

Gorenstein 局所環の安定イデアルについて

広大理 大石 彰 (Akira Ooishi)

0. 安定イデアル. (R, m, k) を d 次元 Cohen-Macaulay 局所環, I をその m -準素イデアルとする。等式 $\ell(I/I^2) = e(I) + (d-1)\ell(R/I)$ が成立するとき, I は 安定 (stable) であると言う。 R の剰余体が無限体のとき, この条件は $I^2 = IJ$ となるパラメーターイデアル $J \subset I$ が取れることと同値である。

例 1. m が安定であるとき, 即ち等式 $emb(R) = e(R) + d - 1$ が成り立つとき R は 最大埋入次元 (maximal embedding dimension) を持つと言われ Sally 等により良く研究されている。

例 2. $d = 1$, R が解析的不分岐とする。 R の任意の整閉 m -準素イデアルが安定であるとき, R は A_{rf} 環 であると

言う (Lipman)。そのためには、 R の全ての無限近点 (infinitely near point) の局所環が最大埋入次元を持つことが必要十分である。特に seminormal 局所環は Arf 環である。例えば $k[[x_1, \dots, x_n]]/(x_i x_j \mid i \neq j)$, $k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-1}]]$ などは Arf 環で前者は seminormal, 後者は seminormal でない。

例3. $d=1$, R は解析的不分岐で剰余体 k を含むとする。 R の任意の整閉 m -準素イデアルが安定かつ normal であるためには、 R が有限個の $k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-1}]]$ の形の環の貼り合わせになっていることが必要十分である。但し、イデアル I はその全ての巾が整閉であるとき normal であると言う。上の条件は $\bar{p}_a(R) := \ell(m\bar{R}/m) = 0$ なることと同値である。

例4. $d=2$, R が解析的正規とする。 R の任意の整閉 m -準素イデアルが安定かつ normal であるためには R が有理的特異点 (即ち $p_g(R) = 0$) であることが必要十分である (Rees)。

例5. R が d 次元正則局所環のとき, m^r が安定 $\iff r=1$

又は $d \leq 2$ 又は $(d, r) = (3, 2)$ 。

1. 主定理. 安定イデアルについては多くのことが知られている。特に I が安定ならば次数付環 $G(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$ は Cohen-Macaulay 環である (Valla, 1979)。そこで、次に I が安定のとき、 $G(I)$ がいつ Gorenstein 環になるかを問題にする。もし $G(I)$ が Gorenstein 環ならば R は必然的に Gorenstein 環なので、最初から R は Gorenstein 環としてよい。そのとき I がパラメーターイデアルならば $G(I) \cong R/I[x_1, \dots, x_d]$ が Gorenstein 環であることは明白。よって我々の問いに対する答えは次で与えられる：

定理. R が Gorenstein 局所環、 I が R の安定な m -準素イデアルでパラメーターイデアルでないとする。このとき

$$(1) \quad r(G(I)) \leq 2\ell(R/I) - e(I) + 1.$$

$$(2) \quad G(I) \text{ が Gorenstein} \iff e(I) = 2\ell(R/I).$$

(但し $r(G(I))$ は $G(I)$ の Cohen-Macaulay 型を表わす。)

定理は $d=0$ の場合に帰着させて証明される。今 (R, m, k) をアルチン Gorenstein 局所環として、有限生成 R -加群 M に対して $M^* = \text{Hom}(M, R)$ とおく。すると双対性により

$$M^{**} \cong M, \quad \ell(M^*) = \ell(M),$$

又, R のイデアル I に対して $\text{ann}(I) = (R/I)^*$ であることから

$$\text{ann}(\text{ann}(I)) = I, \quad I \subset J \text{ とすると } \text{ann}(I)/\text{ann}(J) \cong (J/I)^*.$$

以下, I を R のイデアルで $I \neq 0$, R かつ $I^2 = 0$ とし $J = \text{ann}(I)$ とおく。すると上のことより

$$\begin{aligned} \text{Soc}(R) &\subset I \subset J, \quad \text{ann}(J) = I, \\ \ell(I) &= \ell(R/J), \quad \ell(J) = \ell(R/I), \\ \ell(I) &\leq \ell(J) = \ell(R/I). \end{aligned}$$

よって 次の補題が従う:

補題. $2\ell(I) \leq \ell(R)$ かつ $2\ell(I) = \ell(R) \iff I = J$.

