

ヴォエヴォドスキーのモチーフとヴェイユ相互律 (Voevodsky's motives and Weil reciprocity)

By

山崎 隆雄 (Takao YAMAZAKI) *

Abstract

This is a survey article on a recent result of Bruno Kahn and the author on Milnor K -groups attached to semi-abelian varieties (so-called Somekawa K -group). We interpret Somekawa K -group in terms of the tensor product in Voevodsky's category of motives. While Somekawa's definition is based on Weil reciprocity, Voevodsky's category is based on homotopy invariance. We also explain its relation to algebraic cycles.

§ 1. 序

本稿では Bruno Kahn 氏と筆者の共同研究 [7] を概説する．典型的な結果をはじめに一つ述べておこう．体 F 上の滑らかな多様体 X に対して ¹

$$CH_0(X) = \operatorname{Coker}[\oplus_{y \in X_{(1)}} F(y)^* \rightarrow \oplus_{x \in X_{(0)}} \mathbf{Z}]$$

を 0-サイクルの Chow 群とする． X が曲線であればこれは Picard 群 $\operatorname{Pic}(X)$ に一致するのでその構造もよく分かる．しかし， X が二次元以上の場合は（曲線の積であっても）この構造はミステリアスである．

定理 1. F を標数 0 の代数閉体， $X_1, \dots, X_r$ を F 上の滑らかな多様体， $X = X_1 \times \dots \times X_r$ とおく．このとき，次の自然な同型がある：

$$CH_0(X) \cong CH_0(X_1) \otimes \dots \otimes CH_0(X_r) / (\text{Weil 相互律}).$$

Received February 2, 2012. Revised September 4, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 19E15; Secondary 14F42, 19D45, 19F15.

Key Words: Milnor K -theory, Somekawa K -group, Voevodsky's category of motives.

本研究は科学研究費（若手 (A) 22684001, 挑戦的萌芽 22654001）および稲森財団の援助を受けた．

*Institute of Mathematics, Tohoku University. Aoba, Sendai, 980-8578, Japan.

e-mail: ytakao@math.tohoku.ac.jp

¹非負整数 i に対し $X_{(i)} = \{x \in X \mid \dim \overline{\{x\}} = i\}$ と書く．

Weil 相互律の正確な意味は本文で説明するが、ともかくも具体的に表せる関係式である．なお、 $X_1, \dots, X_r$ が射影的（かつ滑らか）のときは、この結果は Raskin-Spiess [16] で示されていた． F が代数閉体という仮定は技術的であり、本文ではこの仮定を設けない結果や高次 Chow 群への一般化なども論ずる．

歴史と本稿の概要． 染川は半アーベル多様体を係数とする Milnor K 群（染川 K 群）を定義し、係数として乗法群 $\mathbf{G}_m$ を取ると体の Milnor K 群が得られ、係数として二つの楕円曲線 E_1, E_2 を取ると $CH_0(E_1 \times E_2)$ の直和因子（アルバネーゼ核）が得られることなどを示した [22]．Raskin-Spiess は、染川 K 群の係数を滑らかで射影的な多様体の Chow 群（正確には §5 に述べる $\mathcal{C}_X$ ）に拡張し、その場合に染川 K 群が直積の Chow 群と同型となることを示した [16]．Akhtar は高次 Chow 群に対して類似の結果を証明した [1]．このように、染川 K 群は代数的サイクルの研究に役立てられていった．

一方、染川自身が述べているように、染川 K 群はモチーフの圏の拡大群で解釈できると期待されていた．Kahn は Voevodsky により構成されたモチーフの圏を用いてこの期待を正確な予想として定式化した [16, Remark 2.4.2(d)]．（望月 [13] もこの方向の研究を行った．）本稿の主結果（定理 7）では、染川 K 群の定義をさらに一般化した上で、染川 K 群を Voevodsky の圏の Hom 群として解釈する．

さて、Voevodsky の圏の Hom 群と Chow 群・高次 Chow 群など代数的サイクルとの関係は（少なくとも基礎体の標数が 0 の場合は）完全に確立されている（[9, Theorem 19.1, Corollary 19.19]）．それを併せることで、我々の主結果は Raskin-Spiess, Akhtar などの結果を導くことができる．その一部を（染川 K 群を用いずに）述べたのが上述した定理 1 である．

§2-5 ではここまでに述べた事柄をより詳しく説明する．その後、§6 で Voevodsky の圏の構成などを復習し、§7 で主結果の証明の概略を述べる．

記号． 全文を通して F を体とする．（§4 以降は完全体と仮定する．） K が F 上の一変数代数関数体² のとき、 $P(K/F)$ を F 上自明で正規化された離散付値全体の集合とし、 $v \in P(K/F)$ に対し O_v を付値環、 $F(v)$ を剰余体とする．

§ 2. 染川 K 群

Milnor K 群． $r \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ とする．体 F の Milnor K 群 $K_r^M(F)$ は

$$(F^*)^{\otimes r} / \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_r \mid a_1, \dots, a_r \in F^*, a_i + a_j = 1 \ (\exists i \neq j) \rangle$$

と定義された．定義により $K_0^M(F) \cong \mathbf{Z}$, $K_1^M(F) \cong F^*$ である． $a_1, \dots, a_r \in F^*$ に対し、 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_r$ の類を $\{a_1, \dots, a_r\}$ と書く．Milnor は ‘this definition is purely ad hoc...’ と記しており [11]、この定義が最終的なものとは考えていなかったようである．しかしな

² K 内で F が代数的に閉じていることは仮定しない．

がら、その後の研究の発展でこれがまさしく絶妙な定義であったことが明らかになっていった。その頂点ともいえるのが次の定理である。

定理 2 (Bloch-加藤予想). r を非負整数, n を F で可逆な自然数とすると, 自然な同型 $K_r^M(F)/n \cong H^r(F, \mu_n^{\otimes r})$ が存在する.³

$r = 1$ の場合は Kummer 理論, $r = 2$ の場合は Merkurjev-Suslin の定理 [10] である。一般の r に対する証明は Rost-Voevodsky による [25], [30], [31]。

Milnor K 群は定義が簡明であるが、関係式の意味が分かりにくい。これを意味が明瞭な関係式で置き換えるということも染川 K 群導入の動機の一つであったようである。染川 K 群は F 上の半アーベル多様体 $G_1, \dots, G_r$ に対して定まるアーベル群であり, $G_1 = \dots = G_r = \mathbf{G}_m$ の場合には Milnor K 群と同型になる (定理 4)。その定義を述べるために、半アーベル多様体について復習しておこう。

