

Free Probability and Asymptotic Representation Theory of Symmetric Groups (自由確率論と対称群の表現の漸近理論)

洞 彰人 Akihito Hora^{*1}
(岡山大学 Okayama University)

はじめに

Voiculescu の自由確率論は、元来の作用素環固有の問題への応用のみならず、巨大なサイズの非可換なランダム構造を扱う際の 1 つの普遍的な枠組を与えるという面からも、近年とみに重要性を増している。具体的には、ランダム行列のサイズ無限大での漸近挙動との絡みが、自由確率論の研究の主要な流れを形成している。詳細は [30], [7] を参照されたい。では、行列群のかわりに置換群を考えてみたらどうなるか? というふうに安直に運んだかどうかはともかくとして、ある意味で、自由確率論のランダム置換モデルが存在するということが、10 年ほど前から Biane と Kerov によって明らかにされてきた。もとより対称群の表現の研究の及ぶところは広く深いが、その中で、Vershik, Kerov, Olshanski たちが展開してきた漸近理論が、自由確率論と合流したと言える。このような非可換なランダム構造の漸近挙動、およびサイズ無限大の極限の対象物は、調和解析と確率論の交錯する興味深い研究領域である。

本研究集会では、上述のような自由確率論と対称群の表現の漸近理論に関するサーベイ講演をする機会を与えていただいた。3 コマ分の時間をいただいたにもかかわらず、筆者の英語の拙さも手伝って、十分聞き手に伝わったかどうか、甚だ心もとない。そこで本稿では、特に導入部分のところをなるべく丁寧に、日本語で説明を行うことにした。その分かえって冗長さが目立つかもしれないことを御容赦願いたい。また、時間の関係上、引用をきめ細かくしたり文献を充実させたりすることができなかった。文献については、似たような趣旨の文章である [11] のものもご覧くださると幸いである。

実際、自由確率論について筆者が知っている部分はかなり小さい。本稿では、焦点を絞って「自由確率論の基本的な概念である半円分布 (semi-circle distribution) と確率測度の自由畳み込み (free convolution) が、どのようにして対称群の表現のサイズ無限大の

^{*1} hora@ems.okayama-u.ac.jp

極限 (熱力学極限) として現れるか?」という問に答えることを目的にする. 講演時とおおよそ同じく, 以下の要領で話を進めていく.

1. 自由キュムラント

(自由確率論のいくつかの概念の簡単な導入)

2. 連続図形

(Young 図形の連続版とそれに付随する測度の導入)

3. Plancherel 測度

(Young 図形の集合の上に定義されるもっとも重要な確率測度)

4. Young 図形の多項式関数

5. クラス代数

(これらはわれわれが話を展開する基本的な枠組. これらの代数の生成元の関係, 特に Kerov 多項式)

6. 集中現象 I. 極限形状

(Plancherel 測度で測ったときの最も尤もらしい Young 図形の形状)

7. 集中現象 II. Littlewood-Richardson 係数の漸近挙動

(Littlewood-Richardson 係数の集中する様子を Young 図形の自由畳み込みによって記述)

8. Young 図形のゆらぎ

(Young 図形の集中先をより細かいスケールで見たときのゆらぎの記述)

1 自由キュムラント

非可換確率変数の自由性の定義は本節中に述べる. 自由な確率変数の実現を与えるためのものとして, 自由群の作用, 代数の自由積, 全 (full) Fock 空間上の生成・消滅作用素, 大きなランダム行列, そして本稿で論じる大きなランダム置換やランダム分割 (partition) などが用いられる. 本節では, なるべく手っ取り早く確率測度の自由キュムラントの概念を導入する. 自由キュムラントを定義するには, 幾通りかの方法がある. Voiculescu の R -変換の係数として捉えるもの, より一般に Speicher による分割の組合せ論に基づくものなど. 後に第 4, 5 節では, ある種の代数の元としての解釈を述べる.

