

東大・理 大阿久 俊則 (Toshinori Ôaku)

§0. 序. 超函数 (hyperfunction) に対する非特性境界値問題は小松-河合 [8] により定式化され, 非特性的な境界の片側で定義された, 線型偏微分方程式の零解であるような超函数は, 境界上の超函数としての「境界値」を持つことが示された. 簡単のため,  $M$  を  $\mathbb{R}^n$  ( $\exists x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ) の開集合として,  $\dot{M}_+ = \{x \in M; x_1 > 0\}$ ,  $N = \{x \in M; x_1 = 0\}$  と置こう.  $P$  を  $M$  上で定義された解析的係数の  $m$  階線型偏微分作用素<sup>Y</sup> とすると,  $Pu(x) = 0$  を満たす任意の  $\dot{M}_+$  上の超函数  $u(x)$  に対して「境界値」 $v_j(x') = (\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$  ( $j = 0, 1, \dots, m-1$ ) が  $N$  上の超函数として定まる. また, 局所的には (即ち,  $N$  の近傍と  $\dot{M}_+$  の共通部分では)  $u(x)$  は  $v_0(x')$ ,  $\dots$ ,  $v_{m-1}(x')$  から unique に定まる. (即ち,  $v_0 = \dots = v_{m-1} = 0$  ならば  $u(x) = 0$ .) [8] では Cauchy-Kowalevsky の定理の双対を用いて境界値が定義されており, 具体的な意味は余り明ら

かでなかったが，片岡 [5,6,7] は mild な超函数という概念を導入し，境界値の意味を定義函数を用いて具体的に明らかにすると同時に，境界値の概念を超局所化して回折現象における解析的特異性の伝播の研究等に応用した．特に [5] によれば上の様な超函数  $u(x)$  は境界  $N$  に沿って mild となり，境界値  $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$  が任意の  $j = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $N$  上の超函数として well-defined である．

さて，我々は  $N$  が  $P$  に関して特性的な場合として， $P$  が  $x_1$  に関して Baouendi-Goulaouic [1] の意味で Fuchs 型の場合を考察する．この場合はもはや上記の  $u(x)$  は  $N$  に沿って mild とは限らず（自然な意味の） $u(x)$  の境界値  $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$  は一般には定義できない．そこで我々は境界値が自然に定義できるような超函数のクラスとして  $F$ -mild 超函数という概念を導入し，その枠内で Fuchs 型偏微分作用素に対する境界値問題がうまく定式化できることを示す．即ち， $P$  が [1] の意味で weight  $m-l$  の Fuchs 型作用素（ $N$  に関して）で  $u(x)$  は  $Pu(x) = 0$  をみたす  $\dot{M}_+$  上の超函数であって  $N$  に沿って  $F$ -mild とすると，境界値  $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x')$  は任意の  $j = 0, 1, 2, \dots$  に対して  $N$  上の超函数として well-defined であり，かつ  $u(x)$  は局所的には  $(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x') \quad (0 \leq j \leq m-l-1)$  達により決定される．更に  $P$  が  $\dot{M}_+$  で  $x_1$  方向に弱双曲型であれば， $N$  上の任意の超

函数達  $v_0(x'), \dots, v_{m-k-1}(x')$  に対して,  $Pu(x) = 0$ ,

$(\partial/\partial x_1)^j u(+0, x') = v_j(x') \quad (0 \leq j \leq m-k-1)$  をみたす超函数  $u(x)$  で  $N$  に沿って  $F$ -mild であるものが,  $N$  のある近傍と  $M_+$  の共通部分の上で一意的に存在する. (但し, 以上では,  $P$  の特性指数は  $m-k$  以上の整数値をとるなにと仮定しておく.)

$F$ -mild 超函数は mild な超函数の拡張となっており, 境界値 ( $N$  への) が定義函数の ( $N$  の複素化への) 制限<sup>Y</sup>として自然<sup>の  $M$  への境界値</sup>に定義できるような超函数と言ってよい. mild な超函数の理論 [5, 7] はコホモロジー理論等も用いられやや難解な所もあるが,  $F$ -mild 超函数の理論は (通常の超函数とマイクロ函数の理論を既知とすれば) 正則函数の曲面波分解 (cf. 片岡 [4], 金子 [2]) という初等的かつ具体的な方法のみを使って構成することができる. 本稿で述べる結果の多くは, [9] に証明されているが, そこでは証明を短くするためもあり mild な超函数の理論を何ヶ所かで援用している. そこで本稿では  $F$ -mild 超函数及びそれを用いた Fuchs 型境界値問題の理論が, mild な超函数の理論と従来の境界値問題の理論とは独立に, 比較的初等的に構成できることを示すことを目標としたい.

§1.  $F$ -mild 超函数. 以下では簡単のため,  $M = \mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x') = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $M_+ = \{x \in M; x_1 \geq 0\}$ ,

$N = \{x \in M; x_1 = 0\}$  とおく. (後で述べるように実は F-mild 超関数は座標系によらず well-defined なので, 局所的な問題を考える限り, こうしても一般性は失われな. ) として,

$\dot{M}_+$  ( $M_+$  の内部) から  $M$  への自然な埋め込み写像を  $\iota$  と書き  $N$  上の層  $\mathcal{B}_{N|M_+}$  を  $\mathcal{B}_{N|M_+} = (\iota_* \iota^{-1} \mathcal{B}_M)|_N$  により定義する ( $\mathcal{B}_M$  は  $M$  上の超関数の層).  $\dot{x} = (0, x') \in N$  とすると,  $f$  が  $\mathcal{B}_{N|M_+}$  の  $\dot{x}$  における germ であるとは,  $f$  がある  $\varepsilon > 0$  に対して  $\{x \in \dot{M}_+; |x - \dot{x}| < \varepsilon\}$  で定義された超関数であることである. 我々は F-mild 超関数の層  $\mathcal{B}_{N|M_+}^F$  (以下では単に  $\mathcal{B}^F$  と書く) を  $\mathcal{B}_{N|M_+}$  の部分層として次の様に定義する.

