

## 片側相制約をもつ変分問題に対する Legendre 条件

九大・理 川崎 英文 (Hidefumi Kawasaki)

九大・理 古賀さゆり (Sayuri Koga)

### 1 Abstract

ここでは次の片側相制約をもつ変分問題を考える。

$$\begin{aligned} (P) \quad & \text{minimize} \quad J(x) = \int_0^1 f(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \\ & \text{subject to} \quad x \in X, \quad x(t) \geq s(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ & \quad \quad \quad x(0) = x_0, x(1) = x_1 \end{aligned}$$

但し、ここで空間  $X$  は各成分が絶対連続であり、 $\|\dot{x}(t)\|$  が本質的に有界である関数  $x : [0, 1] \rightarrow R^n$  の全体で、また、 $X$  はノルムとして

$$\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} \|x(t)\| + \text{esssup}_{t \in [0, 1]} \|\dot{x}(t)\| < \infty$$

をもつものとする。点  $x_0, x_1$  は与えられた  $R^n$  の点、関数  $s : [0, 1] \rightarrow R^n$  は与えられた連続関数とする。関数  $f : R^{2n+1} \rightarrow R$  は  $x, \dot{x}$  に関し 2 回微分可能な関数であると仮定する。そうして、解  $\bar{x}$  として、特に区分的連続微分可能な関数を考えることにする。この時、問題 (P) の弱極値に対する二次の最適必

要条件 (Legendre 条件) を与える。

等式、不等式、集合制約など、いろいろな制約をもつ変分問題や、最適制御理論に対する二次の最適必要条件は、これまでもたくさんの文献で取り扱われてきた。不等式相制約をもつ最適制御理論に対しては、最大値原理を使う事により Legendre 条件を導くことが出来る。(Gamkrelidze [6], Dubovickii and Miljutin [5]) しかし、それはあくまで強極値に対する最適必要条件である。また、 $g(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq 0$  のように、 $\dot{x}$  を含む制約をもつ問題については、弱極値に対して Legendre - Clebsch 条件が知られている。(Clebsch [2], McShane [9], [10], Dubovickii [3], Dubovickii and Miljutin [4], Makowski and Neustadt [8]) しかし、そこでは active な点において  $g_i(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$  が full rank を持つという仮定をもうけているので、問題 (P) に対しては適用することは出来ない。我々は、抽象最適化問題に対する二次の最適性必要条件 (Theorem 2.1) を利用して、問題 (P) の弱極値に対する Legendre 条件を導く。Inactive points ( $x(t) > s(t)$ ) において、Legendre 条件が成立することは明らかであるが、active points ( $\exists i; x_i(t) = s_i(t)$ ) においても、ある条件が満たされるならば、Legendre 条件が成立する (Theorem 3.2)。

## 2 等式、不等式制約をもつ抽象問題に対する最適必要条件

$$K = \{v \in (C[0, 1])^n | v_i(t) \leq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$$

$K$  と双対空間  $K^*$  との標準積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $K$  の polar cone を

$$K^\circ = \{v^* \in K^* | \langle v^*, v \rangle \leq 0, \ \forall v \in K\}$$

で表す。また、簡単のため  $\hat{f}(t) = f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ ,  $\hat{g}(t) = g(t, \bar{x}(t))$  などと書くことにする。また、最適解  $\bar{x}$  の角点の集合を  $T$  とかくことにする。次に、

$$G(x) = -x(\cdot) + s(\cdot), \ G(x)(t) = -x(t) + s(t)$$

$$H(x) = (x(0) - x_0, x(1) - x_1)^T$$

で写像  $G : X \rightarrow (C[0, 1])^n$ ,  $H : X \rightarrow R^{2n}$  を定義することにより、問題  $(P)$  を次の一般化された等式、不等式制約をもつ抽象最適化問題に書き直すことが出来る。

$$(P') \quad \text{minimize } J(x)$$

$$\text{subject to } x \in X, \ G(x) \in K, \ H(x) = 0$$

ここで、仮定より  $G, H$  は 2 回連続 Fréchet 微分可能となる。 $G(x)$  の 1 次、二次の Fréchet 微分を  $G'(x), G''(x)$  と書くことにする。 $(P')$  の許容集合を

$$M := \{x \in X | G(x) \in K, \ H(x) = 0\}$$

とおく。この許容集合  $M$  は解  $\bar{x}$  において、次の条件を満たすときに Mangasarian - Fromovitz の条件を満たすという。

$$(i) \ H'(\bar{x}) \text{ が全射}$$

$$(ii) \exists x_0 \in X; G(\bar{x}) + G'(\bar{x})x_0 \in \text{int}K, H'(\bar{x})x_0 = 0$$