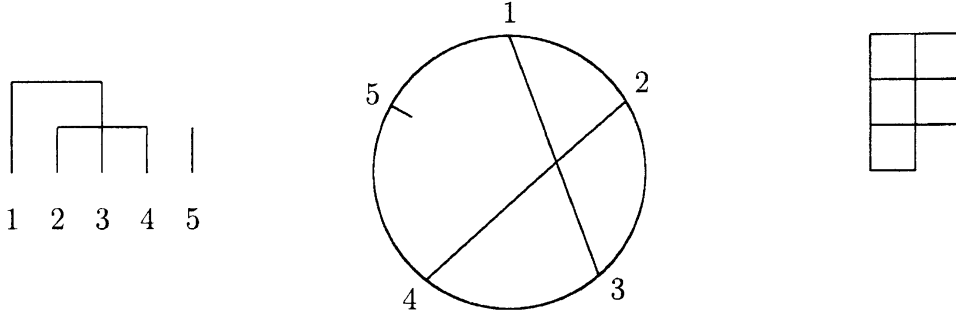


図 1: 分割 $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$ とその型 $(1^1 2^2)$

1.1 自由キュムラント

まず, μ を $\mathbb{R}$ 上の台がコンパクトな確率測度とする. μ の k 次キュムラント (cumulant, または semi-invariant) $\kappa_k = \kappa_k(\mu)$ とは, μ の Laplace 変換の対数の展開係数である:

$$\log \int_{\mathbb{R}} e^{zx} \mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\kappa_k}{k!} z^k \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (1)$$

キュムラントは, 測度の畳み込みを線型化する;

$$\kappa_k(\mu * \nu) = \kappa_k(\mu) + \kappa_k(\nu).$$

(1) 式の指数関数を取ると, 左辺は μ の n 次モーメント

$$M_n = M_n(\mu) = \int_{\mathbb{R}} x^n \mu(dx)$$

の指数型の母関数だから, 両辺を展開して, モーメント-キュムラント公式

$$M_n = \sum_{\pi \in P(n)} \kappa_{\pi} = \sum_{\rho \in \mathbb{Y}_n} |P(\rho)| \kappa_1^{m_1(\rho)} \cdots \kappa_n^{m_n(\rho)} \quad (2)$$

を得る. 少し先走ったが, (2) 式の記号の説明も含めて, 分割の定義をしよう.

$\{1, 2, \dots, n\}$ の分割全体を $P(n)$ で表す. $P(n)$ の元はブロックからできている; $P(n) \ni \pi = \{V_1, \dots, V_r\}$ (図 1). 各ブロック V_i の大きさを $|V_i|$ で表す; $|V_1| + \dots + |V_r| = n$. サイズ (箱数) n の Young 図形全体を $\mathbb{Y}_n$ で表す. $\rho \in \mathbb{Y}_n$ の長さ j の行数を $m_j(\rho)$ と書く. $\pi \in P(n)$ のブロックの大きさを並べてできる Young 図形が $\rho \in \mathbb{Y}_n$ のとき, π が ρ -型であると言う. また, $\{1, 2, \dots, n\}$ の非交差分割全体を $NC(n)$ で表す. 分割が非交差

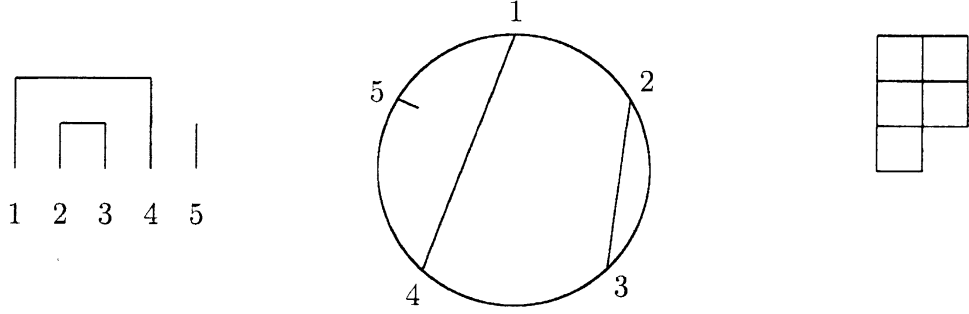


図 2: 分割 $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5\}\}$ とその型 $(1^1 2^2)$

(noncrossing) であるとは, 図 2 のように, 同一ブロックの文字を線で結ぶときに線が交わらないようにできることを言う (厳密な言い回しでないが, 誤解はないであろう). さらに, たとえば $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ のように, ブロックが入れ子にもならないものを区間分割と言う. $\{1, 2, \dots, n\}$ の区間分割全体を $IP(n)$ で表す.