定義 1.  $f(x)$  を  $\mathcal{B}_{N|M_+}$  の  $\dot{x}$  における germ とする.  $f(x)$  が  $\dot{x}$  において F-mild であるとは, ある  $\varepsilon > 0$  に対して  $\{x \in \dot{M}_+; |x - \dot{x}| < \varepsilon\}$  上で  $f(x)$  が次の様な一つの境界値表示を持つことと定義する:

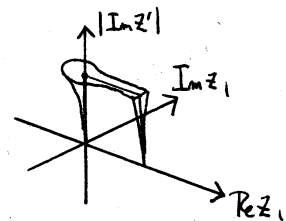
$$f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x_1, x' + \sqrt{1-x_1^2} \Gamma_j 0);$$

ここで  $J$  は自然数,  $\Gamma_j$  達は  $\mathbb{R}^{n-1}$  の (原点を頂点とする) 開凸錐, 各  $F_j(z)$  は

$$D_+(\dot{x}, \Gamma_j, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z = (z_1, z') \in \mathbb{C}^n; |z - \dot{x}| < \varepsilon, \operatorname{Re} z_1 \geq 0, \right. \\ \left. \operatorname{Im} z_1 = 0, \operatorname{Im} z' \in \Gamma_j \right\}$$

の ( $\mathbb{C}^n$  における) 近傍で正則な関数である.

$N$  の開集合  $U$  に対して,



$\mathring{\mathcal{B}}^F(U) = \{f(x) \in \mathcal{B}_{N|M+}(U); f(x) \text{ は } U \text{ の各点で } F\text{-mild}\}$   
 とおく.  $\mathring{\mathcal{B}}^F$  は明らかに  $\mathcal{B}_{N|M+}$  の部分層となる.  $\mathcal{B}_{N|M+}$  を  
 mild な超函数の層とすると,

$$\mathring{\mathcal{B}}_{N|M+} \subsetneq \mathring{\mathcal{B}}_{N|M+}^F \subsetneq \mathcal{B}_{N|M+}$$

という包含関係が成り立つ. ([9] の §1 の Example を参照)

次の 2 つの補題が我々の議論の基礎となる;

補題 1.  $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐,  $\varepsilon > 0$  として,  $F(z)$  を  
 $D_+(0, \Gamma, \varepsilon)$  の近傍で正則な函数とする. このとき,  $\overline{\Gamma'} \cap S^{n-2}$   
 $\subset \Gamma$  となる任意の開凸錐  $\Gamma' \subset \Gamma$  に対して, ある  $c > 0$   
 が存在して,  $F(z)$  は

$\{z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}^n; |z| < c, y_1^2 < c|y'|^2(x_1 + c|y'|^2), y' \in \Gamma'\}$   
 で正則となる.

証明.  $F(w_1, z')$  は  $\{(w_1, z') \in \mathbb{C}^n; |w_1| < \sqrt{\varepsilon/2},$   
 $|z'| < \varepsilon/2, \operatorname{Im} w_1 = 0, \operatorname{Im} z' \in \Gamma\}$  で正則となる. Bochner の  
 定理により, ある  $\delta > 0$  が存在して  $F(w_1, z')$  は

$\{(w_1, z') \in \mathbb{C}^n; |w_1| < \sqrt{\delta}, |z'| < \delta, |\operatorname{Im} w_1| < \delta |\operatorname{Im} z'|,$   
 $\operatorname{Im} z' \in \Gamma'\}$  で正則となる. これと  $F(w_1, z')$  は  $w_1 = 0$  な  
 る点の近傍でも正則となることから結論が得られる.

補題 2.  $f(x)$  を  $N$  の開集合  $U$  上の  $F$ -mild 超函数とすると  
 $f(x_1^2, x')$  は  $U$  の  $M$  における近傍で定義された  $x_1$  を実解析パ  
 ラメータとする超函数として well-defined である.

証明.  $\dot{x} \in U$  の近傍と  $\dot{M}_+$  の共通部分で

$$f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x_1, x' + \sqrt{-1} \Gamma_j 0)$$

と表示されているとしてよい; ここで,  $\Gamma_j$  達は  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐,

$F_j(z)$  は  $D_+(\dot{x}, \Gamma_j, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) の近傍で正則な函数である.

そこで,  $f(x_1^2, x')$  を ( $x = \dot{x}$  の  $M$  における近傍で)

$$f(x_1^2, x') = \sum_{j=1}^J F_j(x_1^2, x' + \sqrt{-1} \Gamma_j 0)$$

により定義しよう.  $x_1 \neq 0$  の所では,  $f(x_1^2, x')$  は '代入' として定義函数のとり方によらず well-defined である. また, 上の様に定義した  $f(x_1^2, x')$  は  $x_1$  を実解析パラメータに持つので超函数に対する Holmgren の定理から  $f(x_1^2, x')$  は  $\dot{x}$  の近傍で定義函数のとり方によらず well-defined である. この議論を各  $\dot{x}$  において行なうと Holmgren の定理を使って貼り合わせれば証明が完了する.