半アーベル多様体. G を F 上の半アーベル多様体とする。(これは完全列 $0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ で T はトーラス, A はアーベル多様体となるものが存在するということの意味する。) $E_1/E_2/F$ を体の拡大とすると, 包含写像 $R_{E_1/E_2} : G(E_2) \hookrightarrow G(E_1)$ が誘導され, また $[E_1 : E_2] < \infty$ のときはノルム写像 $N_{E_1/E_2} : G(E_1) \rightarrow G(E_2)$ も誘導される。次に K を F 上の一変数代数関数体, $v \in P(K/F)$ とする。 $O_v \hookrightarrow K$ の導く単射 $G(O_v) \hookrightarrow G(K)$ により $G(O_v)$ を $G(K)$ の部分群とみなす。還元写像 $O_v \rightarrow F(v)$ の導く射 $G(O_v) \rightarrow G(F(v))$ を $a \mapsto a(v)$ と書く。また, local symbol と呼ばれる双線形写像

$$\partial_v : G(K) \times K^* \rightarrow G(F(v))$$

が Serre [20]⁴ により定義された。特に大切な性質として、次の Weil 相互律がある：任意の $a \in G(K), f \in K^*$ に対し, 有限個の $v \in P(K/F)$ を除き $\partial_v(a, f) = 0$ で

$$\sum_{v \in P(K/F)} N_{F(v)/F} \partial_v(a, f) = 0$$

が成り立つ。詳細は上記文献を参照。二例について具体的な記述を述べておく：

- $G = \mathbf{G}_m$ のときは tame symbol $\partial_v(a, f) = (-1)^{v(a)v(f)} \frac{a^{v(f)}}{f^{v(a)}}(v)$ に一致する。
- G がアーベル多様体のときは $\partial_v(a, f) = v(f)a(v)$ となる。($G(K) = G(O_v)$ に注意。)

Mackey 積と染川 K 群. $G_1, \dots, G_r$ を F 上の半アーベル多様体とする⁵。

³アーベル群 A と自然数 n に対して $A/n = A/nA$ と書く。また, μ_n は 1 の n 乗根全体のなすガロア加群, $H^*(F, -)$ はガロア・コホモロジーを表す。

⁴正確には Serre [20] の local symbol は $G(F)$ に値を持つ。ここでは染川 [22] による修正版を用いる。

⁵§4 では $G_1, \dots, G_r$ をホモトピー不変移送付き Nisnevich 層に読み替えて次の定義を解釈する。

定義 3. 有限次拡大 E/F と $a_i \in G_i(E)$ ($i = 1, \dots, r$) に対して定まるシンボル $\{a_1, \dots, a_r\}_{E/F}$ たちを生成元とし, 次の (1), (2) の二つの関係式で定まるアーベル群を $G_1, \dots, G_r$ の Mackey 積 $G_1^M \otimes \dots \otimes G_r^M(F)$ という. 同じ生成元を持ち, 次の (1), (2), (3) の三つの関係式で定まるアーベル群を $G_1, \dots, G_r$ を係数とする染川 K 群 $K(F; G_1, \dots, G_r)$ という.

- (1) (多重線形性) 有限次拡大 E/F , $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, $a_{i_0}, a'_{i_0} \in G_{i_0}(E)$, $a_i \in G_i(E)$ ($i \neq i_0$) に対し,

$$\{a_1, \dots, a_{i_0} a'_{i_0}, \dots, a_r\}_{E/F} = \{a_1, \dots, a_{i_0}, \dots, a_r\}_{E/F} + \{a_1, \dots, a'_{i_0}, \dots, a_r\}_{E/F}.$$

- (2) (Projection formula) 有限次拡大の列 $E_1/E_2/F$, $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, $a_{i_0} \in G_{i_0}(E_1)$, $a_i \in G_i(E_2)$ ($i \neq i_0$) に対し,

$$\{a_1, \dots, N_{E_1/E_2}(a_{i_0}), \dots, a_r\}_{E_2/F} = \{R_{E_1/E_2}(a_1), \dots, a_{i_0}, \dots, R_{E_1/E_2}(a_r)\}_{E_1/F}.$$

- (3) (Weil 相互律) F 上の一変数代数関数体 K/F , $a_i \in G_i(K)$ ($1 \leq i \leq r$), $f \in K^*$ で, 各 $v \in P(K/F)$ に対し一つの $i(v)$ を除くすべての $i \neq i(v)$ に対して $a_i \in G_i(O_v)$ が成り立つものが与えられたとき

$$(2.1) \quad \sum_{v \in P(K/F)} \{a_1(v), \dots, \partial_v(a_{i(v)}, f), \dots, a_r(v)\}_{F(v)/F} = 0.$$

定義により $r = 0$ のときは $K(F;) = \mathbf{Z}$, $r = 1$ のときは $K(F; G_1) = G_1(F)$ である.

定理 4 (染川 [22]). 非負整数 r に対し, 対応 $\{a_1, \dots, a_r\} \mapsto \{a_1, \dots, a_r\}_{F/F}$ は同型 $K_r^M(F) \cong K(F; \mathbf{G}_m, \dots, \mathbf{G}_m)$ を与える. (右辺に $\mathbf{G}_m$ は r 個並ぶ.)

§ 3. Bloch-加藤予想の類似と混合モチーフの圏

Bloch-加藤予想の類似. n を F で可逆な自然数とする. F 上の半アーベル多様体 G に対し, Kummer 完全列 $0 \rightarrow G[n] \rightarrow G \xrightarrow{n} G \rightarrow 0$ ⁶ から得られる境界写像 $G(F) = H^0(F, G) \rightarrow H^1(F, G[n])$ を $a \mapsto (a)$ と書くことにする. 半アーベル多様体 $G_1, \dots, G_r$ に対し $\rho(\{a_1, \dots, a_r\}_{E/F}) = \text{Cor}_{E/F}((a_1) \cup \dots \cup (a_r))$ と定めると ⁷well-defined な準同型

$$\rho: K(F; G_1, \dots, G_r)/n \rightarrow H^r(F, G_1[n] \otimes \dots \otimes G_r[n])$$

が得られる [22]. さらに, 染川は次の魅力的な予想を立てた:

予想 5 ([22]). ρ は単射であろう.

⁶ $G[n]$ は G の n -ねじれ部分を表す.

⁷ $\cup$ はカップ積, $\text{Cor}_{E/F}$ は corestriction を表す.

この予想の根拠は次のパラグラフで述べる． $r = 1$ の場合は $K(F; G_1) = G_1(F)$ なので，Kummer 完全列によって予想 5 は成立する．（ただし，この場合でも ρ は全射とは限らない．） r が一般のときも， $G_1 = \cdots = G_r = \mathbf{G}_m$ の場合は定理 2 と定理 4 により ρ は同型である．他にも幾つかのケースでは具体的な計算により単射性が確認できることがあり，その場合は代数的サイクルに関する非自明な結論を導くことができる．（§5 でより詳しく説明する．）しかしながら，一般には予想は成立しない：

定理 6 (Spiess-Y. [24]). 予想 5 には反例が存在する．もっとも単純な反例としては $r = n = 2$ で $G_1 = G_2$ が一次元（非分裂）トーラスとなるものがとれる．（ただし， F は二次元局所体などの大きな体でなくてはならない．）

混合モチーフの圏 染川は予想 5 の根拠を次のように説明していた．Grothendieck により存在が予想されている混合モチーフのアーベル圏 $\mathbf{MM}$ を用いて議論する． $\mathbf{MM}$ の導来圏を D とし， $\mathbf{Z}$ を D のテンソル積に関する単位対象とする． $G_1, \dots, G_r$ を半アーベル多様体， n を F で可逆な自然数とする．

a) G_i や $G_i[n]$ は D の対象を定めるはずである．すると， D はテンソル圏なので， $S := G_1 \otimes \cdots \otimes G_r$ と $T := G_1[n] \otimes \cdots \otimes G_r[n]$ も D の対象となる．

b) 染川 K 群は D における Hom 群と同型になるであろう：

$$\mathrm{Hom}_D(\mathbf{Z}, S) \cong K(F; G_1, \dots, G_r).$$

c) ガロア・コホモロジーは D における Hom 群と同型になるであろう：

$$\mathrm{Hom}_D(\mathbf{Z}, T[r]) \cong H^r(F, T).$$

d) D には次の distinguished triangle が存在するであろう：⁸

$$S \xrightarrow{n} S \rightarrow T[r] \rightarrow (+1).$$

これらが正しければ予想 5 が従うのは当然である．この予想のうち b) の部分を Voevodsky の構成したモチーフ圏を用いて定式化・証明するのが本稿の主目的である．

