

Boltzmann 型方程式の大域解の存在について

大市大 工 鷺飼正二

§1. 序

気体の運動は謂ゆる Boltzmann 方程式によつて記述される。

今、気体は一種類の粒子から成るとし、粒子の位置を $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 、速度を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ 、粒子密度を $u(t, x, \xi)$ (t は時刻, ≥ 0) で表わすことにすれば、Boltzmann 方程式は

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Q[u].$$

但し外力(重力 etc.) は無いと仮定した。 $Q[u]$ は衝突項であり、

$$(2) \quad Q[u] = \iint_{\mathbb{R}^3 \times S^2} k(\xi, \xi', \omega) \{ u(\xi_1) u(\xi'_1) - u(\xi) u(\xi') \} d\xi' d\omega,$$

ここに $\omega \in S^2$ は衝突方向、 ξ, ξ' は共に ξ, ξ', ω の関数で、速度 ξ の粒子と ξ' の粒子が衝突方向 ω で衝突した後、夫々の粒子の速度を表わし、 $k(\xi, \xi', \omega)$ は粒子の相互作用ポテンシャルにより定まる関数である。又 $u(\xi) = u(t, x, \xi)$

等である。

粒子密度の空間分布が一様と仮定すれば, Eq.(1) で右辺が一定, $-\sum \xi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ は落ちるが, この場合の Eq.(1) に対する初期値問題の大域解の存在は, 様々なポテンシャルに対し証明されている。[1] [2] [3]

とるが空間変数を含む場合に対しこれは局所解の存在しかわかれしていない[4]。 $\chi = \psi, \psi = \psi$ は, Eq.(2) の衝突項を少し特殊化(一般化?)して

$$(3) \quad Q[u] = \iint R(\xi, \xi'; \xi_1, \xi'_1) u(\xi_1) u(\xi'_1) d\xi'_1 d\xi_1 -$$

$$- \iint R(\xi_1, \xi'_1; \xi, \xi') u(\xi) u(\xi') d\xi'_1 d\xi_1$$

に対し, $\overbrace{Eq.(1)}^{Eq.(1)}$ の大域解が存在するための k に対する1つの十分条件を与えよう。(残念だが現実の気体には適用できているようであるが.....) 物理的には非局所解の少を考えるのが十分である。

§2. ある種の非線型発展方程式

まず問題を少し抽象化して, 以下のような発展方程式^式を考えよう。 X は単位元 e を持つ Banach ring とし, $\| \cdot \|$ は X のノルムとする。さらに X は肉錐体 K を持つとし, X に半順序 $\leq$ を導入する。 $(u \leq v \Leftrightarrow v - u \in K)$ 。 K は次の性質を持つとする:
 ①: $e \in K$, $u, v \in K$ ならば $u + v \in K$, $0 \leq u \leq v$ ならば $\|u\| \leq \|v\|$,

$u \in K$ ならば $u \leq \|u\|e$.

最後に $c \in \mathbb{R}$ 正定数とし、

$$K_c = \{u \in K; \|u\| \leq c\} = \{u \in X; 0 \leq u \leq ce\}$$

を定義する。 K_c は閉集合である。

次の条件を満たす作用素 A 及び Q を考える。

条件[A]. A は定義域 $\mathcal{D}(A) \subseteq X$, $\mathcal{R}(A) \subseteq X$ なる線型作用素で、

[A-1] X 上の強連続縮小半群 $E(t) = e^{tA}$ を生成する、

[A-2] $E(t)K \subseteq K$, $t \geq 0$.

条件[Q]. Q は非線型作用素である

$$Q[u] = Q_1[u] - u Q_2[u]$$

なる形を持つとする。但し Q_i ($i=1, 2$) は $\mathcal{D}(Q_i) = X$,

$\mathcal{R}(Q_i) \subseteq X$ なる (非線型又は線型) 作用素で、かつ

[Q-1] 局所 Lipschitz 連続である; $\forall u, v \in X$ に対し

$$\|Q_i[u] - Q_i[v]\| \leq q_i(\|u\|, \|v\|) \|u - v\| \quad (i=1, 2)$$

但し $q_i(x_1, x_2)$ は $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ なる写像で、 $\mathbb{R}^2$ の有界集合を $\mathbb{R}$ の有界集合に写す、

