $H_\alpha(u, v) = (u, f)$, $\forall u \in \mathcal{X}$ としたとき
 の双線形形式が存在することを示す.

$$|(f, u)| \leq \|f\| \|u\| \leq \alpha^{-1} \|f\| \|u\|_{\alpha+\beta_0}$$

7.1) Riesz の定理によつて, $\langle u, v^0 \rangle_{\alpha+\beta_0} = (u, f)$, $\forall u \in \mathcal{X}$ と
 したとき v^0 が存在する. 7.2) 定理 (c) より

$$|H_\alpha(u, v)| \leq K H_{\alpha+\beta_0}(u, u)^{\frac{1}{2}} H_{\alpha+\beta_0}(v, v)^{\frac{1}{2}}$$

$$|H_\alpha(u, u)| \geq (\alpha - \beta_0) \alpha^{-1} H_{\alpha+\beta_0}(u, u)$$

とされたことが容易に出来る. ゆえに Lax-Milgram の定
 理によつて, $H_\alpha(u, v) = \langle u, v^0 \rangle_{\alpha+\beta_0}$, $\forall u \in \mathcal{X}$ としたとき $v \in \mathcal{X}$
 が唯一に存在する. この v は明らかに $H_\alpha(u, v) = (u, f)$ と
 したとき, v の一意性は, $H_\alpha(u, v) = 0$, $\forall u \in \mathcal{X}$ かつ $v = 0$ かつ
 したことが明らかである.

さらにある $v \in G_\alpha f$ と書くと, G_α は resolvent equation とし
 たとき, $\mathcal{R}(G_\alpha)$ は $\alpha > \beta_0$ の α に無関係. $\mathcal{Q}(A) \equiv \mathcal{R}(G_\alpha)$ の
 元 u に対し $Au \equiv \alpha u - G_\alpha^{-1}u$ は再び α に無関係かつ A は (2.4) としたとき.

逆に A が dense の domain $\mathcal{D}(A)$ で定義された linear operator
 で $(u, Au) \leq \beta_0 \|u\|^2$ (β_0 はある定数) としたときである.

$H(u, v) = -(u, Av)$ とおけば H は下に有界な bilinear
 form である. したがって, 7.1) の H が条件 (c) とした
 とき, Prop. 2.1 によつて, A のある closed extension $\bar{A}$ があり,
 $\bar{A}$ は semigroup の infinitesimal generator と一致する.

が存在する。したがって、条件 (c) の下で、 X の dense
 的 linear subspace $\mathcal{H}$ 上に定義された $\mathcal{H}$ に有界な bilinear
 form $\mathcal{H}$ (T.1) ~ (T.3) と $\mathcal{H}$ 上の semigroup は 1-1 対応する
 $\mathcal{H}$ 上の semigroup に対応した bilinear form ということになる。
 3.

定理 2.1 $\mathcal{H}$ は X の dense 的 linear subspace として定義
 された $\mathcal{H}$ に有界な条件 (c) と $\mathcal{H}$ 上の bilinear form とする。
 このとき次の条件は同値。

- (1) $\mathcal{H}$ は submarkov semigroup に対応する。
- (2) $\mathcal{H}$ は X の complete sub vector space, $\forall f \in \mathcal{H}$ に
 対応

$$(2.5) \quad \mathcal{H}(f - Uf, Uf) \geq 0$$

3. 2. 2. 3.

系 (2.5) と同値な条件を列記する。

- (3) $\mathcal{H}(f - Uf, f) \geq -\beta_0 \|f - Uf\|^2$
- (4) $\mathcal{H}(f - Uf, f + Uf) \geq -\beta_0 \|f - Uf\|^2$
- (5) $\mathcal{H}(f - c)^+, f + c) \geq 0, \quad \forall c \geq 0.$
- (6) $\mathcal{H}(f - c)^+, f) \geq -\beta_0 \|f - c\|^2, \quad \forall c \geq 0.$
- (7) $\mathcal{H}(f - c)^+, f + f + c) \geq -\beta_0 \|f - c\|^2, \quad \forall c \geq 0.$

注意 $\mathcal{H}$ が正値 bilinear form であるとき、(4) は $\mathcal{H}(f - Uf, f + Uf) \geq 0$
 であり、これは M. 2. 10 [] に示されている。

この定理の証明のために、次の3つの Lemma が必要。

Lemma 2.1. A は submarkov semigroup の infinitesimal generator とする。更に A に対応する semigroup T_t は $\|T_t\| \leq e^{\beta_0 t}$ を満たすとする。このとき $A^\beta = A \circ G_\beta$ ($\beta > \beta_0$) は submarkov semigroup の infinitesimal generator である。