それでは反例（定理 6）はどのように考えればよいのであろうか．実は，Voevodsky の構成したモチーフ圏は，考える位相によって Nisnevich 版と etale 版の二種類がある．我々は Nisnevich 版を利用する．しかし，予想の c) は etale 版を使うのが自然である．そうすると，予想の d) に意味を与えるためには二つの位相の比較をする過程が必要であり，その部分に無理が生じて反例が生じたものと解釈できる．

⁸ここでは $T[r]$ は T の次数 r のシフトを表す．

§ 4. Voevodsky のモチーフ圏

圏 DM と HI. 以下では F を完全体とし, Voevodsky [29] の構成したモチーフの三角圏 $\mathbf{DM} := \mathbf{DM}_{-}^{\text{eff}}(F)$ とその充満部分アーベル圏 $\mathbf{HI}$ を用いる. $\mathbf{DM}$ は, $D^{-}(\mathbf{MM})$ に相当すると期待される圏 $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(F)$ を充満部分圏として含む. $\mathbf{DM}_{\text{gm}}^{\text{eff}}(F)$ は幾何的に構成されるために扱いが難しいのだが, $\mathbf{DM}$ は層を用いて構成されるためずっと扱いやすい. $\mathbf{DM}$ と $\mathbf{HI}$ の構成は §6 で簡単に復習する. ここでは我々の議論で重要な点だけをまとめておく.

$\mathbf{HI}$ の対象 $\mathcal{F}$ はホモトピー不変移送付き Nisnevich 層と呼ばれる. $\mathcal{F}$ は F 上滑らかな多様体のなす圏 $\mathbf{Sm}$ 上の Nisnevich 位相⁹ に関する層になっている. また, 滑らかな多様体の有限全射 $X \rightarrow Y$ に対し移送と呼ばれる写像 $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ が誘導される. さらに, 任意の $X \in \mathbf{Sm}$ に対し $\text{pr}_1^* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1)$ が同型という性質 (ホモトピー不変性) を持つ. $\mathbf{HI}$ の対象の典型的な例は半アーベル多様体が表現する層である¹⁰. 定数層 $\mathbf{Z}$ も $\mathbf{HI}$ の対象である. 他の例は §5 で述べる. $\mathbf{DM}$ は $\mathbf{HI}$ を充満部分圏として含むテンソル三角圏である¹¹. $\mathbf{Z} \in \mathbf{HI}$ は $\mathbf{DM}$ のテンソル積に関する単位対象となる.

以上により, 半アーベル多様体 $G_1, \dots, G_r$ に対して $\text{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, G_1 \otimes \dots \otimes G_r)$ が定まることになる. これが染川 K 群 $K(F; G_1, \dots, G_r)$ と自然に同型となる, というのが主結果であるが, 以下では $G_1, \dots, G_r$ を $\mathbf{HI}$ の一般の対象として定式化する.

染川 K 群の拡張. $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ とする. $E_1/E_2/F$ を体の拡大とすると, $\mathcal{F}$ が層であることから $R_{E_1/E_2} : \mathcal{F}(E_2) \rightarrow \mathcal{F}(E_1)$ が誘導され, また $[E_1 : E_2] < \infty$ のときは移送により $N_{E_1/E_2} : \mathcal{F}(E_1) \rightarrow \mathcal{F}(E_2)$ も誘導される. 次に K を F 上の一変数代数関数体, $v \in P(K/F)$ とする. $O_v \hookrightarrow K$ の導く写像 $\mathcal{F}(O_v) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ は単射となる¹². これにより $\mathcal{F}(O_v)$ を $\mathcal{F}(K)$ の部分群とみなす. 還元写像 $O_v \rightarrow F(v)$ の導く射 $\mathcal{F}(O_v) \rightarrow \mathcal{F}(F(v))$ を $a \mapsto a(v)$ と書く. また, local symbol と呼ばれる双線形写像

$$\partial_v : \mathcal{F}(K) \times K^* \rightarrow \mathcal{F}(F(v))$$

も存在する. この構成はやや複雑なので, 後回しにして §6 で説明する. $\mathcal{F}$ が半アーベル多様体で表現されるとき, 以上の構成はすべて §2 で与えたものに一致する.

以上の構成を用いて記号を読み替えると, 定義 3 は $G_1, \dots, G_r$ がホモトピー不変移送付き Nisnevich 層のときにも意味を持つ. こうして $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ のときにも Mackey 積 $\mathcal{F}_1 \overset{M}{\otimes} \dots \overset{M}{\otimes} \mathcal{F}_r(F)$ と染川 K 群 $K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ が定義される. ($\mathcal{F}_i$ が半アーベル多様体で表現されるときは定義 3 に一致する.) 次の定理が本稿の主結果である:

定理 7. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ に対し, 次の自然な同型が存在する:

$$K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \cong \text{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r).$$

⁹ここでは定義は述べないが Zariski 位相と etale 位相の中間の位相である. [15] を参照.

¹⁰以下, 半アーベル多様体 G に対し, G の表現する層も $G \in \mathbf{HI}$ と書く. なお, 脚注 15 も参照.

¹¹ $\mathbf{DM}$ は $\mathbf{HI}$ の導来圏ではない.

¹²[28, Corollary 4.19]. なお, 定理 17 も参照.

§ 5. 代数的サイクルとの関係

Chow 群. X を F 上の滑らかな多様体とする. F が正標数のときは X が射影的であることも仮定する. このとき, $\mathcal{C}_X \in \mathbf{HI}$ で次の同型が成り立つようなものが存在する:

$$\mathcal{C}_X(\mathrm{Spec} F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}_X) \cong CH_0(X).$$

注意 8. 右側の同型については文献 [29] (X が射影的のときは Corollary 4.2.6, F の標数が 0 のときは Proposition 4.2.9) を参照のこと. なお, $\mathcal{C}_X \in \mathbf{HI}$ は $\mathcal{C}_X := H_0 M^c(X)$ として定義される. ここで $M^c(X) \in \mathbf{DM}$ は [29] で定義された「 X のコンパクト台モチーフ」である. $M^c(X)$ の構成 (と基本性質の証明) は特異点解消が必要であるが, X が射影的ならば $M^c(X) = M(X)$ は¹³ 無条件に構成できる. なお, 定義により $i > 0$ ならば $H_i M^c(X) = 0$ が成り立つので $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, M^c(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}_X)$ となる.