命題 1.  $F$ -mild という性質は座標系のとり方によらない.

従って, 一般に実解析的な境界を持つ実解析多様体に対して,

その境界上に  $F$ -mild 超函数の層が定義される.

これは補題 1 から実際に計算して確かめられる.

\*命題 2.  $F$ -mild 超函数の層は  $N$  上の軟層 (soft sheaf) である.

証明.  $x_1$  を実解析パラメータとする超函数の層を  $\mathcal{B}^a$  と書こう.  $Z$  を  $N$  の閉集合として,  $f(x) \in \mathcal{B}^F(Z)$  とすると, 補題 2 により,  $f(x_1^2, x') \in \Gamma(Z; \mathcal{B}^a|_N)$  とみなせる.

$\mathcal{B}^a|_N$  は  $N$  上の soft sheaf (金子) なので, ある  $g(x) \in \Gamma(N; \mathcal{B}^a|_N)$  が存在して,  $g(x)$  の  $\mathbb{Z}$  への制限は  $f(x_1^2, x')$  と一致する.

$$h(x) = \frac{1}{2} (g(x_1, x') + g(-x_1, x'))$$

とおくと,  $h|_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2} (f(x_1^2, x') + f((-x_1)^2, x')) = f(x_1^2, x')$ .

$h(x) = \tilde{f}(x_1^2, x')$  となるような  $\tilde{f}(x) \in \mathcal{B}^F(N)$  が存在することを示そう.  $\tilde{f}$  は存在すれば局所的にも一意的 ( $x_1 > 0$  の部分で考えているので) だから,  $N$  の各点  $\dot{x}$  において  $\tilde{f}$  を構成すればよい. さて,  $\dot{x}$  の近傍で

$$h(x) = \sum_{j=1}^J H_j(x_1, x' + \sqrt{t} \Gamma_j 0)$$

と表示されているとしよう. ここで  $\Gamma_j$  は  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐,  $H_j$  は  $\{z \in \mathbb{C}^n; |z - \dot{x}| < \varepsilon, z_1 = x_1 \in \mathbb{R}, \operatorname{Im} z' \in \Gamma_j\}$  ( $\varepsilon > 0$ ) の近傍で正則な函数である.  $h(-x_1, x') = h(x)$  だから,

$$h(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J (H_j(x_1, x' + \sqrt{t} \Gamma_j 0) + H_j(-x_1, x' + \sqrt{t} \Gamma_j 0)).$$

ある  $0 < \delta \leq \varepsilon$  と  $D(\dot{x}, \Gamma_j, \varepsilon)$  の近傍で正則な函数  $G_j(z)$  が存在して,  $G_j(z_1^2, z') = \frac{1}{2} (H_j(z) + H_j(-z_1, z'))$  が成立する. そこで

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^J G_j(x_1, x' + \sqrt{t} \Gamma_j 0)$$

とおけば,  $\tilde{f}(x_1^2, x')|_{\mathbb{Z}} = h(x)|_{\mathbb{Z}} = f(x_1^2, x')$ , 従って

$$\tilde{f}(x)|_{\mathbb{Z}} = f(x) \text{ となり, } \tilde{f} \text{ は } f \text{ の } N \text{ への拡張である. (証了)}$$

\* 命題 2 は金子晃先生の御示唆によるものであり, この場を借りて感謝致します.

定義 2. (境界値)  $f(x)$  を  $N$  の開集合  $U$  上で定義された  $F$ -mild 超関数 とするとき,  $f(x)$  の境界値  $f(+0, x') \in \mathcal{B}_N(U)$  を,  $x_1$  を実解析パラメータ とする超関数  $f(x_1^2, x')$  の  $N$  への制限として定義する.

注意.  $f(x)$  が  $f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x_1, x' + \sqrt{1} \Gamma_j 0)$  と表示される  
とき,  $f(+0, x') = \sum_{j=1}^J F_j(0, x' + \sqrt{1} \Gamma_j 0)$  となることは明らかである.

次に  $F$ -mild 超関数の特異スペクトルを定義するためにいくつかの記号を導入する.  $\sqrt{1}S^*M$ ,  $\sqrt{1}S^*N$  をそれぞれ  $M$  と  $N$  の純虚余接球束として,  $\pi_M: \sqrt{1}S^*M \rightarrow M$ ,  $\pi_N: \sqrt{1}S^*N \rightarrow N$ ,  $p: \sqrt{1}S^*M|_N \setminus \sqrt{1}S_N^*M \rightarrow \sqrt{1}S^*N$  をそれぞれ標準的な射影とする. 通常の超関数の特異スペクトルを  $SS$  で表わす.