なお, (2) 式において, 分割が添字のキュムラントは,

$$\kappa_\pi = \kappa_{|V_1|} \cdots \kappa_{|V_r|}$$

のようにブロックに関して乗法的に定義される. (2) 式を「反転」することにより, n 次キュムラントを n 次までのモーメントによって表すことができる. ここに明示はしないが, その係数は分割のなす半順序集合 $P(n)$ の Möbius 関数を使って書ける. そうすると, 台がコンパクトな測度に限らなくても, すべてのモーメントが有限の確率測度に対して, (2) 式によってキュムラントが定義される. さて, (2) 式の分割を非交差のものに制限することによって, μ の k 次自由キュムラント (free cumulant) $R_k = R_k(\mu)$ を定義する. すなわち

$$M_n = \sum_{\pi \in NC(n)} R_\pi = \sum_{\rho \in \mathbb{Y}_n} |NC(\rho)| R_1^{m_1(\rho)} \cdots R_n^{m_n(\rho)}. \quad (3)$$

あるいは, 今度は $NC(n)$ の Möbius 関数を用いれば, R_n を n 次までのモーメントで書き表すことができる. なお, R_π も

$$R_\pi = R_{|V_1|} \cdots R_{|V_r|} \quad (4)$$

というふうにブロックに関して乗法的に定義される. さらに (3) 式で区間分割のみに制限すれば

$$M_n = \sum_{\pi \in IP(n)} B_\pi = \sum_{\rho \in \mathbb{Y}_n} |IP(\rho)| B_1^{m_1(\rho)} \cdots B_n^{m_n(\rho)}. \quad (5)$$

を得るが、この $B_k = B_k(\mu)$ を μ の k 次 Boole キュムラントと呼ぶ (B_π の定義ももちろん乗法的に).

例 Gauss 分布は $\kappa_3 = \kappa_4 = \cdots = 0$ をみたし, Poisson 分布は $\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots$ をみたす. この自由版は

$$\begin{array}{ll} \text{Wigner 分布} & : R_3 = R_4 = \cdots = 0 \\ \text{Marčenko-Pastur 分布} & : R_1 = R_2 = \cdots \end{array}$$

である. 後者はしばしば自由 Poisson 分布とも呼ばれる.

例 $B_3 = B_4 = \cdots = 0$ をみたす平均 0 の確率分布は $\{-c, c\}$ にのる Bernoulli 分布である.

1.2 自由畳み込み

確率空間 (Ω, P) 上の独立な実確率変数 X, Y について, それぞれの分布を $\mu = P^X, \nu = P^Y$ とすると, $X + Y$ の分布 P^{X+Y} は $\mu * \nu$ に等しい. X, Y とともにすべてのモーメントが有限であるとすれば, $E[(X + Y)^n] = M_n(\mu * \nu)$ が成り立つ. この「独立」を「自由」で置き換えることにより, 確率測度の自由畳み込みが得られる.

確率変数族 $\{X_1, X_2, \dots\}$ が独立で有限モーメントを持てば, 任意の異なる添字 $i_1, i_2, \dots, i_k$ と任意の次数 $p_1, p_2, \dots, p_k$ に対して

$$E[X_{i_1}^{p_1} \cdots X_{i_k}^{p_k}] = E[X_{i_1}^{p_1}] \cdots E[X_{i_k}^{p_k}] \quad (6)$$

が成り立つ. すなわち, $X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ で生成される確率変数の代数における期待値が, それぞれの X_{i_j} の生成する代数での期待値によって完全に決まり, その計算方法が (6) 式で与えられている. 確率変数のなす代数として非可換なものを許容し, 次に述べる性質によって各部分代数での期待値からそれら全体が生成する代数での期待値を一意的に決める手続きを与えるのが, 自由な確率変数の概念である. 今, $\mathcal{A}$ を $*$ -代数, ϕ をその上の状態 (単位的正值線型汎関数) とする. 単位的とは, 単位元 1 での値が 1 であること. $(\mathcal{A}, \phi)$ はしばしば代数的確率空間と呼ばれる. 代数的確率論については, [1], [20] を参照. $\mathcal{A}$ の $*$ -部分代数 $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ が ϕ に関して自由 (free) であるとは,

$$\begin{aligned} & a_1 \in \mathcal{A}_{i_1}, \dots, a_r \in \mathcal{A}_{i_r} \\ & i_1 \neq \cdots \neq i_r \quad (\text{すなわち 隣接添字が異なる}) \implies \phi(a_1 \cdots a_r) = 0 \\ & \phi(a_1) = \cdots = \phi(a_r) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