序で述べた定理 1 は次の系の特別な場合である:

系 9. $X_1, \dots, X_r$ を F 上の滑らかな多様体, $X = X_1 \times \dots \times X_r$ をそれらのファイバー積とする. F が正標数のときは, $X_1, \dots, X_r$ はすべて射影的と仮定する. このとき, 次の同型が存在する:

$$CH_0(X) \cong K(F; \mathcal{C}_{X_1}, \dots, \mathcal{C}_{X_r}).$$

証明. テンソル積の定義から同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_{X_r})$ が存在することが示せる. これに定理 7 を併せればよい. $\square$

Suslin ホモロジー. X を F 上の滑らかな多様体とする. (F は任意標数の完全体.) X の Suslin ホモロジー $h_0(X)$ は次のように定義される:

$$h_0(X) := \mathrm{Coker}[\oplus_{y \in X_{(1)}} UF(y)^* \rightarrow \oplus_{x \in X_{(0)}} \mathbf{Z}].$$

ここで, $y \in X_{(1)}$ に対して y の X 内での閉包 $\overline{\{y\}}$ の上でない $F(y)/F$ の素点全体を $C_\infty(y)$ として, $UF(y)^* = \{f \in F(y)^* \mid \text{任意の } v \in C_\infty(y) \text{ に対し } f \in O_v^* \text{ かつ } f(v) = 1\}$ と定める. 定義により, 自然な全射 $h_0(X) \rightarrow CH_0(X)$ が存在する. これは X が完備ならば同型である. また, X が非特異完備曲線 C とその上の被約な因子 D により $X = C \setminus D$ と表せるときは $h_0(X)$ は相対ピカル群 $\mathrm{Pic}_D(C)$ (導手付きイデアル類群の類似) として古典的に知られていた対象である. $\mathrm{Pic}_D(C)$ の構造は完全列

$$(5.1) \quad 0 \rightarrow R_{E/F} \mathbf{G}_m(F) \rightarrow \bigoplus_{x \in D} R_{F(x)/F} \mathbf{G}_m(F) \rightarrow \mathrm{Pic}_D(C) \rightarrow \mathrm{Pic}(C) \rightarrow 0$$

により理解される. ここで $E = H^0(C, O_C)$ であり, $R_{F(x)/F}$ は Weil 制限を表す. また, X が F -有理点 (もしくは次数 1 の因子) を持つときは, X の一般ヤコビ多様体と呼ばれる半アーベル多様体 Jac_X を用いて $\mathrm{Pic}_D(C) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathrm{Jac}_X(F)$ と表せる.

¹³ $M(X)$ の定義は注意 10 を参照.

X を F 上の滑らかな多様体とすると, $\mathcal{C}'_X \in \mathbf{HI}$ で次の同型が成り立つようなものが存在する:

$$\mathcal{C}'_X(\mathrm{Spec} F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}'_X) \cong h_0(X).$$

注意 10. 右側の同型については [29, Corollary 3.2.7] と [18, Theorem 5.1] を参照のこと. なお, $\mathcal{C}'_X \in \mathbf{HI}$ は $\mathcal{C}'_X := H_0 M(X)$ として定義される. ここで $M(X) \in \mathbf{DM}$ は [29] で定義された「 X のモチーフ」である. 定義により $i > 0$ ならば $H_i M(X) = 0$ が成り立つので $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, M(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}'_X)$ となる.

系 11. $X_1, \dots, X_r$ を滑らかな多様体, $X = X_1 \times \dots \times X_r$ をそれらのファイバー積とすると, 次の同型が存在する:

$$h_0(X) \cong K(F; \mathcal{C}'_{X_1}, \dots, \mathcal{C}'_{X_r}).$$

証明. テンソル積の定義から同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}'_X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{C}'_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{C}'_{X_r})$ が存在することが示せる. これに定理 7 を併せればよい. $\square$

例 12. $X_1, \dots, X_r$ を滑らかで幾何的に連結な曲線で次数 1 の因子を持つものとし, $X = X_1 \times \dots \times X_r$ とおく. X_i の一般ヤコビ多様体を J_i とすれば $\mathcal{C}'_{X_i} \cong \mathbf{Z} \oplus J_i$ と分解できる. これに上の系を併せると次の分解を得る:

$$h_0(X) \cong \bigoplus_{s=0}^r \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r} K(F; J_{i_1}, \dots, J_{i_s}).$$

Suslin ホモロジーの応用. 非特異完備多様体の Chow 群に対して知られていた定理を完備とは限らない非特異多様体に拡張するときに Suslin ホモロジーが利用されることが多々ある. 典型例を二つあげる:

定理 13. $\bar{X}$ を F 上の非特異完備多様体, X をその開部分多様体とする.

1. (Spiess-Szumely [23]/Geisser [4].) F が代数閉体のとき同型 $h_0(X)_{\mathrm{Tor}} \cong \mathrm{Alb}_X(F)_{\mathrm{Tor}}$ が存在する. ここで Alb_X は Serre [21] が導入した一般アルバネーゼ多様体であり, X から半アーベル多様体への射に関する普遍性で定義される半アーベル多様体である.
2. (Schmidt-Spiess [19].) F が有限体のとき有限群の同型 $h_0(X)^0 \cong \pi_1^{ab}(X)^{t, \mathrm{geo}}$ が存在する. ここで $\pi_1^{ab}(X)^{t, \mathrm{geo}} = \ker(\pi_1^{ab}(X)^t \rightarrow \mathrm{Gal}(F^{ab}/F))$, $h_0(X)^0 = \ker(h_0(X) \rightarrow h_0(\mathrm{Spec} F) = \mathbf{Z})$ である.

$X = \bar{X}$ のとき, (1) は Roitman [17]¹⁴, (2) は加藤・斎藤 [8] により 1980 年ごろには知られていた. ただし, X が一次元のときは ($X \neq \bar{X}$ であっても) どちらも 20 世紀前半には知られていた古典的結果である.

¹⁴ $\mathrm{ch}(F) = p > 0$ のとき, p -part は Milne [12] による

$X_1, \dots, X_r$ を幾何的に連結な非特異曲線とし, $X = X_1 \times \dots \times X_r$ とおく. 系 11 の応用として, X に対する定理 13 の別証明を与える. (この議論は Kahn [6] による.) ただし, 定理 13 の曲線の場合と次の事実は認めることにする:

事実 14. $r \geq 2$ とし, $G_1, \dots, G_r$ を F 上の半アーベル多様体とする.

- 1) (Akhtar [2]) F が代数閉体ならば, $K(F, G_1, \dots, G_r)_{\text{Tor}} = 0$ である.
- 2) (Kahn [6]) F が有限体ならば, $K(F, G_1, \dots, G_r) = 0$ である.

1) については, より強く一意可除群であることが言える. 証明は通常の Milnor K 群に対する証明の自然な延長であり, それほど込み入ったものではない. 2) は Weil 予想を用いるのでもう少し高度である (が, 一ページで証明できる).

さて, F が代数閉体または有限体ならば任意の曲線は次数 1 の因子を持つ. 例 12 の分解において, $s \geq 2$ となる項は, F が代数閉体ならねじれ部分が, F が有限体なら全体が, それぞれ自明であることが上の事実から分かる. 一方, 初等的な議論で $\text{Alb}_X \cong \bigoplus J_i$ および $\pi_1^{ab}(X)^{t, \text{geo}} \cong \bigoplus \pi_1^{ab}(X_i)^{t, \text{geo}}$ が分かる. これで曲線の場合に帰着された. $\square$

そのほかの応用. 例 12 の状況で, 簡単のためにさらに X が完備の場合を考えよう. すると $h_0(X) = CH_0(X)$ となる. n を F で可逆な自然数とする. Hochschild-Serre スペクトル系列と Künneth 分解を用いてエタールコホモロジー $H^{2r}(X, \mu_n^{\oplus r})$ が

$$\bigoplus_{s=0}^r \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r} H^s(F, J_{i_1}[n] \otimes \dots \otimes J_{i_s}[n])$$

を直和因子に持つことが分かる. また, サイクル写像

$$CH_0(X)/n \rightarrow H^{2d}(X, \mu_n^{\oplus r})$$

は例 12 とこの分解について整合的で, それぞれの因子は §3 で導入した写像 ρ に一致する. 従って, この場合に予想 5 が成り立つことを示せばサイクル写像の単射性が従う. [32] ではこの方針によって Mumford 曲線の積に対してサイクル写像の単射性が示されている. [5], [14], [27], [33] にも関係した研究がある.