定義 3. ( $p$ -特異スペクトル)  $f(x)$  を  $N$  の開集合  $U$  上の  $F$ -mild 超関数 とするとき, その  $p$ -特異スペクトル  $p\text{-}SS(f)$  を  $\pi_N^{-1}(U) \subset \sqrt{1}S^*N$  の閉部分集合として

$$p\text{-}SS(f) = p(SS(u(x_1^2, x')) \cap (\sqrt{1}S^*M|_N \setminus \sqrt{1}S_N^*M))$$

により定義する.

$$\text{さて, } \langle z', \{z'\} \rangle = z_2 \{z_2\} + \dots + z_m \{z_m\}, \quad z'^2 = z_2^2 + \dots + z_m^2$$

とおき,  $W(z', \{z'\})$  を次で定義する:  $(z' = (z_2, \dots, z_m), \{z'\} = (\{z_2\}, \dots, \{z_m\}) \in S^{m-2})$

$$W(z', \{z'\}) = \frac{(m-2)!}{(-2\pi\sqrt{1})^{m-1}} \frac{(1 - \sqrt{1}\langle z', \{z'\} \rangle)^{m-3} \{1 - \sqrt{1}\langle z', \{z'\} \rangle - (z'^2 - \langle z', \{z'\} \rangle^2)\}}{\{\langle z', \{z'\} \rangle + \sqrt{1}(z'^2 - \langle z', \{z'\} \rangle^2)\}^{m-1}}.$$

補題 3.  $K$  を  $N$  の compact 部分集合で境界は  $C^2$  級なるものとする.  $f(x)$  は  $K$  上で global に

$$f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x, x' + \sqrt{1} \Gamma_j 0)$$

により定義された  $K$  上の  $F$ -mild 超関数とする; ここで,  $\Gamma_j$  は  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐,  $F_j$  は  $D_+(K, \Gamma_j, \varepsilon) = \bigcup_{x \in K} D_+(x, \Gamma_j, \varepsilon)$  の近傍で正則とする.  $\dot{x} \in K$ ,  $\dot{z}' \in S^{n-2}$  とするとき,  $\sqrt{1} S^* N$  の点  $(\dot{x}, \sqrt{1} \dot{z}')$  が  $p$ -SS( $f$ ) に含まれないための必要十分条件は, 長さが十分小さい任意の  $a_j \in \Gamma_j$  達に対して,

$$F(z; \dot{z}') \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^J \int_{K + \sqrt{1} a_j} F_j(z, w') W(z' - w', \dot{z}') dw'$$

が  $(z, \dot{z}') = (\dot{x}, \dot{z}')$  において解析的となることである.

この補題の証明は初等的ではあるがやや長いので省略する ([9] 参照). この補題から直ちに次の 2 つの命題が得られる:

命題 3.  $f(x)$  を  $\dot{x} \in N$  の近傍で定義された  $F$ -mild 超関数とする. このとき,  $(\dot{x}, \sqrt{1} \dot{z}') \in \sqrt{1} S^* N$  が  $p$ -SS( $f$ ) に含まれないための必要十分条件は,  $\dot{z}' \notin \bigcap_{j=1}^J \Gamma_j^\circ = \{ \dot{z}' \in \mathbb{R}^{n-1}; \langle y', \dot{z}' \rangle \geq 0 \text{ for all } y' \in \Gamma_j \}$  なる  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$  ( $J \in \mathbb{N}$ ) と  $D_+(\dot{x}, \Gamma_j, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) の近傍で正則な関数  $F_j(z)$  が存在して,  $\dot{x}$  の近傍と  $M_+$  の共通部分で

$$f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x, x' + \sqrt{1} \Gamma_j 0)$$

と表示されることである。

命題 4.  $q \geq 1$  を自然数,  $f(x)$  を  $N$  の開集合  $U$  上の  $F$ -mild 超関数とすると,  $p$ -SS( $f(x)$ ) =  $p$ -SS( $f(x)^q, x')$ ).

次の命題は通常の超関数に対する同様の結果と補題 2 から従う。

命題 5.  $K$  を  $N$  のコンパクト部分集合,  $\Gamma$  を  $R^{m-1}$  の開凸錐として,  $f(x)$  は  $K$  の近傍で定義された  $F$ -mild 超関数で

$p$ -SS( $f$ )  $\cap \pi_N^{-1}(K) \subset K \times \sqrt{1} \Gamma^\circ$  なるものとする。このとき,  $\Gamma' \subset \Gamma$  (即ち,  $\bar{\Gamma}' \cap S^{m-2} \subset \Gamma \cap S^{m-2}$ ) なる任意の開凸錐に対して,  $\varepsilon > 0$  と  $D_+(K, \Gamma', \varepsilon)$  の近傍で正則な関数  $F(z)$  が存在して,  $K$  の近傍と  $\mathring{M}_+$  の共通部分の上で

$$f(x) = F(x_1, x' + \sqrt{1} \Gamma' 0)$$

が成立する。更にこの様な  $F$  は一意的である。

## §2. $F$ -mild 超関数の超局所化.

通常の超関数の層からマイクロ関数の層を定義する (cf. [2]) のと同様の方法で,  $F$ -mild 超関数の層を超局所化して  $F$ -mild microfunctions の層を定義することができる。  $N$  の開集合  $U$ ,  $S^{m-2}$  の開集合  $\Delta$  に対して,  $U \times \sqrt{1} \Delta$  に  $\mathbb{C}$ -加群  $\{f(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(U); p\text{-SS}(f) \cap (\Omega \times \sqrt{1} \Delta) = \emptyset\}$  を対応させる準層に同伴した層を  $\mathcal{L}^* F$  で表わそう。

定義 4. ( $F$ -mild microfunctions)  $\mathring{\mathcal{E}}^F \stackrel{\text{def}}{=} \pi_N^{-1} \mathring{\mathcal{B}}^F / \mathcal{L}^* F$ .

$$\mathcal{B}^A \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}^A|_N, \quad \mathcal{C}^A \stackrel{\text{def}}{=} p! (\mathcal{C}_M|_{\sqrt{1}S^*M}|_N \leftarrow \sqrt{1}S^*M)$$

と置く. ( $\mathcal{C}_M$  はマイワロ函数の層)  $\mathcal{C}_M$  の flabbiness から次の補題が従う.