次数付環 $G(I) = R/I \oplus I/I^2$ は $\mathfrak{m}/I \oplus I/I^2$ を極大イデアルとする アルチン局所環である。

命題. $r(G(I)) = \ell(J/I + \mathfrak{m}J) + 1$
 $\leq \ell(R) - 2\ell(I) + 1.$

証明. 等式は $\text{Soc}(G(I)) \cong (J/I + \mathfrak{m}J)^* \oplus k$ を示せば

よい。 $(\bar{a}, \bar{b}) \in G(I)$ のとき

$$(\bar{a}, \bar{b}) \in \text{Soc}(G(I)) \iff (\bar{a}, \bar{b})(m/I \oplus I/I^2) = 0$$

$$\iff a \in (I : m) \cap \text{ann}(I) = \text{ann}(Jm) \cap \text{ann}(I) = \text{ann}(I + mJ) \text{ かつ } b \in I \cap \text{Soc}(R) = \text{Soc}(R)。$$

従って, $\text{Soc}(G(I)) \cong \text{ann}(I + mJ)/\text{ann}(J) \oplus \text{Soc}(R) \cong (J/I + mJ)^* \oplus k$ 。不等式は $\ell(J/I + mJ) \leq \ell(J/I) = \ell(J) - \ell(I) = \ell(R/I) - \ell(I) = \ell(R) - 2\ell(I)$ より明白。

系. 次は同値:

- (1) $I = J$ (又は $I \cong J$)。
- (2) $2\ell(I) = \ell(R)$ 。
- (3) $G(I)$ が Gorenstein 環。

定理の証明: $R(X)$ を考えることにより k は無限体としてよい。 $J = (x_1, \dots, x_d)$ を I の極小還元として $S = R/J$, $L = I/J$ とおくと, S はアルチン Gorenstein 局所環で, $\ell(S) = e(I)$, $L^2 = 0$, $L \neq 0$ かつ $G(L) \cong G(I)/(x_1^*, \dots, x_d^*)$ 。
従って

$$\begin{aligned} r(G(I)) &= r(G(L)) \leq \ell(S) - 2\ell(L) + 1 \\ &= 2\ell(S/L) - \ell(S) + 1 = 2\ell(R/I) - e(I) + 1 \end{aligned}$$

かつ, $G(I)$ が Gorenstein $\iff G(L)$ が Gorenstein $\iff$

$$2\ell(L) = \ell(S) \iff e(I) = 2\ell(R/I).$$

2. 諸例.

例6. R が解析的不分岐な 1 次元 Gorenstein 局所環で DVR でないとする、 R の導手イデアル $C = R : \bar{R}$ は安定な整閉 m -準素イデアルで $G(C)$ は Gorenstein 環である。

例7. $R = k[[t^2, t^{2r+1}]]$, $r \geq 1$ とすると R の任意の m -準素イデアル I は安定で、 I が整閉のとき $G(I)$ が Gorenstein $\iff I = m$ 又は (t^{4r-2}, t^{4r-1}) 。

例8. $R = k[[t^e, t^{e+1}, \dots, t^{2e-2}]]$, $e \geq 3$ とすると R の整閉 m -準素イデアル I に対して $G(I)$ が Gorenstein $\iff I = m$, $(t^{2e-2}, t^{2e}, t^{2e+1}, \dots, t^{3e-3})$ 又は $(t^{2e}, t^{2e+1}, \dots, t^{3e-3})$ (R の導手)。

例9. R が解析的不分岐な 1 次元 Gorenstein 局所環で k を含むとする。このとき $G(I)$ が Gorenstein 環になるような整閉 m -準素イデアル I は m のみ $\iff \hat{R} \cong k[[X, Y]]/(XY)$ 又は $k[[X, Y]]/(X^2 - Y^3)$ 。

例10. R が d 次元正則局所環のとき m^r が安定かつ $G(m^r)$ が Gorenstein $\iff r=1$ 又は $d \leq 1$ 又は $(d, r) = (3, 2)$ 。

例11. R が 2次元 Cohen-Macaulay 局所環, $e(R) = 2$ のとき任意の r について m^r は安定かつ $G(m^r)$ は Gorenstein である。

(October 1989)