高次 Chow 群とモチビクホモロジー. $X_1, \dots, X_r$ を滑らかで連結な多様体とし, $X = X_1 \times \dots \times X_r, d = \dim X$ とおく. このとき, 次の同型が存在する.

$$H_{-s}^M(X, \mathbf{Z}(-s)) \cong K(F; C'_{X_1}, \dots, C'_{X_r}, \mathbf{G}_m, \dots, \mathbf{G}_m).$$

(右辺では $\mathbf{G}_m$ は s 個おかれている.) ここで $H_i^M(X, \mathbf{Z}(j))$ は X のモチビクホモロジーであり, $i = j = 0$ の場合は Suslin ホモロジーに一致する: $H_0^M(X, \mathbf{Z}(0)) \cong h_0(X)$.

本稿ではモチビクホモロジーの定義は省略する．[29] を参照．さらに， F の標数が 0 であるか，もしくは $X_1, \dots, X_r$ がすべて射影的のとき次の同型が存在する：

$$CH^{d+s}(X, s) \cong K(F; \mathcal{C}_{X_1}, \dots, \mathcal{C}_{X_r}, \mathbf{G}_m, \dots, \mathbf{G}_m).$$

(右辺では $\mathbf{G}_m$ は s 個おかれている．) ここで $CH^i(X, j)$ は X の高次 Chow 群であり， $(i, j) = (d, 0)$ の場合は Chow 群に一致する： $CH^d(X, 0) \cong CH_0(X)$ ．本稿では高次 Chow 群の定義は省略する．[3] を参照．なお，Akhtar はこの結果を $r = 1$ の場合に限り，しかし F が完全という仮定を設けずに，証明していた [1]．

§ 6. 種々の構成

後回しにしてきた技術的な定義を説明する．次の節で主結果の概略を説明する際にはこれらが不可避となる．

DM の構成の概要． 本節については [29], [9] を参照． $\mathbf{Sm}$ を F 上滑らかな多様体の圏とする． $X, Y \in \mathbf{Sm}$ に対し $c(X, Y)$ を $X \times Y$ の既約閉部分多様体で X 上有限かつ X のある既約成分上全射となるもので生成される自由アーベル群とする． $\mathbf{Sm}$ と同じ対象を持ち， $X, Y \in \mathbf{Sm}$ に対してそれらの間の射を $c(X, Y)$ として作られる圏を $\mathbf{SmCor}$ と書く．合成は（有限全射という条件に注意すると）代数対応の合成と同様にして定義できる．多様体の射にグラフを対応させることにより関手 $\mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{SmCor}$ が得られる． $\mathbf{SmCor}$ からアーベル群の圏 $\mathbf{Ab}$ への反変関手を移送付き前層という．移送付き前層が与えられると，上記の関手 $\mathbf{Sm} \rightarrow \mathbf{SmCor}$ を合成することにより $\mathbf{Sm}$ から $\mathbf{Ab}$ への反変関手，すなわち前層が得られる．従って，移送付き前層は前層に付加構造（移送）を加えたものと思える． $\mathbf{PST}$ を移送付き前層の圏とする．移送付き前層で，Nisnevich 位相に関して $\mathbf{Sm}$ 上の層となるものを移送付き Nisnevich 層とよぶ．移送付き Nisnevich 層の圏を $\mathbf{NST}$ と書く． $\mathcal{F} \in \mathbf{NST}$ がホモトピー不変であるとは，任意の $X \in \mathbf{Sm}$ に対して $\mathrm{pr}_1^* : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(X \times \mathbf{A}^1)$ が同型となることをいう．ホモトピー不変な移送付き Nisnevich 層全体の圏を $\mathbf{HI}$ と書く．半アーベル多様体 G が表現する層¹⁵ は $\mathbf{HI}$ の対象となる．（加法群 $\mathbf{G}_a$ などユニポテントな部分を含む可換代数群が表現する層は，移送付き Nisnevich 層ではあるが，ホモトピー不変性を持たない．）最後に，上に有界な $\mathbf{NST}$ の導来圏 $D^-(\mathbf{NST})$ の部分圏で，すべてのホモロジー層がホモトピー不変となる複体からなるものが $\mathbf{DM}$ である． $\mathbf{HI}$ の対象は次数 0 にのみ台を持つ複体として $\mathbf{DM}$ の対象とみなすことができる．

Local symbol の構成． $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ とする．前層 $U \mapsto \mathrm{Coker}(\mathcal{F}(U \times \mathbf{A}^1) \rightarrow \mathcal{F}(U \times \mathbf{G}_m))$ の Nisnevich 層化 $\mathcal{F}_{-1}$ は $\mathbf{HI}$ の対象となる．（この構成は Voevodsky が行った [28]．注

¹⁵ $U \in \mathbf{Sm}$ に対し $G(U) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sm}}(U, G)$ という意味である．($G(U) = c(U, G)$ ではない．)

意 16 を参照.) X を F 上の非特異固有曲線とする. 閉点 $x \in X_{(0)}$ に対し自然な同型 $\mathcal{F}_{-1}(F(x)) \cong H_x^1(X, \mathcal{F})$ が [28, Lemma 4.36] にて構成されている. これにより

$$\partial_x : \mathcal{F}(F(X)) \rightarrow \mathcal{F}_{-1}(F(x))$$

を得る. また, 自然な準同型 $\mathrm{Tr}_{X/F} : H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{-1}(F)$ で, 任意の $x \in X_{(0)}$ に対し合成 $\mathcal{F}_{-1}(F(x)) \cong H_x^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{X/F}} \mathcal{F}_{-1}(F)$ が移送 $\mathrm{Tr}_{F(x)/F}$ と一致するものが存在する [7, Proposition 4.5]. この定義により, 合成

$$(6.1) \quad \mathcal{F}(F(X)) \xrightarrow{\oplus \partial_x} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \mathcal{F}_{-1}(F(x)) \xrightarrow{\oplus \mathrm{Tr}_{F(x)/F}} \mathcal{F}_{-1}(F)$$

は零写像となることが分かる. 次の命題は [7, Proposition 4.3] で示されている:

命題 15. 任意の $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ に対し, 自然な同型 $(\mathcal{F}^{\mathbf{HI}} \otimes \mathbf{G}_m)_{-1} \cong \mathcal{F}$ が存在する¹⁶.

各 $x \in X_{(0)}$ に対し, 上の構成を $\mathcal{F}^{\mathbf{HI}} \otimes \mathbf{G}_m$ に適用することで, 双線形写像

$$(6.2) \quad \mathcal{F}(F(X)) \times F(X)^* \rightarrow (\mathcal{F}^{\mathbf{HI}} \otimes \mathbf{G}_m)(F(X)) \xrightarrow{\partial_x} (\mathcal{F}^{\mathbf{HI}} \otimes \mathbf{G}_m)_{-1}(F(x)) = \mathcal{F}(F(x))$$

を得る. これを local symbol と呼ぶことにする. $\mathcal{F}$ が半アーベル多様体で表現される層ときは Serre の local symbol と一致することが確認できる [7, Proposition 4.12].