証明. A^β が completely dispersive であることを示す。
 注意. $A^\beta f = \beta(\beta G_\beta f - f)$ である。

$$\begin{aligned} ((f-c)^+, A^\beta f) &= \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I)(f-c)^+) + \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I)f) \\ &\leq \beta_0(1 - \beta_0/\beta) \| (f-c)^+ \|^2 + \beta((f-c)^+, (\beta G_\beta - I)f). \end{aligned}$$

$\beta = \beta_0$ は, $(f-c)^+ \{ (\beta_0 G_{\beta_0} - I)f \} \leq 0$ である (2.1) による。
 $\beta > \beta_0$ には T_t が L^1 から L^∞ へ写す。

$$((f-c)^+, A^\beta f) \leq \beta_0(1 - \beta_0/\beta) \| (f-c)^+ \|^2$$

$\beta \rightarrow (f, g) = \|H\|^{-1}(f, g)$ は Prop. 1.1 の性質と一致する。

A^β は completely dispersive である。

Lemma 2.2. $H^\beta(u, v) = -(u, A^\beta v)$, $u_\beta = \beta G_\beta u$ とする。

$$(i) \quad H(u_\beta, u_\beta) \leq H^\beta(u, u)$$

$$(ii) \quad |H^\beta(u, v)| \leq K H_\alpha(u, u)^{\frac{1}{2}} H_\alpha^\beta(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } u \in \mathcal{X}, v \geq \frac{\beta\beta_0}{\beta - \beta_0}$$

$$(iii) \quad |H^\beta(u, v)| \leq K H_\alpha^\beta(u, u)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } v \in \mathcal{X}, v \geq \frac{\beta\beta_0}{\beta - \beta_0}$$

に $T = \mathbb{C}$ K は条件 (c) の定数である. (α, β は無関係)

証明

$$(2.6) \quad H(u, v_\beta) = -(u, A^\beta v) = H^\beta(u, v)$$

特に $u = v_\beta = u_\beta$ とき

$$(2.7) \quad \begin{aligned} H(u_\beta, u_\beta) &= H^\beta(u_\beta, u) = H^\beta(u, u) - H^\beta(u - u_\beta, u) \\ &= H^\beta(u, u) + (u - u_\beta, \beta(u - u)) \leq H^\beta(u, u) \end{aligned}$$

次に (ii) の証明. 条件 (c) より

$$|H^\beta(u, v)| = |H(u, v_\beta)| \leq K H_{\beta_0}^\beta(u, u)^{\frac{1}{2}} H_{\beta_0}^\beta(v_\beta, v_\beta)^{\frac{1}{2}}$$

- 5

$$\begin{aligned} H_{\beta_0}^\beta(v_\beta, v_\beta) &= H(v_\beta, v_\beta) + \beta_0 \|v_\beta\|^2 \leq H^\beta(v, v) + \frac{\beta_0 \beta}{\beta - \beta_0} \|v\|^2 \\ &\leq H_2^\beta(v, v). \end{aligned}$$

よって (ii) の証明は成る. (iii) は $H^\beta(u, v) = H(u_\beta^*, u)$, $u_\beta^* = \beta \beta_0^{-1} u$

を用いて (i), (ii) と同様の議論をくり返せばよい.

Lemma 2.3. (a) $u \in \mathcal{X} \iff \sup_\beta H^\beta(u, u) < \infty$

(b) $u, v \in \mathcal{X} \implies \exists \lim_{\beta \rightarrow \infty} H^\beta(u, v) = H(u, v)$

証明. a) $\implies$. Lemma 2.2 の (ii) より $H^\beta(u, u) \leq K H_2^\beta(u, u)^{\frac{1}{2}} H_2(u, u)^{\frac{1}{2}}$

よって $\sup_\beta H^\beta(u, u) < \infty$ ならば u は $\mathcal{X}$ に属する.

a) $\Leftarrow$ (i) により $\sup_\beta H(u_\beta, u_\beta) < \infty$. $\mathcal{X}$ に属する $\{u_\beta\}$

(注) $\|\cdot\|_2$ -norm は一様有界. ϕ は $\{y_\beta\}$ がある部分列 $\{y_{\beta_n}\}$ は $u' \in \mathcal{X}$ に $\|\cdot\|_2$ -位相で弱収束する. $\{y_{\beta_n}\}$ は $\|\cdot\|_2$ -norm で u に強収束するから $u' = u$, 即ち $u \in \mathcal{X}$ である.