[Q-2] $Q_i[K] \subseteq K$, ($i=1, 2$),

[Q-3] 次の条件を満たす正定数 C と (非線型) 作用素 S が存在する; S は局所 Lipschitz 連続で、

$S[K] \subseteq K$, かつ $\forall u \in K_c$ に対し

$$Q[u] \leq (ce - u) S[u].$$

さ2 $Q(A)$ で定義された作用素 $A+Q$ に対する発展方程式

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + Q[u] \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

を考へる。ここで u^u , u^v は簡単のため (4) から導かれる積分方程式

$$(5) \quad u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-t') Q[u(t')] dt', \quad t \geq 0,$$

について考へる。

定理 1. 条件 [A], [Q] の下で, 任意の初期値 $u_0 \in K_c$ に対し, $u \in C_t^0([0, \infty); K_c)$ には (5) の解 $u = u(t)$ が唯一存在する。

証明には次の逐次近似法を用いる。

$$(6) \quad \begin{cases} u^n(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-t') \{R_1[u^{n-1}(t')] - u^n(t') R_2[u^{n-1}(t')]\} dt' \\ u^0(t) = 0 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

値し

$$R_1[u] = Q_1[u] + uS[u], \quad R_2[u] = Q_2[u] + S[u],$$

$R_1[u] - uR_2[u] = Q[u]$ であるから, (6) は (5) の近似法で与えられる。
 $\lambda = 3$ の (6) は u^n について解ける,

$$(7) \quad u^n = H[u^{n-1}], \quad n \geq 1, \quad u^0 = 0,$$

$$(8) \quad H[u] \equiv U(t, 0; u)u_0 + \int_0^t U(t, s; u)R_1[u(s)]ds$$

である。 $U(t, s; u)$ は X 上の非線型作用素で, 積分方程式

$$(9) \quad U(t, s; u) = E(t-s) - \int_s^t E(t-t')R_2[u(t')]U(t', s; u)dt',$$

$t \geq s \geq 0$

(一意)

の解である。但し $u \in C_t^0([0, \infty); X)$ は与えられた関数, 右辺の $R_2[u(t')]$ は乗法作用素と考える。(6) $\Leftrightarrow$ (7) は明らかである。
 (9) の代りに方程式

$$(10) \quad w(t, s) = f(t, s) - \int_s^t E(t-t')R_2[u(t')]w(t', s)dt', \quad t \geq s \geq 0,$$

を考える。 $f(t, s) = E(t-s)u_0$ ならば $w(t, s) = U(t, s; u)u_0$ 。

補題 1. $u(t) \in K$ ($t \geq 0$) ならば $U(t, s; u)K \subseteq K$ かつ

$$\|U(t, s; u)\| \leq 1 \quad \text{である。} \quad (t \geq s \geq 0).$$

証明. $\alpha = \sup_{0 \leq t \leq T} \|R_2[u(t)]\|$, $E_\alpha(t) = e^{-\alpha t}e^{tA}$ とおく。

(10) の両辺に $E_\alpha(t-t')$ を施し t に関し $[s, t]$ で積分する。

$$E_\alpha(t-t)E(t-t') = e^{\alpha(t-t')}E_\alpha(t-t-t') \quad \text{であるから}$$

$$\int_s^{t_1} E_\alpha(t_1-t) w(t, s) dt = \int_s^{t_1} E_\alpha(t_1-t) f(t, s) dt - \frac{1}{\alpha} \int_s^{t_1} E(t-t') R_2 [u(t')] w(t', s) dt' \\ - \frac{1}{\alpha} \int_s^{t_1} E_\alpha(t-t') R_2 [u(t')] w(t', s) dt'$$

これと(10)を合わせると結局

$$(11) \quad w(t, s) = f(t, s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') f(t', s) dt' + \\ + \int_s^t E_\alpha(t-t') \{ \alpha e - R_2 [u(t')] \} w(t', s) dt'$$

を得る。ここで $f(t, s) = e^{(t-s)A} u_0$ とおくと, $u_0 \in K$ ならば,

$$f(t, s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') f(t', s) dt' = E(t-s) u_0 - \alpha \int_s^t e^{\alpha(t-t')} dt' E_1(t-s) u_0 = \\ = E_\alpha(t-s) u_0 \in K$$