注意 16. $n \geq 2$ に対して $\mathcal{F}_{-n} = ((\mathcal{F}_{-1}) \cdots)_{-1}$ と定める. Voevodsky はこの構成を用いて, 次の Gersten 解消を証明した [28, Theorem 4.37]:

定理 17 (Voevodsky). $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ と滑らかな多様体 X に対し, X_{Zar} の完全列¹⁷

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*} \mathcal{F} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*} \mathcal{F}_{-1} \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} i_{x*} \mathcal{F}_{-2} \rightarrow \cdots$$

が存在する. ここで $x \in X$ に対し $i_x : x \rightarrow X$ は埋め込み写像.

§ 7. 主定理の証明の概略

PST のテンソル積と Mackey 積. まず **PST** と **NST** におけるテンソル積を復習する. **PST** の対象を前層としてテンソル積を取ったのでは移送がうまく定義できないので工夫が必要である. $\mathcal{F} \in \mathbf{PST}$ を取る. 米田埋め込みを $L : \mathbf{SmCor} \rightarrow \mathbf{PST}$ と書くと, $X \in \mathbf{Sm}$ と $\alpha \in \mathcal{F}(X)$ の組 (X, α) は (米田の補題により) **PST** における射 $L(X) \rightarrow \mathcal{F}$

¹⁶ $\otimes^{\mathbf{HI}}$ は **HI** におけるテンソル積である. 定義は次の節で説明する.

¹⁷ 非負整数 i に対し $X^{(i)} = \{x \in X \mid \mathrm{codim}\{x\} = i\}$ と書く.

と思える．このような (X, α) をすべてを走らせることで **PST** の全射 $\oplus_{(X, \alpha)} L(X) \rightarrow \mathcal{F}$ が得られる．この核に対して同じ構成を繰り返すことで，

$$\cdots \rightarrow \oplus_{(Y, \beta)} L(Y) \rightarrow \oplus_{(X, \alpha)} L(X) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$$

という形の完全列を得る．そこで，滑らかな多様体 X によって $\mathcal{F} = L(X)$ とかけているものに対してテンソル積を定義すれば十分となる． $X, Y \in \mathbf{Sm}$ については $L(X) \otimes^{\mathbf{PST}} L(Y) = L(X \times Y)$ と定める． $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{NST}$ のときは $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{PST}} \mathcal{G}$ の Nisnevich 層化として $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{NST}} \mathcal{G}$ を定義する¹⁸．なお，任意の $\mathbf{Sm}$ 上の前層 $\mathcal{F}$ とその Nisnevich 層化 $\mathcal{F}^a$ に対して $\mathcal{F}(F) \cong \mathcal{F}^a(F)$ が成り立つ．これは，Nisnevich 位相の定義より $\mathrm{Spec} F$ の Nisnevich 被覆は自明な被覆による細分を持つことから従う．

命題 18. 任意の $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{PST}$ に対し，次の自然な同型が存在する¹⁹：

$$\mathcal{F}_1 \otimes^M \cdots \otimes^M \mathcal{F}_r(F) \cong \mathcal{F}_1 \otimes^{\mathbf{PST}} \cdots \otimes^{\mathbf{PST}} \mathcal{F}_r(F).$$

さらに $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{NST}$ であれば右辺は $\mathcal{F}_1 \otimes^{\mathbf{NST}} \cdots \otimes^{\mathbf{NST}} \mathcal{F}_r(F)$ と同型である．

最後の主張はすでに上で注意した．前半の証明は上の定義を展開するだけである．

HI と DM におけるテンソル積． 埋め込み $\mathbf{DM} \rightarrow D^-(\mathbf{NST})$ は左随伴関手 $\mathbf{RC}_* : D^-(\mathbf{NST}) \rightarrow \mathbf{DM}$ を持つ． $\mathbf{NST}$ のテンソル積は $D^-(\mathbf{NST})$ におけるテンソル積を導き，さらに $\mathbf{RC}_*$ によって $\mathbf{DM}$ のテンソル積も誘導する．こうして定まる $\mathbf{DM}$ のテンソル積を単に $\otimes$ と書く．なお，埋め込み $\mathbf{DM} \rightarrow D^-(\mathbf{NST})$ はテンソル積を保たないことに注意．(もちろん $\mathbf{RC}_*$ はテンソル積を保つ．)

注意 19. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{HI}$ のとき， $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{HI}} \mathcal{G} = H_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ とすることで $\mathbf{HI}$ にもテンソル積が定まる．これは $\mathcal{F} \otimes^{\mathbf{NST}} \mathcal{G}$ の最大ホモトピー不変商である．定義により $i > 0$ なら $H_i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) = 0$ となるので， $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbf{HI}} \mathcal{G})$ が成り立つ．また， $\mathcal{F}(F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F})$ も成り立つ [9, Proposition 14.16]．

定義より，自然な全射 $\mathcal{F}_1 \otimes^{\mathbf{NST}} \cdots \otimes^{\mathbf{NST}} \mathcal{F}_r(F) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_r)$ が存在することは容易に分かる．その核を計算した結果をまとめたのが次の定義 20 と²⁰ 命題 21 である．

¹⁸ $\mathcal{F} \in \mathbf{PST}$ の Nisnevich 層化 $\mathcal{F}^a$ は (ちゃんと移送が定まり) $\mathbf{NST}$ の対象となる [9, Theorem 13.1]．

¹⁹ Mackey 積の定義は定義 3 (と定理 7 の直前のコメント) を参照．なお，染川 K 群と異なり，Mackey 積の定義には local symbol が必要ない．そのため，Mackey 積は $\mathbf{PST}$ の対象に対しても定義できる．

²⁰ 注意 19 で述べたように，この計算は $\mathbf{NST}$ におけるテンソル積の最大ホモトピー不変商を計算することに対応する．これが次の定義における関係式「ホモトピー不変性」の由来である．

定義 20. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ の幾何学的 Milnor K 群 $K'(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ は, 有限次拡大 E/F と $a_i \in \mathcal{F}_i(E)$ ($i = 1, \dots, r$) に対して定まるシンボル $\{a_1, \dots, a_r\}_{E/F}$ を生成元とし, 定義 3 における (1), (2) および次の (4) の三つの関係式で定まるアーベル群である:

- (4) (ホモトピー不変性) F 上の一変数代数関数体 K/F , $a_i \in \mathcal{F}_i(K)$ ($1 \leq i \leq r$), $f \in K^*$ で, $a_i \notin \mathcal{F}_i(O_v)$ となる i があるような $v \in P(K/F)$ については $f \in O_v^*$ かつ $f(v) = 1$ となるものが与えられたとき

$$(7.1) \quad \sum_{f(v) \neq 1} v(f) \{a_1(v), \dots, a_r(v)\}_{F(v)/F} = 0.$$

ここで, 左辺は $f(v) \neq 1$ を満たす $v \in P(K/F)$ 全体に関する和を表す.