問題 (P) に対しては、 $x_0 > s(0)$ ,  $x_1 > s(1)$  ならば、Mangasarian - Fromovitz の条件が満たされる。

また、次の式を満たす方向  $y \in X$  を critical direction と呼ぶ。

$$J'(\bar{x})y = 0, G'(\bar{x})y \in \overline{\text{cone}}(K - G(\bar{x})), H'(\bar{x})y = 0$$

このように、少し動かせば許容集合に入り、 $J$  が増加・減少しない方向に対し、次の二次の最適必要条件が知られている。

(A.Ben-Tal and J.Zowe[1], Kawasaki[7])

**THEOREM 2.1**  $\bar{x}$  を問題 (P') の極小解とする。 $\bar{x}$  で  $M$  が Mangasarian - Fromovitz 条件を満たすとき、 $G'(\bar{x})y \in \text{cone}(K - G(\bar{x}))$  を満たす各 critical direction  $y$  に対し、次の条件を満たす  $v^* \in K^\circ$  と  $w^* = (l_0, l_1) \in R^{2n}$  が存在する。

$$L'(\bar{x}) = 0$$

$$L''(\bar{x})[y, y] \geq 0,$$

$$\langle v^*, G(\bar{x}) \rangle = 0, \langle v^*, G'(\bar{x})y \rangle = 0$$

但し、 $L(x) = J(x) + \langle v^*, G(x) \rangle + \langle w^*, H(x) \rangle$

### 3 (P) に対する Legendre 条件

$\forall t \in [0, 1]$  に対し 次のような index の集合を考える。

$$I_L(t) := \{i | \exists \delta > 0, x_i > s_i \text{ on } (t - \delta, t)\}$$

$$I_R(t) := \{i | \exists \delta > 0, x_i > s_i \text{ on } (t, t + \delta)\}$$

**THEOREM 3.1**  $\bar{x}$  を問題 (P) の極小解とすると

$$(i) \quad \xi^T \hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0 - 0)\xi \geq 0 \quad \forall \xi \in R^n \text{ satisfying } \xi_i = 0 \quad \forall i \notin I_L(t_0)$$

$$(ii) \quad \xi^T \hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t_0 + 0)\xi \geq 0 \quad \forall \xi \in R^n \text{ satisfying } \xi_i = 0 \quad \forall i \notin I_R(t_0)$$

**THEOREM 3.2**  $\bar{x}$  を問題 (P) の極小解とする。  $i \notin I_L(t_0)$  なる  $i$  に対し、  $\exists \delta > 0$  が存在し、  $x_i$  に関する Euler equation が  $(t_0 - \delta, t_0)((t_0, t_0 + \delta))$  上で成立する、即ち、

$$\exists C = \hat{f}_{\dot{x}_i}(t) - \int_0^t \hat{f}_{x_i}(t)dt \quad \text{on} \quad (t_0 - \delta, t_0)((t_0, t_0 + \delta))$$

である index の集合を  $E_L(t_0)(E_R(t_0))$  とおく。このとき、Theorem 3.1 の  $\xi_i = 0$  ( $i \notin I_L(t_0)$ ) を次で置き換えることが出来る。

$$\xi_i \geq 0 \quad \text{for } i \in E_L(t_0),$$

$$\xi_i = 0 \quad \text{for } i \in I_L(t_0) \setminus E_L(t_0)$$

(ii) についても同様のことがいえる。

**EXAMPLE 3.1**

$$\text{minimize} \quad \int_0^1 (x(t) - \dot{x}^2(t))dt$$

$$\text{subject to} \quad x(t) \geq -\frac{1}{4}t(t-1), \quad x(0) = 1, x(1) = \frac{1}{2}$$

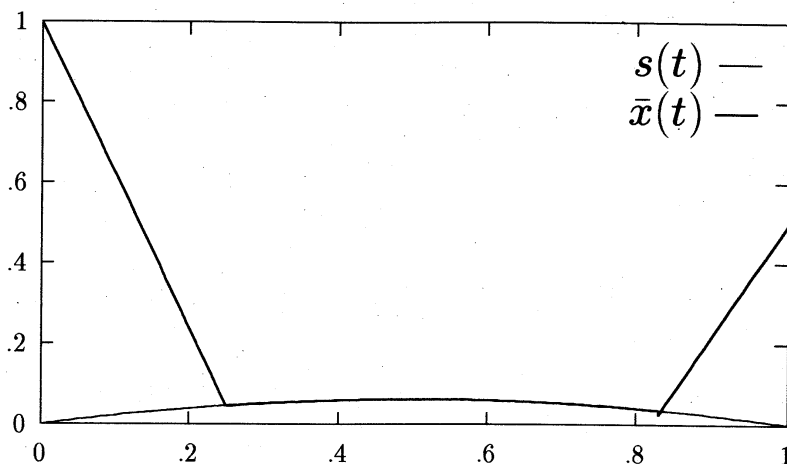
に対して、  $\psi(t) = -\{\int_t^1 \hat{f}_x + \hat{f}_{\dot{x}} - C\} = t + 2\dot{x}(t) + C$  であるので、次の関数  $\bar{x}(t)$  は 1 次の最適条件は満たすが弱極小解ではない。