補題 4. (cf. [2]) (i)  $K$  を  $N$  の閉集合,  $\Delta$  を  $S^{n-2}$  の compact 集合とするとき,

$$\mathcal{C}^A(K \times \sqrt{1}\Delta) = \mathcal{B}^A(K) / \{f \in \mathcal{B}^A(K); ss(f) \cap p^{-1}(K \times \sqrt{1}\Delta) = \emptyset\}$$

が成立する. 特にスペクトル写像  $sp: \pi_N^{-1}\mathcal{B}^A \rightarrow \mathcal{C}^A$  は全射.

(ii)  $\mathcal{C}^A$  は  $\sqrt{1}S^*N$  上の soft sheaf.

命題 6.  $K$  を  $N$  の閉集合,  $\Delta$  を  $S^{n-2}$  の compact 集合とするとき,

$$\mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{1}\Delta) = \mathring{\mathcal{B}}^F(K) / \{f \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K); p\text{-}ss(f) \cap K \times \sqrt{1}\Delta = \emptyset\}.$$

証明.  $0 \rightarrow \{f \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K); p\text{-}ss(f) \cap K \times \sqrt{1}\Delta = \emptyset\} \rightarrow \mathring{\mathcal{B}}^F(K) \rightarrow \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{1}\Delta)$

が完全列であることは明らかなので,  $\mathring{\mathcal{B}}^F(K) \rightarrow \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{1}\Delta)$

が全射であることを示せばよい. 層準同型  $\mathring{\mathcal{B}}^F \ni f(x) \mapsto$

$f(x_1^2, x') \in \mathcal{B}^A$  は単射層準同型  $\mathring{\mathcal{C}}^F \rightarrow \mathcal{C}^A$  を引き起

こす.  $u(x) \in \mathring{\mathcal{C}}^F(K \times \sqrt{1}\Delta)$  とすると,  $u(x_1^2, x') \in \mathcal{C}^A(K \times \sqrt{1}\Delta)$

が well-defined. 補題 4 により, ある  $g(x) \in \mathcal{B}^A(K)$  が存在し

て,  $u(x_1^2, x') = sp(g(x))|_{K \times \sqrt{1}\Delta} = \frac{1}{2}sp(g(x) + g(-x_1, x'))|_{K \times \sqrt{1}\Delta}$

となる. 命題 2 の証明と同様にして,  $h(x_1^2, x') = \frac{1}{2}(g(x) +$

$g(-x_1, x'))$  とする  $h(x) \in \mathring{\mathcal{B}}^F(K)$  をとれる.  $sp(h(x_1^2, x'))$

$= u(x_1^2, x')$  on  $K \times \sqrt{1}\Delta$  から,  $sp(h(x))|_{K \times \sqrt{1}\Delta} = u(x)$

を得る. (証了)

系  $0 \rightarrow \mathcal{Q}_M|_N \longrightarrow \mathcal{B}^F \longrightarrow \pi_{N*} \mathcal{E}^F \rightarrow 0$  は完全列.

証明. 命題5より,  $f \in \mathcal{B}^F_x$  に対して,  $p\text{-}ss(f) \cap \pi_N^{-1}(x) = \emptyset$  と  $f \in \mathcal{Q}_M|_x$  が同値であることを注意すれば, 命題6で  $\Delta = S^{n-2}$  とおくことにより上の完全列が得られる.

命題7.  $\mathcal{E}^F$  は  $\sqrt{S^*N}$  上の soft sheaf である.

証明.  $Z$  を  $\sqrt{S^*N}$  の閉集合とし,  $u(x) \in \Gamma(Z; \mathcal{E}^F)$  とすると,  $u(x_1^2, x') \in \Gamma(Z; \mathcal{E}^A)$ .  $\mathcal{E}^A$  は soft sheaf なので  $\exists v(x) \in \Gamma(\sqrt{S^*N}; \mathcal{E}^A)$  such that  $v|_Z = u(x_1^2, x')$ .

補題4により, ある  $g(x) \in \mathcal{B}^A(N)$  が存在して,  $\mathcal{M}(g) = v$ .

$h(x_1^2, x') = \frac{1}{2}(g(x) + g(-x_1, x'))$  なる  $h(x) \in \mathcal{B}^F(N)$  が存在する.  $Z$  上で  $\mathcal{M}(h(x_1^2, x')) = \frac{1}{2}(v(x) + v(-x_1, x'))$

$= v(x) = u(x_1^2, x')$  が成立するので,  $Z$  上で

$\mathcal{M}(h(x)) = u(x)$  が成立する. (証了)

### §3. コンパクト台の F-mild 超函数と解析汎函数.

$R > 0$  とし,  $B_R = \{x' \in N; |x'| \leq R\}$  とおく. また,  $\mathbb{C}^{n-1}$  の部分集合  $K$  と  $\delta > 0$  に対して  $K_\delta = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1}; \text{dist}(z', K) < \delta\}$  ( $K$  の複素  $\delta$ -近傍) とおく.  $\mathbb{C}^{n-1}$  の有界開集合  $\Omega$  に対して,  $\mathcal{O}_c(\Omega) = \{f(z) \in C^0(\bar{\Omega}); f(z) \text{ は } \Omega \text{ で正則}\}$  とおく.  $\mathcal{O}_c(\Omega)$  はノルム  $\|f\| = \sup_{z' \in \bar{\Omega}} |f(z')|$  により Banach 空間となる. さらに,  $F(\Omega)$  により  $\mathcal{O}_c(\Omega)$  における  $\mathcal{O}(\mathbb{C}^{n-1})$

( $\mathbb{C}^{n-1}$  上の整函数全体) の閉包を表わそう.  $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}^{n-1}$  を 2 つの連結有界開集合とすると,  $F(\Omega_2) \subset F(\Omega_1)$ ,  $F'(\Omega_1) \subset F'(\Omega_2)$  とみなせる.