命題 21. 任意の $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ に対し, 次の自然な同型が存在する:

$$K'(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r).$$

任意の関数体 K/F と $v \in P(K/F)$ に対して $\mathcal{F}(O_v) = \mathcal{F}(K)$ が成り立つような $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ を固有と呼ぶことにしよう. アーベル多様体は (この意味でも) 固有である. §5 で定義された $\mathcal{C}_X$ (X は滑らかな多様体) も固有である. (しかし半アーベル多様体の表現する層や $\mathcal{C}'_X$ は固有とは限らない.) 固有な層に対しては染川 K 群と幾何学的 Milnor K 群で定義に違いが現れないので次の系を得る:

系 22. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ が固有なら定理 7 が成り立つ.

系 9 はこの系から得られる. もう一つ, 命題から従う重要なケースがある²¹.

系 23. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r = \mathbf{G}_m$ の場合も定理 7 が成り立つ.

証明. (7.1) の左辺が染川 K 群 $K(F; \mathbf{G}_m, \dots, \mathbf{G}_m)$ の元として消えていることを示せばよい. 定理 4 により染川 K 群の代わりに Milnor K 群 $K_r^M(F)$ で同じ主張を示せば十分である. これは Milnor K 群に対する古典的な Weil 相互律の帰結である. $\square$

この二つの系で, かなりのケースがカバーできている. しかし, 一般の場合は以下で述べるようなより複雑な議論が必要となる.

全射の構成と曲線的な場合への帰着. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ として $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \overset{\mathbf{HI}}{\otimes} \dots \overset{\mathbf{HI}}{\otimes} \mathcal{F}_r$ とおく. 定義 3 と命題 21 により, 二つのアーベル群 $K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F})$ はどちらも $\mathcal{F}_1 \overset{M}{\otimes} \dots \overset{M}{\otimes} \mathcal{F}_r(F)$ の商であることが分かる. 定義 3 (3) の状況で,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(K) \times \dots \times \mathcal{F}_r(K) \times K^* &\rightarrow \mathcal{F}(K) \times K^* \\ &\rightarrow \bigoplus_{v \in P(K/F)} \mathcal{F}(F(v)) \rightarrow \mathcal{F}(F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

²¹ これは Suslin-Voevodsky の定理 [26] $K_r^M(F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathbf{G}_m^{\otimes r})$ の別証明も与える.

の合成が零写像となることが (6.1) により分かる. (ここで, 第一の写像はテンソル積の定義から与えられるもの, 第二の写像は local symbol (6.2), 第三の写像は 移送である.) 特に (2.1) の左辺 (Weil 相互律) は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F})$ においても消えることになる. 以上により, 全射

$$(7.2) \quad \alpha : K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}}(\mathbf{Z}, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_r).$$

が存在することが示された. あとは α が単射であることを示せばよい.

補題 24. 任意の非特異曲線 X/F について, $\mathcal{F}_1 = \dots = \mathcal{F}_r = \mathcal{C}'_X$ のときに定理 7 が成り立つと仮定する. すると定理 7 はすべての $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ に対して成り立つ.

証明. 定義 20 (4) の条件を満たす $K/F, a_i, f$ を取る. 式 (7.1) の左辺を染川 K 群 $K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ の元とみたものを $(K; a_1, \dots, a_r; f)$ と書く. $(K; a_1, \dots, a_r; f) = 0$ を示せばよい. X を K/F の定める非特異完備曲線から $f(v) = 1$ となる $v \in P(K/F)$ をすべて除いた曲線とする. $x \in \mathcal{C}'_X(X) \subset \mathcal{C}'_X(K)$ を生成点の定める元とする. すると, 仮定により $(K; x, \dots, x; f)$ は染川 K 群 $K(F; \mathcal{C}'_X, \dots, \mathcal{C}'_X)$ の元として 0 である. ところが, $a_i \in \mathcal{F}_i(X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{C}'_X, \mathcal{F}_i)$ たちの誘導する写像

$$K(F; \mathcal{C}'_X, \dots, \mathcal{C}'_X, \mathbf{G}_m) \rightarrow K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m)$$

による $0 = (K; x, \dots, x; f)$ の像が $(K; a_1, \dots, a_r; f)$ である. □

適当な有限次分離代数 E_i/F ($i = 1, 2$) と固有な $\mathcal{G}$ について完全列

$$(7.3) \quad 0 \rightarrow R_{E_1/F} \mathbf{G}_m \rightarrow R_{E_2/F} \mathbf{G}_m \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$$

が存在するような $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}$ を曲線的と呼ぶことにする. (5.1) により, X が非特異曲線るとき $\mathcal{C}'_X$ は曲線的である. 以下では主に曲線的な移送付き Nisnevich 層を考察する.

Steinberg 関係式. 定理 7 の証明を完結させるため, もう一つの K 群を導入する.

定義 25. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ の Steinberg 型 Milnor K 群 $\tilde{K}(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ は, 有限次拡大 E/F と $a_i \in \mathcal{F}_i(E)$ ($i = 1, \dots, r$) に対して定まるシンボル $\{a_1, \dots, a_r\}_{E/F}$ を生成元とし, 定義 3 における (1), (2) および次の (5) の三つの関係式で定まるアーベル群である:

- (5) (Steinberg 関係式) 有限次拡大 E/F , 二つの添え字 $i_1 < i_2$, $\chi_{i_j} \in \mathrm{Hom}_E(\mathbf{G}_m, \mathcal{F}_{i_j})$ ($j = 1, 2$), $a_i \in \mathcal{F}_i(E)$ ($i \neq i_1, i_2$), $b \in E^* \setminus \{1\}$ が与えられたとき

$$\{a_1, \dots, \chi_{i_1}(b), \dots, \chi_{i_2}(1-b), \dots, a_r\}_{E/F} = 0.$$

Steinberg 関係式が Weil 相互律に含まれることは [22, Theorem 1.4] の議論をまねることで容易に示される．よって，全射の列

$$\tilde{K}(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \xrightarrow{\beta} K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \xrightarrow{\alpha} K'(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$$

が存在することになる．定理 4 により， $\mathcal{F}_1 = \dots = \mathcal{F}_r = \mathbf{G}_m$ のとき， β は同型である．この結果はすこし拡張できて，各 $\mathcal{F}_i$ が曲線的なトーラスのとき（つまり， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_i$ に対して完全列 (7.3) で $\mathcal{G} = 0$ となるものが存在するとき） β が同型となることが示せる．しかし，例えば $\mathcal{F}_i$ がすべてアーベル多様体のときは Steinberg 関係式は自明なものしか存在しないので， β は一般には同型とはならない．

問題 26. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ が（曲線的とは限らない）トーラスのとき， β は同型か？

次の命題と補題は主定理の証明において技術的な鍵となる．特に命題 27 が証明できるというのが $\tilde{K}$ を導入した中心的な理由である．（我々は，これを染川 K 群に対して直接証明することはできなかった．）

命題 27. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ を曲線的とする．任意の一変数関数体 K/F と $v \in P(K/F)$ に対し，写像 $\partial_v : \tilde{K}(K; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m) \rightarrow \tilde{K}(F(v); \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ で次を満たすものが存在する：

- $1 \leq i_0 \leq r$, $a_i \in \mathcal{F}(O_v)$ ($i \neq i_0$), $a_{i_0} \in \mathcal{F}(K)$, $f \in K^*$ に対し

$$\beta \partial_v \{a_1, \dots, a_r, f\}_{K/K} = \{a_1(v), \dots, \partial_v(a_{i_0}, f), \dots, a_r(v)\}_{F(v)/F}.$$