が成り立つことを言う.

$$a = (a - \phi(a)1) + \phi(a)1 \quad (\text{右辺第 1 項は平均 } 0)$$

のような変形に注意すれば, (7) から $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ が生成する $*$ -代数での ϕ -期待値を計算する仕方が決まる. $\mathcal{A}$ の元 a, b が自由 (すなわち, a が生成する $*$ -部分代数と b が生成する $*$ -部分代数が自由) とする. さらに a, b が自己共役 ($a^* = a, b^* = b$) のとき, それぞれの分布を μ, ν とすると, $a + b$ の分布として μ と ν の加法的自由畳み込み (additive free convolution) $\mu \boxplus \nu$ を得る;

$$\phi(a^n) = M_n(\mu), \phi(b^n) = M_n(\nu), a, b \text{ は自由} \implies \phi((a+b)^n) = M_n(\mu \boxplus \nu). \quad (8)$$

なお, 本稿では加法的な場合しか扱わないので, 加法的自由畳み込みを単に自由畳み込みと呼ぶ. 一般に, (8) において μ, ν および $\mu \boxplus \nu$ が確率測度になるか, また一意的に定まるかについての吟味は必要である. ここでは, 台がコンパクトな確率測度 μ, ν が与えられていてその自由畳み込みを定義したいとしよう. そうすると, 可分 Hilbert 空間上の有界な自己共役作用素とベクトル状態によって a, b をそれぞれ実現し, 自由積を考えれば, 求める a, b が得られる. その分布 $\mu \boxplus \nu$ が確率測度として一意的に定まることも, モーメント問題が一意的に解けることから保証される.

例 自由な a, b に対して $\phi(abab)$ を一度計算してみることを勧める.

1.3 自由畳み込みと自由キュムラント

代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ において, $\mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}$ 上の k 重線型汎関数 $R_k[x_1, \dots, x_k]$ が

$$\phi(a_1 a_2 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} R_\pi[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

によって定まる. (4) 式におけるのと同様, R_π は非交差分割 π のブロックに関して乗法的に定義されている. 特に, a の ϕ に関する分布が μ のときは

$$R_k[a, a, \dots, a] = R_k(\mu)$$

となる. 詳細はたとえば [23], [24] をご覧になると良いが, 自由の定義より, R_k の変数に自由な 2 元 a, b が入っているとその R_k の値が消えることが示される. したがって

$$R_k[a+b, \dots, a+b] = R_k[a, \dots, a] + R_k[b, \dots, b]$$

となり, 左辺は自由畳み込みの k 次自由キュムラントの形だから,

$$R_k(\mu \boxplus \nu) = R_k(\mu) + R_k(\nu) \quad (9)$$

というふうに自由キュムラントが自由畳み込みを線型化することが結論される。

なお, Boole キュムラントについても, 並行する議論 (Boole 畳み込み, Boole 独立性) が可能である。

注意 次の意味で, 自由畳み込みは非線型であることに注意する. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ のとき, 一般に

$$\begin{aligned}\mu * (\alpha\nu_1 + \beta\nu_2) &= \alpha(\mu * \nu_1) + \beta(\mu * \nu_2) \\ \mu \boxplus (\alpha\nu_1 + \beta\nu_2) &\neq \alpha(\mu \boxplus \nu_1) + \beta(\mu \boxplus \nu_2)\end{aligned}$$

である. 後者の例として, $\mu = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$, $\nu_1 = \delta_{-1}$, $\nu_2 = \delta_1$, $\alpha = \beta = 1/2$ としてみれば, 右辺は離散分布, 左辺は連続分布になる.