$f(x)$  を  $N$  上の  $F$ -mild 超函数で  $\text{supp } f$  ( $f$  の台) が  $\overset{\circ}{B}_R$  に含まれるものとする,  $f(x_1)$  は  $\{x \in M; 0 < x_1 < \varepsilon\}$  上定義された  $x_1$  を実解析パラメータに持つ超函数で  $\text{supp } f \subset (0, \varepsilon) \times \overset{\circ}{B}_R$  なるものとみなせる. 従って,  $\varphi(x') \in \mathcal{D}(B_R)$  に対して,

$$\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x') \varphi(x') dx'$$

は  $(0, \varepsilon)$  上の実解析函数となる.

命題 8. 以上の仮定のもとで, 任意の  $\delta > 0$  に対して,  $f(x_1, \cdot)$  は上記の pairing で  $F'((B_R)_\delta)$ -値の正則函数として  $x_1 = 0$  の ( $\mathbb{C}$  における) 近傍へ接続される.

証明.  $\mathcal{D}F$  の softness (命題 7) と命題 6, 命題 5 を用いると,  $\mathbb{R}^{n-1}$  の開凸錐  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_J$  と  $\varepsilon > 0$ ,  $D_+(B_R, \Gamma_j, 2\varepsilon)$  の近傍で正則な函数  $F_j(z)$  が存在して,  $(B_R)_{2\varepsilon} \cap \dot{M}_+$  上で

$$f(x) = \sum_{j=1}^J F_j(x_1, x' + \sqrt{-1} \Gamma_j 0)$$

が成立する. 十分小さな  $a_j \in \Gamma_j$  ( $j=1, \dots, J$ ) を固定して,

$$F(z; \zeta') = \sum_{j=1}^J \int_{B_{R+\varepsilon} + \sqrt{-1} a_j} F_j(z_1, w') W(z' - w', \zeta') dw'$$

とおくと, 補題 3 により,  $F(z; \zeta')$  は  $(z, \zeta') \in \{0\} \times \partial B_R \times S^{n-2}$

の近傍で解析的である.  $\Delta_1, \dots, \Delta_m$  を  $\mathbb{R}^{n-1}$  の固有凸閉錐で,  
 $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_m = \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $|\Delta_j \cap \Delta_k| = 0$  ( $j \neq k$ ) なるものとし,

$$G_k(z) = \int_{\Delta_k \cap S^{n-2}} F(z; \zeta') d\sigma(\zeta')$$

とおく ( $d\sigma(\zeta')$  は  $S^{n-2}$  上の体積要素) と, 任意の  $V_k \subset \Delta_k^\circ$

なる開凸錐  $V_k$  に対して,  $\delta > 0$  が存在して,  $G_k(z)$  は

$$D_+(B_R, V_k, \delta) \cup \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < \delta, \text{dist}(z', \partial B_R) < \delta\}$$

で正則となり,  $f(x) = \sum_{k=1}^m G_k(x_1, x' + \sqrt{1} V_k 0)$  が成立する.

補題 1 により,  $G_k(z)$  は (必要なる  $\delta > 0$  を取り直して)

$$\{z = x + \sqrt{1} y \in \mathbb{C}^n; |z| < \delta, \text{dist}(z', B_R) < \delta, x_1 > -\delta |y'|^2,$$

$$|y_1| < \delta |y'|^2, y' \in V_k\}$$

で正則となる.  $0 < \lambda < \delta/4$  と

仮定してより,  $C^2$ -写像  $\varepsilon_k: B_R \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  を

$$(i) \quad \varepsilon_k(x') = 0 \quad \text{for } x' \in \partial B_R,$$

$$(ii) \quad \varepsilon_k(x') \in V_k, \quad |\varepsilon_k(x')| \leq \lambda/2 \quad \text{for } x' \in \overset{\circ}{B}_R,$$

$$(iii) \quad |\varepsilon_k(x')| = \lambda/2 \quad \text{for } x' \in B_R \setminus B_{R-\frac{\delta}{2}}$$

をみたすようにとり,  $\gamma_k = \{x' + \sqrt{1} \varepsilon_k(x'); x' \in B_R\}$  と

おく. 超関数の積分の (定義函数を用いた) 定義から,  $\varphi(x')$

$\in F((B_R)_\lambda) = \mathcal{O}_c((B_R)_\lambda)$  に対して

$$\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} G_k(x_1, w') \varphi(w') dw'$$

が成立する. この右辺の表示は  $x_1 = z_1$  を複素変数として,

$$\{z_1 = x_1 + \sqrt{1} y_1 \in \mathbb{C}; |z_1| < \delta/4, x_1 > -\delta \lambda^2/4, |y_1| < \delta \lambda^2/4\}$$

上で正則であり, 命題 8 の結論を得る. (証了)

次に,  $f(x)$  の  $p$ -特異スペクトルが解析汎函数の支え (carrier) を用いて記述できることを示そう.