- 有限次拡大 K'/K に対し，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccc} \tilde{K}(K'; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\oplus \partial_w} & \bigoplus_{w \in P(K'/F), w|v} \tilde{K}(F(w); \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \\ \text{Tr}_{K'/K} \downarrow & & \downarrow \oplus_w \text{Tr}_{F(w)/F(v)} \\ \tilde{K}(K; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m) & \xrightarrow{\partial_v} & \tilde{K}(F(v); \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r). \end{array}$$

ただし，有限次拡大 E_1/E_2 に対し $\text{Tr}_{E_1/E_2} : \tilde{K}(E_1; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \rightarrow \tilde{K}(E_2; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ は $\{a_1, \dots, a_r\}_{E'/E_1} \mapsto \{a_1, \dots, a_r\}_{E'/E_2}$ で定まる準同型である．

補題 28. $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r \in \mathbf{HI}$ を曲線的とし， K/F を一変数代数関数体とする． F が無限体ならば， $\tilde{K}(K; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m)$ は有限次拡大 K'/K と次の条件を満たす $a_i \in \mathcal{F}_i(K')$ と $f \in K^*$ に対する $\{a_1, \dots, a_r, f\}_{K'/K}$ たちで生成される：任意の $v \in P(K'/F)$ に対し， $\{i \mid 1 \leq i \leq r, a_i \notin \mathcal{F}_i(O_v)\}$ は高々一つの元からなる．

これらの証明の基本方針は次の通りである．曲線的という仮定から固有の場合と乗法群（もしくはその Weil 制限）の場合に問題を分解できる．固有の場合は問題は生じない．乗法群の場合は Steinberg 関係式を利用して都合のよい状況まで変形する．いずれにせよ，これらの証明はたいへん技術的であり，込み入ったシンボルの計算が必要になる．

系 29. 補題 28 と同じ仮定のもとで、次の合成は零写像となる：

$$\begin{aligned} \tilde{K}(K; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r, \mathbf{G}_m) &\xrightarrow{\oplus \partial_v} \bigoplus_{v \in P(K/F)} \tilde{K}(F(v); \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \\ &\xrightarrow{\oplus \text{Tr}_{F(v)/F}} \tilde{K}(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r) \xrightarrow{\beta} K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r). \end{aligned}$$

証明. 補題 28 の条件を満たすような $a_1, \dots, a_r, f$ に対して、その像が消えることを示せばよい。それは命題 27 と定義 3 から従う。□

以上の準備のもとで、主定理 7 は次のように証明される。事実 14 により F は無限体と仮定してよく、さらに補題 24 により $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r$ は曲線的と仮定してよい。このときに (7.1) の左辺が染川 K 群 $K(F; \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_r)$ の元として消えることを示せばよいが、それは上の系から従う。□

謝辞. 有益なコメントを下された査読者に感謝します。

References

- [1] R. Akhtar, Milnor K -theory of smooth varieties, J. K -Theory, **32** (2004), 269–291.
- [2] R. Akhtar, Torsion in mixed K -groups, Comm. Algebra, **32** (2004), 295–313.
- [3] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K -theory, Adv. Math., **61** (1986), 267–304 .
- [4] T. Geisser, On Suslin’s singular homology and cohomology, Doc. Math. Extra volume: Andrei A. Suslin sixtieth birthday (2010), 223–249.
- [5] T. Hiranouchi and S. Hirayama, On the cycle map for products of elliptic curves over a p -adic field, Acta Arith. **157** (2013) 101–118.
- [6] B. Kahn, Nullité de certains groupes attachés aux variétés semi-abéliennes sur un corps fini; application, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **314** (1992), 1039–1042.
- [7] B. Kahn and T. Yamazaki, Voevodsky’s motives and Weil reciprocity, to appear in Duke Math. J.
- [8] K. Kato and S. Saito, Unramified class field theory of arithmetical surfaces, Ann. of Math., **118** (1983), 241–275.
- [9] C. Mazza, V. Voevodsky and C. Weibel, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Math. Monogr., **2**. American Math. Soc., 2006.
- [10] A. Merkurjev and A. Suslin, K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, Izv. Math., **21** (1983), 307–340.
- [11] J. Milnor, Algebraic K -theory and quadratic forms, Invent. Math., **9** (1969/1970), 318–344.
- [12] J. S. Milne, Zero cycles on algebraic varieties in nonzero characteristic: Roitman’s theorem, Compositio Math., **47** (1982), 271–287.
- [13] S. Mochizuki, Motivic interpretation of Milnor K -groups attached to Jacobian varieties, Hokkaido Math. J., **41** (2012), 1–10.
- [14] J. Murre and D. Ramakrishnan, Local Galois symbols on $E \times E$, In: Motives and algebraic cycles, Fields Inst. Commun., **56**, Amer. Math. Soc., (2009), 257–291.

- [15] Y. A. Nisnevich, The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory, In: Algebraic K-theory: connections with geometry and topology, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1989), 241–342.
- [16] W. Raskind and M. Spiess, Milnor K -groups and zero-cycles on products of curves over p -adic fields, *Compositio Math.*, **121** (2000), 1–33.
- [17] A. A. Roitman, The torsion of the group of zero-cycles modulo rational equivalence, *Ann. Math.*, **111** (1980), 553–570.
- [18] A. Schmidt, Singular homology of arithmetic schemes, *Algebra Number Theory* **1** (2007), 183–222.
- [19] A. Schmidt and M. Spiess, Singular homology and class field theory of varieties over finite fields, *J. Reine Angew. Math.*, **527** (2000), 13–36.
- [20] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, 1959.
- [21] J.-P. Serre, Morphismes universels et variété d’Albanese, *Séminaire Chevalley*, Année 1958/59, Exposé 10.
- [22] M. Somekawa, On Milnor K -groups attached to semi-abelian varieties, *J. K-Theory*, **4** (1990), 105–119.
- [23] M. Spiess and T. Szamuely, On the Albanese map for smooth quasi-projective varieties, *Math. Ann.*, **325** (2003), 1–17.
- [24] M. Spiess and T. Yamazaki, A counterexample to generalizations of the Milnor-Bloch-Kato conjecture, *J. K-Theory*, **4** (2009), 77–90.
- [25] A. Suslin and S. Joukhovitski, Norm varieties, *J. Pure Appl. Algebra*, **206** (2006), 245–276.
- [26] A. Suslin, and V. Voevodsky, Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients, In: The arithmetic and geometry of algebraic cycles, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, Kluwer Acad. Publ. (2000) 117–189.
- [27] T. Takemoto, Zero-cycles on products of elliptic curves over p -adic fields, *Acta Arith.*, **149** (2011), 201–214.
- [28] V. Voevodsky, Cohomological theory of presheaves with transfers, In: Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143**, Princeton (2000), 87–137.
- [29] V. Voevodsky, Triangulated categories of motives over a field, In: Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143**, Princeton (2000), 188–238.
- [30] V. Voevodsky, On motivic cohomology with $\mathbf{Z}/l$ -coefficients, *Ann. of Math.*, **174** (2011), 401–438.
- [31] C. Weibel, The norm residue isomorphism theorem, *J. Topol.*, **2** (2009), 346–372.
- [32] T. Yamazaki, On Chow and Brauer groups of a product of Mumford curves, *Math. Ann.*, **333** (2005), 549–567.
- [33] T. Yamazaki, Class field theory for a product of curves over a local field, *Math. Z.*, **261** (2009), 109–121.