1.4 R-変換

台がコンパクトな確率測度 μ の n 次モーメント, k 次自由キュムラントを簡単のためそれぞれ M_n, R_k と書く. R_k の母関数 (Voiculescu の R -変換) を

$$R(\zeta) = R_\mu(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k \zeta^{k-1} \quad (\zeta \in \mathbb{C})$$

とし, $K(\zeta) = K_\mu(\zeta) = \zeta^{-1} + R(\zeta)$ とおく. 一方, M_n の母関数は Cauchy(-Stieltjes) 変換

$$G(z) = G_\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^{-(n+1)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mu(dx) \quad (z \in \mathbb{C})$$

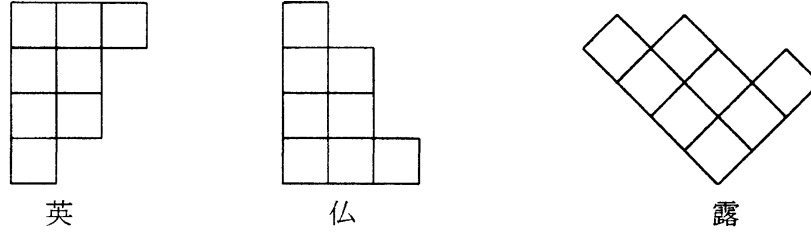
の形に書いておく. そうすると, 絶対値が十分大きな $z \in \mathbb{C}$ に対して, Voiculescu の公式

$$K(G(z)) = z$$

が成り立つ. 留数定理により $k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}R_k &= [\zeta^{-1}] \frac{K(\zeta)}{\zeta^k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|: \text{小}} \frac{K(\zeta)}{\zeta^k} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|: \text{大}} \frac{z}{G(z)^k} G'(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|: \text{大}} -\frac{1}{k-1} G(z)^{-k+1} dz = -\frac{1}{k-1} [z^{-1}] G(z)^{-k+1}\end{aligned} \quad (10)$$

を得る. $[z^{-1}]\{\dots\}$ は, z^{-1} の係数を表す慣用的な記法である. 途中, $\zeta = G(z)$ によって積分の向きがいったん逆になることに注意. μ の Caychy 変換から始めて (10) 式の最右辺で自由キュムラントを定義することもできる. (10) の表示は, μ の台がコンパクトでない場合でも $\mathbb{C}$ の適当な領域で意味を持ち, 自由キュムラントを考える確率測度の範囲を拡張するのに好都合である.

図 3: Young 図形 $(1^1 2^2 3^1)$

2 連続図形

2.1 Young 図形

$\{1, 2, \dots, n\}$ の置換全体から成る対称群を $S(n)$ で表す. 対称群の表現論を展開するのに便利な道具が Young 図形である. 第 1 節でもすでに現れたが, 図 3 のように, n 個の箱を並べたものがサイズ n の Young 図形と呼ばれ, それら全体を $\mathbb{Y}_n$ で表す. $\mathbb{Y}_n$ は, $S(n)$ の共役類全体と既約表現の同値類全体をパラメトライズする. 共役類は, 置換のサイクル分解の型で与えられる. $\rho = (1^{m_1(\rho)} 2^{m_2(\rho)} \dots n^{m_n(\rho)}) \in \mathbb{Y}_n$ に対応する $S(n)$ の共役類の各元は, 長さ j のサイクルを $m_j(\rho)$ 個含んでいる. この共役類を C_ρ で表す. 一方, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ が与えられたとき, λ の箱に $1, 2, \dots, n$ をもれなく書き込んだ Young 盤 (tableau) を列に刻み, 各列での差積の積を取ってできる n 変数多項式 (Specht 多項式) を考える. 盤の取り方を変えると, 標準盤の個数だけ 1 次独立な Specht 多項式ができることが示される. ただし, 標準盤とは, 任意の行に沿っても列に沿っても単調増大になるように数字が入っている盤である. $S(n)$ の n 変数多項式への自然な作用に関し, この Specht 多項式が張る空間が既約表現になっている. この既約表現を U_λ で表す. そして λ を $\mathbb{Y}_n$ にわたって動かせば, $S(n)$ の既約表現の同値類が重複なくすべて得られることが示される. この辺の事情は, たとえば [25], [26] を見られたい.