つまり (2) の証明. 上の議論によつて, y_β は $\beta \rightarrow \infty$ として u に $\|\cdot\|_2$ -位相で弱収束する. H の連続性に注意して

(2.6) によつて, $\beta \rightarrow \infty$ として (2) を得る.

定理 2.1 の証明 $\xrightarrow{(1) \Rightarrow (2)}$ $\mathcal{X}$ が complete sub-vector space であることは示すには, $f \in \mathcal{X} \Rightarrow \phi f \in \mathcal{X}$ を示せば十分である.

Lemma 2.2 の (iii) より

$$H^\beta(f - \phi f, f) \leq K H_\beta^\beta(f - \phi f, f - \phi f)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

いま Lemma 2.1 によつて

$$H^\beta(f - \phi f, f - \phi f) \leq H^\beta(f - \phi f, f).$$

よつて上の不等式から $H^\beta(f - \phi f, f - \phi f) \leq K H_\alpha^\beta(f - \phi f, f - \phi f)^{\frac{1}{2}} H_\alpha(f, f)^{\frac{1}{2}}$ を得る. ϕ は $\sup_\beta H^\beta(f - \phi f, f - \phi f) < \infty$. ϕ は Lemma 2.3 (a) より $f - \phi f \in \mathcal{X}$, 即ち $\phi f \in \mathcal{X}$ である. 以上 (2.5) を証明する.

定理 1.1' の (c') 及び Lemma 2.1 によつて

$$H^\beta(f - \phi f, \phi f) = -(f - \phi f, A^\beta \phi f) \geq 0.$$

$\beta \rightarrow \infty$ として, Lemma 2.3 (b) によつて (2.5) を得る.

(2) $\Rightarrow$ (1) の証明. $f \in \mathcal{D}(A)$ のとき

$$\begin{aligned} -(f - \phi f, A f) &= H(f - \phi f, f) = H(f - \phi f, f - \phi f) + H(f - \phi f, \phi f) \\ &\geq H(f - \phi f, f - \phi f) \geq -\beta \|f - \phi f\|^2 \end{aligned}$$

4.2 に A は completely dispersive である。

定理 2.7 の証明. (3) $\Rightarrow$ (2.5). H に対応する generator A が completely dispersive ならば, (2.5) $\Rightarrow$ (3).

$$H(f-uf, f) = H(f-uf, f-uf) + H(f-uf, uf) \geq H(f-uf, f-uf) \geq -\beta_0 \|f-uf\|^2$$

(3) $\Rightarrow$ (4). (2.5) $\geq$ (3) の両辺を f による f の関数と見ればよい. (4) $\Rightarrow$ (3).

$$\begin{aligned} H(f-uf, f) &= \frac{1}{2} \{ H(f-uf, f+uf) + H(f-uf, f-uf) \} \\ &\geq -\beta_0 \|f-uf\|^2 \end{aligned}$$

(2) と (5) の同値性は, 定理 2.7 の証明にある uf の代りに

f が入ると代わるとは, そのまゝ成立するから明らかである。

(5), (6), (7) の同値性は, 上の議論と同じ。

注意 1. H が定理 2.7 の条件を満たす bilinear form である。 H に対応する semigroup が positive かつ (T.4) を満たすための必要十分条件は, $\mathcal{X}$ が subvector space かつ, $H(f^+, f^+) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{X}$ を満たすことである。証明はほとんど同じ。

注意 2. H が定理 2.7 を満たす 正値 bilinear form である。 H に対応する semigroup A がその adjoint semigroup が共に submarkov ならば, $\mathcal{X}$ は Dirichlet space になる。即ち, $\mathcal{X}$ は complete subvector space かつ

$$H(f, f) \geq H(uf, uf) \quad \forall f \in \mathcal{X}$$

を満たす。実際, 定理 2.7 の系 (4) より

$$H(f-uf, f+uf) \geq 0, \quad H(f+uf, f-uf) \geq 0.$$

上式の両辺を加えて整理すれば, $H(f, f) \geq H(uf, uf)$ が得られる.

§3. 補足

ポテンシャル論のある部分は, 束の言葉でいえることが出来る. 以下のものである. X が functional space として M 上の $[]$ によって得られる.

H は §2 の条件 (C) を満たす正定 bilinear form であり更に条件 (D) を満たすとする.