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}t^2 - \frac{15}{4}t + 1 & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4}t(t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{4}t^2 + \frac{13}{4}t - \frac{5}{2} & \frac{5}{6} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

というのは、

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(\frac{1}{5}) < 0$$

であるので、*Theorem 3.1* により  $\bar{x}$  は弱極小解ではない。



### EXAMPLE 3.2

$$\text{minimize } \int_{-2}^2 (t^2 - 1) \dot{x}^2(t) dt$$

$$\text{subject to } x(-2) = 1, x(2) = 1$$

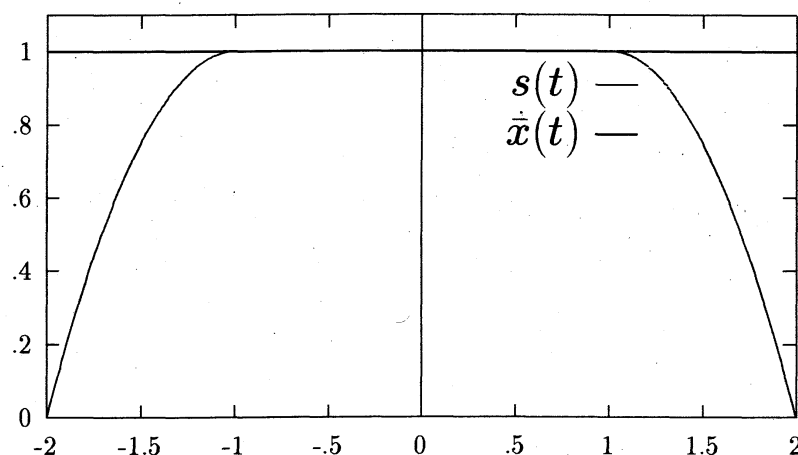
$$x(t) \geq \begin{cases} -t(t+2) & -2 \leq t \leq -1 \\ 1 & -1 \leq t \leq 1 \\ t(t-2) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \left\{ \int_t^1 \hat{f}_x(s) ds + \hat{f}_x - C \right\} = C$$

関数  $\bar{x}(t) = 1$  は、全区間で *Euler equation* を満たすが、しかし

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(0) = -2 < 0$$

よって、*Theorem 3.2* により弱極小解ではないことがわかる



### 参考文献

- [1] A.Ben-Tal and J.Zowe, "A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces" *Math. Program. Study* 19,, (1982), 39–76.
- [2] R.F.A.Clebsch, "Über die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol.55, (1858) 254–273.
- [3] A.Ja.Dubovickii, *Integral'nyĭ princip maksimum v obščei zadache optimal'nogo upravlenija*. AN USSR, dep. No. 2639-74, Moscow, (1974).
- [4] A.Ja.Dubovickii and A.A.Miljutin, "Extremum problems in the presence of restrictions" *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.* 5, (1965), 1–80.

- [5] A.Ja.Dubovickii and A.A.Miljutin, *Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of the inequality type*. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.8, (1968), 24–98.
- [6] R.V.Gamkrelidze, *Optiaml'nye processy upravlenija pri og-aranichennyh fazovyh koordinatah*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.34, (1960), 315–356.
- [7] H. Kawasaki, "An envelope-like effect of infinitely many inequality constraints on second-order necessary conditions for minimization problems" *Math. Program.* 41 , (1988), 73–96.
- [8] K.Makowski and L.W.Neustadt, "Optimal control problems with mixed control-phase equality and inequality constraints" *SIAM J. Control* 12, (1974), 184–228.
- [9] E.J.McShane, "On multipliers for Lagrange problems" *Amer-ican Jour.of Mathematics*, vol.61, (1939), 809–819.
- [10] E.J.McShane, "Necessary conditions in generalized curve problems of the calculus of variations" *Duke Math.J.*, vol.7, (1940), 1–27.