Young 図形全体を $\mathbb{Y} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Y}_n$ と書く. $\lambda \in \mathbb{Y}$ のサイズ (箱数) を $|\lambda|$, 行数を $row(\lambda)$, 列数を $col(\lambda)$ と書く. 行数と列数の記号は標準的なものではないが, 紛れは生じないであろう. λ の行と列を入れ換えた転置図形を λ' で表す. この記号のもとに,

$$row(\lambda) = \sum_j m_j(\lambda), \quad col(\lambda) = \sum_j m_j(\lambda'), \quad |\lambda| = \sum_j j m_j(\lambda)$$

は明らかである. 便宜上, $\mathbb{Y}_0$ は空図形 $\emptyset$ から成るとする. $S(n)$ の元は, 文字 $n+1$ を固定する置換として $S(n+1)$ に埋め込まれる. したがって, 異なるサイズの Young 図形も

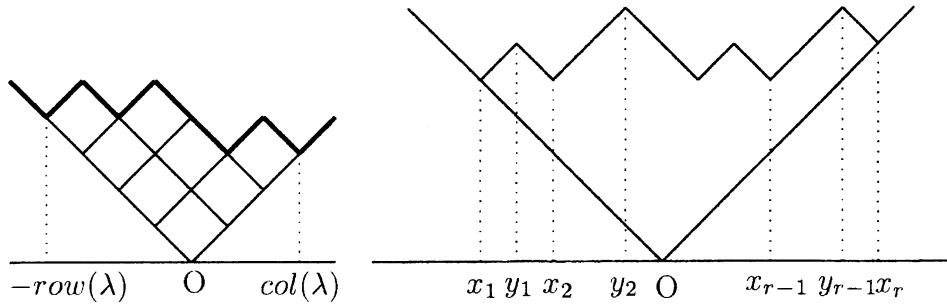


図 4: 横顔と山谷座標

当然何らかの関係を持ち、それら全体 $\mathbb{Y}$ を考えることは意味がある。実際、既約表現の制限・誘導の既約分解が、Young 図形に箱を加えたり取り去ったりする作用によって記述され、その総体として $\mathbb{Y}$ を頂点集合に持つ Young グラフ (あるいは Young 束) が導入される。すなわち、 $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ と $\Lambda \in \mathbb{Y}_{n+1}$ に対し、 λ に箱を 1 つ加えて Λ ができるときに λ と Λ を辺でつないで $\lambda \nearrow \Lambda$ という記号で表すことにすれば、制限と誘導の既約分解が

$$\text{Ind}_{S(n)}^{S(n+1)} U_\lambda \simeq \bigoplus_{\Lambda \in S(n+1): \lambda \nearrow \Lambda} U_\Lambda, \quad \text{Res}_{S(n)}^{S(n+1)} U_\Lambda \simeq \bigoplus_{\lambda \in S(n): \lambda \nearrow \Lambda} U_\lambda$$

と記述される。 $\mathbb{Y}$ の元は、サイズにしたがって層化して並べておく。上述の構成から、 $\dim \lambda (= \dim U_\lambda)$ は λ 形の標準盤の個数に等しいが、Young グラフ上の $\emptyset$ から λ に至る (最短) 道の個数に一致する。

2.2 連続図形

われわれの目的は、 $S(n)$ の表現の $n \rightarrow \infty$ における漸近挙動を論じることであり、必要に応じて適当なスケールリングを施す。その際、Young 図形を解析的に記述する手続きが不可欠であり、そのための基盤となるアイデアが、Vershik-Kerov による Young 図形の関数空間、測度の空間へのうめこみである。以下、第 2 節の終りまでの題材については、[15], [17] を参照。

図 4 左のように、Young 図形をロシア方式で座標平面に埋め込み (ただし箱の一辺の長さは $\sqrt{2}$ にして)、太線で表示した境界部分を Young 図形の横顔 (profile) と呼ぶ。今

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{ \omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid |\omega(x_1) - \omega(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \omega(x) = |x| \text{ } (|x| \text{ が十分大}) \} \\ \mathbb{D}_0 &= \{ \omega \in \mathbb{D} \mid \omega \text{ は区分的に線型, } \omega'(x) = \pm 1 \} \end{aligned}$$