一方, K の性質により $\underbrace{0 \leq R_2 [u(t')] \leq \|R_2 [u(t')]\| e}_{\text{と条件 [Q]}} \leq \alpha e$, よって $\alpha e - R_2 [u(t')] \in K$, $0 \leq t' \leq T$, よって (11) の解を Neumann 級数で表めることにすれば, その各項は $\in K$, K は閉集合であるから, 結局 $w(t, s) = U(t, s; u) u_0 \in K$, $0 \leq s \leq t \leq T$, 又 (10) から $\underbrace{0 \leq w(t, s) \leq f(t, s)}_{\text{直ちに}} = E(t-s) u_0$ が得られ, K の性質により, $\|w(t, s)\| \leq \|E(t-s) u_0\| \leq \|u_0\|$, ここで (A-1) を用いた。よって $0 \leq s \leq t \leq T$ で補題が成り立つが, Ω は任意であるから補題は証明された。

補題 2. $f(t, s) = e - E(t)e$ に対する (10) の解 $w(t, s)$ は K に属

す。 $(t \geq s \geq 0)$

証明.
$$f(t, s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-s') f(s', s) ds' = e^{-E(t)} e - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') e dt' + \alpha \int_s^t e^{-\alpha(t-s')} ds' E(t) e$$

$t = 3z$, $0 \leq E(t)e \leq \|E(t)\| e \leq e$ と上式右辺の3項に代入し, $\alpha \int_s^t e^{-\alpha(t-t')} dt' = 1 - e^{-\alpha(t-s)}$ と用いれば,

$$f(t, s) - \alpha \int_s^t E_\alpha(t-t') f(t', s) dt' \geq e^{-\alpha(t-s)} (e - E(t)e) \geq 0$$

よって (11) の右辺の source term は $\in K$ である。残りは補題1の証明と同じである。

と (8) で定義した作用素 H を考えよう。

補題3. $u_0 \in K_c, u(t) \in K_c \Rightarrow H[u] \in K_c$

証明. [Q-3] より

$$H[u] \leq U(t, 0; u) u_0 + \int_0^t U(t, s; u) [Q_2[u(s)] u(s) + C S[u(s)]] ds$$

$u(t) \in K_c$, かつ $0 \leq u(t) \leq Ce$ より,

$$H[u] \leq U(t, 0; u) u_0 + C \int_0^t U(t, s; u) R_2[u(s)] ds$$

一方 (9) の両辺を $R_2[u(s)]$ に施したものを s について $[0, t]$ で積分すると, 積分順序の交換により

$$\begin{aligned} \int_0^t U(t, s; u) R_2[u(s)] ds &= \int_0^t E(t-s) R_2[u(s)] ds - \int_0^t E(t-s) R_2[u(s)] \times \\ &\quad \times \int_0^s U(s, s'; u) R_2[u(s')] ds' \end{aligned}$$

即ち $v(t) = e - \int_0^t U(t, s; u) R_2[U(s)] ds$ とおけば

$$v(t) = e - \int_0^t E(t-t') R_2[U(t')] v(t') dt'$$

を得る。一方 $s=0$, $f(t, s) = E(t)e$ とした (10) の解は $U(t, 0; u) e$ であるから、補題 2 により $v(t) \geq U(t, 0, u) e$ を得る。
 よって

$$H[U] \leq U(t, 0; u) u_0 + c(e - U(t, 0, u) e) \leq ce$$

すなわち $u_0 \in K_c$ と補題 1 を用いた。又 $H[U] \geq 0$ は (P) と補題 1 から得られるから補題の証明終り。

[定理 1 の証明] (7) において $u^0 = 0 \in K_c$ だから、補題 3 から u^n の $n \geq 0$ に対し $u^n \in K_c$ がわかる。これは R_2 の局所 Lipschitz 性より、 $u_n \in C_t^0([0, \infty); K_c)$ と、任意の t の有限区間で一様に

$$u_n(t) \longrightarrow \exists u(t) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{in } X$$

となることは、通常の議論から従う。 $u(t)$ は (5) $\Leftrightarrow u = H[U]$ の唯一つの解であることもわかる。 K_c の閉性より $u(t) \in K_c$ 。(証了)

§ 3. Boltzmann 型方程式

$Q[U]$ が (3) で与えられる方程式 (1) を考えよう。少し一般化して、 n 次元空間で考えようとする。 $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n$ 。今の目的には $X = \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^{2n})$, $\|u\| = \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |u(x, \xi)|$, $K = \mathcal{B}_+^0(\mathbb{R}^{2n}) =$