条件 (D). X の dense な f に対し $H(u, v) = (u, f)$, $\forall u \in X$ を満たす $v \in X$ が唯一存在する

上の v を Gf と書き, 以下 D は $Gf \in X$ が存在する f の全体とする. 次の関係式は容易にわかる.

$$G_x f - Gf + x G G f = 0,$$

即ち $f \in D$ ならば $G_x f \in D$ かつ上式を満たす.

定義. (i) G が最大値の原理を満たすとは D の各元 $f, g \geq 0$ に対し

$$[G(g-f)]^+ 1 g = 0 \Rightarrow [G(g-f)]^+ = 0.$$

(ii). G が完全最大値の原理を満たすとは, D の各元

$f, g \geq 0$ と 各 $\alpha \geq 0$ (定数) に対し

$$[G(g-f)-\alpha]^+ \wedge g = 0 \Rightarrow [G(g-f)-\alpha]^+ = 0.$$

Proposition 3.1 (i) G が最大値の原理を満たすための条件は

$$(3.1) \quad [Gf]^+ \wedge f^+ = 0 \Rightarrow [Gf]^+ = 0$$

が各 $f \in D$ について成立すること.

(ii) G が完全最大値の原理を満たすための条件は

$$(3.2) \quad [Gf-\alpha]^+ \wedge f^+ = 0 \Rightarrow [Gf-\alpha]^+ = 0$$

が各 $f \in D$ について成立すること.

証明. (i) のみを示す. 必要条件は, 最大値の原理の定義において, $g \rightarrow f^+, f \rightarrow (-f)^+$ と代入すればよい. 十分条件は $(g-f)^+ = g - g \wedge f \leq g$ ゆえに

$$[G(g-f)]^+ \wedge g = 0 \Rightarrow [G(g-f)]^+ \wedge (g-f)^+ = 0 \Rightarrow [G(g-f)]^+ = 0.$$

定理 3.1. H は条件 (c), (d) を満たす正定 bilinear form とする.

(i) G が完全最大値の原理を満たすための必要条件は, 定理 2.1 の (i) と (ii) を満たすことである.

(ii) G が最大値の原理を満たすための条件は, H の β_1 の正定値性をもつことである.

証明. まず "最大値の原理" $\Rightarrow$ " $G \geq 0$ " を示す.

$f \leq 0$ なる λ があり,

$$\begin{aligned} [G(f - \lambda Gf)]^+ \wedge [f - \lambda Gf]^+ &\leq [G(f - \lambda Gf)]^+ \wedge [-\lambda Gf]^+ \\ &\leq [Gf]^+ \wedge [-\lambda Gf]^+ = 0 \end{aligned}$$

ゆえに $[G(f - \lambda Gf)]^+ = 0$, 即ち $[Gf]^+ = 0$. 次に完全最大値の原理と, $0 \leq f \leq e$ により $\lambda Gf \leq e$ なる λ がある.

$$[-e + G(\lambda f - \lambda^2 Gf)]^+ \wedge (f - \lambda Gf)^+ \leq [\lambda Gf - e]^+ \wedge [e - \lambda Gf]^+ = 0.$$

ゆえに $[\lambda Gf - e]^+ = 0$.

次に G_0 を submarkov なる完全最大値の原理を示す.
 $[Gf - a]^+ \wedge f^+ = 0$ とする.

$$\begin{aligned} &H([Gf - a]^+, [Gf - a]^+) \\ &= 2H([Gf - a]^+, Gf) - H([Gf - a]^+, Gf + a \wedge Gf) \end{aligned}$$

定理 2.1 の系より $H([Gf - a]^+, Gf + a \wedge Gf) \geq 0$ なる

$$\begin{aligned} H([Gf - a]^+, [Gf - a]^+) &\leq 2H([Gf - a]^+, Gf) \\ &= ([Gf - a]^+, f) \leq ([Gf - a]^+, f^+) = 0. \end{aligned}$$

ゆえに $[Gf - a]^+ = 0$.

反射性 $\rightarrow$ diffusion semigroup.

$\mathbb{R}^n$ の domain D 上 定義した $T_t =$ 階梯関数微分作用素.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv \Delta u + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$\rightarrow$ T_t は symmetric, uniformly elliptic,

bdd, measurable, b_i は bdd measurable $\rightarrow$ $D \subset \mathbb{R}^n$

Lebesgue 測度 $\rightarrow$ L_2 -空間 $\rightarrow$ L_2 と $\mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{E} = \{ f \in L_2 ; \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_2, i=1, \dots, n \}$$

$$\mathcal{E}(f, g) = \int \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx, \quad D(f, g) = \int \sum a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx$$

$\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$.