$$\Phi(z', \zeta') = \langle z', \zeta' \rangle + \sqrt{1 - \langle z', \zeta' \rangle^2}$$

とおき,  $w' \in \mathbb{C}^{n-1}$  と  $\zeta' \in S^{n-2}$  に対して,  $\mathbb{C}^{n-1}$  の開集合  $U(w', \zeta')$  を  $U(w', \zeta') = \{z' \in \mathbb{C}^{n-1}; \operatorname{Im} \Phi(w' - z', \zeta') > -(\operatorname{Re} \Phi(w' - z', \zeta'))^2\}$  により定義する.  $\zeta' \in S^{n-2}$  と  $\Delta, r > 0$  に対して,

$$V(\zeta', \Delta, r) = (B_R)_\Delta \cap \operatorname{int} \left( \bigcap_{(w', \zeta') \in K_r} U(w', \zeta') \right),$$

$$K_r = \{(w', \zeta') \in \mathbb{C}^{n-1} \times S^{n-2}; |w'| \leq r, |\zeta' - \zeta| \leq r\} \text{ とおく.}$$

$V(\zeta', \Delta, r)$  は  $\mathbb{C}^{n-1}$  の多項式凸な開集合である.

命題 9.  $f(x)$  は台が  $\dot{B}_R$  に含まれる  $N$  上の  $F$ -mild 超函数とすると, 次の (i) ~ (iii) は同値である:

(i)  $(0, \sqrt{1} \zeta') \notin p\text{-SS}(f)$

(ii) 任意の  $\Delta > 0$  に対しある  $r > 0$  が存在して,  $f(x_1, \cdot)$  は  $F'(V(\zeta', \Delta, r))$ -値の正則函数として,  $x_1 = 0$  のある複素近傍へ解析接続される.

(iii) ある  $\Delta, r > 0$  が存在して,  $f(x_1, \cdot)$  は  $F'(V(\zeta', \Delta, r))$ -値の正則函数として,  $x_1 = 0$  のある複素近傍へ解析接続される.

この命題の証明には, 命題 8 の証明で用いた  $\langle f(x_1, \cdot), \varphi \rangle$  の具体的表示と,  $\delta$  函数の曲面波分解の公式を用いる. 詳しくは [9] の Prop. 8 の証明を参照されたい.

#### §4. Fuchs型偏微分方程式に対する境界値問題.

$D_j = \partial/\partial x_j$ ,  $D = (D_1, D_2, \dots, D_n) = (D_1, D')$ ,  $D' = (D_2, \dots, D_n)$  という記号を用いる.  $P$  を  $\dot{x} = (0, x') \in N$  の  $M$  における近傍で定義された (複素数値) 実解析関数を係数とする線型偏微分作用素とする.  $P$  が  $N$  に関して weight  $(m-k)$  の Fuchs 型作用素であるとは,  $P$  が 0 となるない実解析関数倍を除いて次の様に書けることである (cf. Baouendi-Goulaouic [1]):

$$P = x_1^k D_1^m + A_1(x, D') x_1^{k-1} D_1^{m-1} + \dots + A_k(x, D') D_1^{m-k} \\ + A_{k+1}(x, D') D_1^{m-k-1} + \dots + A_m(x, D');$$

- ここで, (i)  $k, m$  は  $0 \leq k \leq m$  なる整数,  
(ii)  $1 \leq j \leq m$  のとき,  $A_j(x, D')$  の階数は高々  $j$ ,  
(iii)  $1 \leq j \leq k$  のとき,  $A_j(0, x', D')$  の階数は 0 (i.e. 函数).  
 $A_j(0, x', D') = a_j(x')$  ( $1 \leq j \leq k$ ) とおいて  $c(\lambda, x')$  を
- $$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x')\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) \\ + \dots + a_k(x')\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)$$

により定義する.  $c(\lambda, \dot{x}') = 0$  の根を  $\lambda = 0, \dots, m-k-1$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  (重根は重複度の数だけ並べる) と書き,  $P$  の  $\dot{x}$  における特性指数と呼ぶ. Fuchs 型という概念や特性指数は, 座標系によらず  $N$  のみから定まるので, 一般に  $M$  の実解析的超曲面に対して定義されることを注意しておく. (cf. [1])

定理 1.  $\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z}; \nu \geq m-k\}$  ( $j=1, \dots, k$ ) と仮定

する.  $u(x)$  は  $\dot{x}$  の近傍で定義された  $F$ -mild 超関数で,  
 $(\dot{x}, \sqrt{-1} \dot{z}') \notin p\text{-}SS(\mathbb{P}^n)$ ,  $(\dot{x}, \sqrt{-1} \dot{z}') \notin SS(D_1^{\dot{z}'} u(+0, x'))$   
 $(0 \leq j \leq m-k-1)$  とある. ( $\dot{z}'$  は  $S^{m-2}$  の点.) このとき,  
 $(\dot{x}, \sqrt{-1} \dot{z}') \notin p\text{-}SS(m)$  が成立する.