$= \{u(x, \xi) \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^{2n}); u(x, \xi) \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^{2n}\}$ ととればよい。明らかに $e = e(x, \xi) \equiv 1$ で、 $u \leq v$ は $\mathbb{R}^{2n}$ のすべての点での $u(x, \xi) \leq v(x, \xi)$ を意味し、 K に対する §2 の条件はすべて満たされている。

作用素 A は今の場合

$$\begin{cases} Q(A) = \{u \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^{2n}); \sum_{i=1}^n \xi_i u_{\xi_i}(x, \xi) \in \mathcal{B}^0(\mathbb{R}^{2n})\} \\ (Au)(x, \xi) = - \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial x_i} \end{cases}$$

である。容易に

$$E(t)u = e^{tA}u = u(x - t\xi, \xi)$$

であることがわかり、条件 $[A]$ は満たされている。

作用素 Q については、条件 $[Q-1]$ は (3) から

$$[K-1] \quad \begin{cases} \iiint |K(\xi, \xi'; \xi_1, \xi'_1)| d\xi' d\xi_1 d\xi'_1 \leq \exists k_0 < +\infty \\ \iiint |K(\xi_1, \xi'_1; \xi, \xi')| d\xi' d\xi_1 d\xi'_1 \leq \exists k_1 < +\infty \end{cases}$$

は満たされる。 k_0, k_1 は ξ に依らない定数。 $[Q-2]$ は

$$[K-2] \quad K(\xi, \xi'; \xi_1, \xi'_1) \geq 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{4n}$$

は満たされる。 $[Q-3]$ は $[K-1]$ $[K-2]$ の他に

$$[K-3] \quad \iint K(\xi, \xi_1; \xi', \xi'_1) d\xi_1 d\xi'_1 \leq \iint K(\xi_1, \xi'_1; \xi, \xi') d\xi_1 d\xi'_1, \quad \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つことが満たされる。以下その証明

$$Q[Lu] = \iiint K(\xi, \xi'; \xi_1, \xi'_1) u(\xi_1) \{u(\xi'_1) - u(\xi)\} d\xi' d\xi_1 d\xi'_1 +$$

$$+ \int \left\{ \iint \{ k(\xi, \xi_1; \xi', \xi'_1) - k(\xi_1, \xi'_1; \xi, \xi') \} d\xi_1 d\xi'_1 u(\xi') u(\xi) d\xi' \right.$$

であるから, $u \in K_c = \{ u \in \mathcal{B}^0; 0 \leq u(x, \xi) \leq c, \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n \}$ とすれば [k-2] [k-3] より上式^{右辺}の最後の項は落ち, 中1項の $\{ \}$ の $u(\xi')$ は c で置き代える = とかできず,

$$Q[u] \leq (c - u(\xi)) \iiint k(\xi, \xi'; \xi_1, \xi'_1) u(\xi_1) d\xi' d\xi'_1 d\xi_1$$

最後の積分作用素が $S[u]$ である。よって定理1から直ちに

定理2. 条件 [k-1], [k-2], [k-3] の下で, 方程式⁽³⁾(1)に対応する積分方程式(5)は任意の初期値 $u_0 \in \mathcal{B}_+^0(\mathbb{R}^{2n})$ に対し唯一つの解 $u(t) \in C_t^0([0, \infty); \mathcal{B}_+^0(\mathbb{R}^{2n}))$ を持つ。さらに $\|u(t)\| \leq \|u_0\|$ である。

今の場合 $c = \|u_0\|$ ととればよいことは明らかであろう。

外力がある場合や, 反射壁や吸収壁を持つ容器の中にある気体についても定理2は成り立つ。又 $A = -\Delta$ についても同様である。いずれの場合も条件[A]が成り立つていふからである。

条件[k-3]は, 若干の離散的な場合の山田-三井 [6] のうちの拡張である。

参考文献

- [1] Carleman, I.; "Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz." Uppsala 1954.
- [2] Morgenstern, D.; J. Rational Mech. Anal., 4, 533-555 (1955).
- [3] Orkergel, L.; Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 1-34 (1972).
- [4] Grad, H.; Proc. Amer. Math. Soc. Symposium on Applications of Partial Differential Equations, New York, April, 154-182 (1964).
- [5] Glikson, A.; Arch. Rat. Mech. Anal. 45, 35-46 (1972).
- [6] Mimura, M.; 本講究録.