定理 3.2 $\mathcal{Q}(A) = \{ u \in \mathcal{E} ; \Delta u \in L^2, \rightarrow D(u, v) + (\Delta u, v) = 0, \forall v \in \mathcal{E} \}$

$\rightarrow$ $\mathcal{Q}(A)$ の制限 A は L^2 上の

submarkov semigroup の infinitesimal generator.

$\rightarrow$ semigroup $\rightarrow$ 反射性 $\rightarrow$ diffusion semigroup $\rightarrow$ $\mathbb{R}^n$.

証明. $u, v \in \mathcal{Q}(A)$ に対し

$$H(u, v) \equiv -(u, Av) = D(u, v) - (\sum b_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, u)$$

$\rightarrow$ H は L^2 上の bilinear form $\rightarrow$ $\mathcal{Q}(A)$ 上の

$$|2(\sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, u)| \leq \sqrt{c} \mathcal{E}(u, u) + \sqrt{c} \|u\|^2, \quad c = \sup_{x \in D, i=1, \dots, n} |b_i(x)|$$

$\rightarrow$ $D(u, u) \geq K \mathcal{E}(u, u) \rightarrow \exists K > 0$ ならば $\mathcal{Q}(A)$ は

$$H(u, u) \geq K \varepsilon(u, u) - \frac{1}{2} \gamma \varepsilon(u, u) - \frac{1}{2} \gamma^{-1} c \|u\|^2 \geq -\beta_0 \|u\|^2$$

よって $K \geq \frac{1}{2} > 0$, $\beta_0 = 2\gamma^{-1}c \geq 2\gamma^{-1}c$ 同様 $\gamma, \beta_0 \geq 2\gamma^{-1}c$ 更に

$$\begin{aligned} |H(u, v)| &\leq D(u, u)^{\frac{1}{2}} D(v, v)^{\frac{1}{2}} + c \varepsilon(v, v)^{\frac{1}{2}} \|u\| \\ &\leq D(u, u)^{\frac{1}{2}} D(v, v)^{\frac{1}{2}} + \beta_0 D(v, v)^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \frac{1}{2} D(u, u) + \beta_0 D(u, u) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ D(v, v) + \beta_0 D(v, v) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

よって H は連続な bilinear form である。 - 又 $A \mapsto \bar{A} =$

$$H(f - \partial f, \partial f) = D(f - \partial f, \partial f) + \left(\int \ell_i \frac{\partial \partial f}{\partial x_i}, f - \partial f \right) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{E}$$

よって $\bar{A}$ は定理 2.1 に従って, H に対応する submarkov semigroup が T_2 として存在する。

H に対応する semigroup の generator は $\bar{A}$ である。 $\bar{A}$ は L の副生成子である。 実際, $(-\bar{A}u, v) = H(u, v) = D(u, v) - \left(\ell_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right)$

よって $u \in \mathcal{Q}(\bar{A})$, $v \in \mathcal{E}$ である。 更に $v \in C_0^\infty$ とすると

$$\bar{A}u = Lu \text{ である。}$$

よって $\mathcal{Q}(\bar{A}) = \mathcal{Q}(A)$ である。 $u \in \mathcal{Q}(\bar{A})$ である。

$$\begin{aligned} H_\alpha(u, v) &= D(u, v) - \left(\int \ell_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right) + \alpha(u, v) \\ &= \alpha(u, v) - (\Delta u, v) - \left(\int \ell_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right) \quad \forall v \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

即ち $D(u, v) + (\Delta u, v) = 0$ である。 $\forall v \in \mathcal{E}$ である。 よって

$$\mathcal{Q}(\bar{A}) \subset \mathcal{Q}(A) \text{ である。 } \mathcal{Q}(\bar{A}) \supset \mathcal{Q}(A) \text{ は明らかである。}$$

文献

- [1] M. Hasegawa, On contraction semi-groups and (d_i) -operator,
J. Math. Soc. Japan, 18(1966), 290-302
- [2] M. Ito, A note on Extended regular functional spaces,
Proc. Japan Acad. 43(1969), 435-440.
- [3] R.S. Phillips, Semigroups of positive contraction operators,
Czechoslovak Math. J. 12(87), (1962), 294-313.
- [4] K. Sato, On the generators of non-negative contraction
semi-groups in Banach lattice, to appear in J.
Math. Soc. Japan.
- [5] K. Yosida, Functional analysis, Springer 1966.