証明.  $R > 0$  を十分小さくとり,  $B_R \cap N$  の各点における  
 $P$  の特性指数が定理の条件を満たすとしておく. (最初から  
 $\dot{x} = 0$  としておいてよい.)  $\mathcal{B}^F$  の softness により,  
 $\text{supp } v \subset \dot{B}_R$  なる  $\mathcal{B}^F(N)$  の元  $v$  で  $0$  の近傍で  $v(x) = u(x)$  を満  
 たすものが存在する.  $g(x) = \mathbb{P}v(x)$  とおくと,  $g(x_1, \cdot)$   
 は  $0 \leq x_1 < \exists \varepsilon$  の複素近傍での  $F'(V(\dot{z}', \lambda, r))$ -値の正則函  
 数に接続される.  $v_j = D_1^{\dot{z}'} v(+0, x') \in \mathcal{Q}'(B_R) \cap$   
 $F'(V(\dot{z}', \lambda, r))$  ( $j = 0, \dots, m-k-1$ ) とみなせる.  
 $V(\dot{z}', 2\lambda, r/2) \supset V(\dot{z}', \lambda, r)$  なので,  $V(\dot{z}', 2\lambda, r/2)$   
 $\supset V(\dot{z}', \lambda, r)_\delta$  なる  $\delta > 0$  をとれる. Baouendi-Goulaouic  
 [1] の Theorem 3 により (ここでは  $\mathbb{R}^{m-1}$  の部分集合の場合に書  
 いてあるが, その証明は  $V(\dot{z}', \lambda, r)$  の場合にもそのまま通  
 用する),  $x_1 = 0$  の複素近傍で定義された  $F'(V(\dot{z}', \lambda, r)_\delta)$   
 -値正則関数  $\tilde{v}(x_1, \cdot)$  が存在して,

$$\mathbb{P}\tilde{v} = g, \quad D_1^{\dot{z}'} \tilde{v}(0, \cdot) = v_j \quad (0 \leq j \leq m-k-1)$$

を満たす. このような  $\tilde{v}$  は一意的なので,  $v(x_1, \cdot) =$   
 $\tilde{v}(x_1, \cdot)$  は  $F'(V(\dot{z}', 2\lambda, r/2))$ -値の正則関数として

$x_1 = 0$  の近傍へ接続される。従って、命題 9 により、

$(0, \sqrt{\zeta}') \notin p\text{-SS}(u)$  即ち、 $(0, \sqrt{\zeta}') \notin p\text{-SS}(u)$  が成立する。(証了)

系.  $\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z}; \nu \geq m-k\} \quad (1 \leq j \leq k)$  とする。 $u(x)$  を  $\dot{x}$  の近傍で定義された  $F$ -wild 超関数で、 $Pu(x) = 0$ ,  
 $D_1^j u(+0, x') = 0 \quad (0 \leq j \leq m-k-1)$  をみたすとする。  $\dot{x}$  の近傍で  $u(x) = 0$  が成立する。

証明. 定理 1 により、 $p\text{-SS}(u) \cap \pi_W^{-1}(\dot{x}) = \emptyset$  を得るから、 $u(x)$  は  $x_1 = 0$  の  $M$  における近傍で実解析的となる。Fuchs 型方程式に対する Cauchy-Kowalevsky の定理 ([10]) により  $u(x) = 0$  を得る。

最後に境界値問題の局所可解性に関する定理を述べよう。

$P$  は前と同様として、その主シンボルを  $\gamma_m(x, \sqrt{\zeta})$  で表す。

定理 2. ある  $\varepsilon > 0$  が存在して、 $P$  は  $\{x \in \dot{M}_+; |x - \dot{x}| < \varepsilon\}$  で  $x_1$  方向に弱双曲型、即ち、 $x \in \dot{M}_+$ ,  $|x - \dot{x}| < \varepsilon$ ,  $\zeta' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\zeta_1 \neq 0$  のとき、 $\gamma_m(x, \zeta_1, \sqrt{\zeta}') \neq 0$  であるとする。また、 $\lambda_j \notin \{\nu \in \mathbb{Z}; \nu \geq m-k\} \quad (1 \leq j \leq k)$  を仮定する。以上の条件の下で、任意の  $f(x) \in \mathcal{B}_{\dot{x}}^F$  と任意の  $v_0(x'), \dots, v_{m-k-1}(x') \in \mathcal{B}_{N, \dot{x}}$  達に対して、

$$Pu(x) = v(x), \quad D_1^j u(+0, x') = v_j(x') \quad (0 \leq j \leq m-k-1)$$

をみたす  $u(x) \in \mathcal{B}_x^F$  が unique に存在する。

この定理の証明には Fuchs 型方程式に対する Cauchy-Kowalevsky の定理と 柏原 - 河合 [3] による解析接続の論法を用いるが、詳細は別の機会に譲る。(田原 [10] を参照。)

### 文献

- [1] Baouendi, M.S. and Goulaouic, C., Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), 455-475.
- [2] 金子晃, 超函数入門, 上. 東京大学出版会, 1980.
- [3] Kashiwara, M. and Kawai, T., Micro-hyperbolic pseudo-differential operators I, J. Math. Soc. Japan, 27 (1975), 359-404.
- [4] Kataoka, K., On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28 (1981), 331-413.
- [5] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems I, Ibid. 27 (1980), 355-399.
- [6] Kataoka, K., Micro-local theory of boundary value problems II, Ibid. 28 (1981), 31-56.
- [7] Kataoka, K., Some properties of mild hyperfunctions and an application to propagation of micro-analyticity in boundary value problems, Ibid. 30 (1983), 279-297.
- [8] Komatsu, H. and Kawai, T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS 7 (1971), 95-104.
- [9] Ôaku, T., F-mild hyperfunctions and Fuchsian partial differential equations, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

(Group representations and systems of differential equations).

- [10] Tahara, H., Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan. J. Math. 5 (1979), 245-347.