とおくと、横顔を通して、 $\mathbb{Y} \subset \mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$ という埋め込みが成り立つ。 $\mathbb{D}, \mathbb{D}_0$ の元をそれぞれ連続図形 (continuous diagram), 直角図形 (rectangular diagram) と呼ぶ (標準

的な呼び名ではない!). 直角図形 $\lambda \in \mathbb{D}_0$ に対して, 極小値を与える点 (谷) と極大値を与える点 (山) の横座標をそれぞれ図 4 右のように x_i, y_i で表し, 互い違いの列 $(x_1 < y_1 < \cdots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r)$ を λ の山谷座標と呼ぶ (標準的な呼び名ではない!). Young 図形は, 山谷座標がすべて整数であるような直角図形にはかならない.

補題 λ の山谷座標は

$$\sum_{i=1}^r x_i = \sum_{i=1}^{r-1} y_i$$

をみたす.

2.3 Rayleigh 測度

今度は, Young 図形を実数上の測度の空間に埋め込もう. $\lambda \in \mathbb{D}_0$ の山谷座標を $(x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$ とする. このとき

$$\tau_\lambda = \sum_{i=1}^r \delta_{x_i} - \sum_{i=1}^{r-1} \delta_{y_i}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の実確率測度を λ の Rayleigh 測度と言う. つまり, 直角図形の谷に $+1$ のチャージ, 山に -1 のチャージを置くと思えばよい. $\lambda \mapsto \tau_\lambda$ が 1 対 1 であるのは明らかである. Rayleigh 測度は

$$\tau_\lambda = \left(\frac{\lambda(x) - |x|}{2} \right)'' + \delta_0$$

をみたす. ただし, $'$ は超関数の微分である. したがってその k 次モーメントは

$$M_k(\tau_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left(\frac{\lambda(x) - |x|}{2} \right)'' dx$$

で与えられ, 特に

$$M_0(\tau_\lambda) = 1, \quad M_1(\tau_\lambda) = 0, \quad M_2(\tau_\lambda) = \text{“面積”}$$

である. ここで, $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ ならば, その面積 ($|x|$ のグラフと λ の横顔に囲まれた部分の面積) は $2n$ に等しい.

2.4 推移測度

次に, 同じく Young 図形の測度の空間への埋め込みとして, Kerov の推移測度を定義する. 再び $\lambda \in \mathbb{D}_0$ の山谷座標を $(x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$ とする. 谷と山の座標をそ

それぞれ極, 零点に持つ有理関数の部分分数分解を考える:

$$\frac{(z - y_1) \cdots (z - y_{r-1})}{(z - x_1) \cdots (z - x_r)} = \frac{\mu_1}{z - x_1} + \cdots + \frac{\mu_r}{z - x_r} \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (11)$$

明示的に

$$\mu_i = \frac{(x_i - y_1) \cdots (x_i - y_{r-1})}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_r)}$$

と書けるが, x_i, y_i たちは互い違いなので, $\mu_i > 0$ が成り立つ. さらに, (11) 式の両辺に z をかけて $z \rightarrow \infty$ とすれば, $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ を得る. こうして

$$\mathbf{m}_\lambda = \sum_{i=1}^r \mu_i \delta_{x_i}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の確率測度を λ の推移測度と言う. (推移測度という呼び名は, Markov 連鎖のそれから来ている. 後ほど第3節で説明.) (11) 式は, $\mathbf{m}_\lambda$ の Cauchy(-Stieltjes) 変換にほかならない. $\mathbf{m}_\lambda$ が与えられれば, x_i, μ_i から (11) 式によって y_i が決まり, λ の山谷座標が決まる. したがって, $\lambda \mapsto \mathbf{m}_\lambda$ は 1 対 1 である.

例 $\lambda \in \mathbb{D}_0$ に対し, $M_1(\mathbf{m}_\lambda) = 0$.

2.5 推移測度と Rayleigh 測度

$\lambda \in \mathbb{D}_0$ の山谷座標を $(x_1 < y_1 < \cdots < y_{r-1} < x_r)$ とする. $\mathbf{m}_\lambda$ のモーメントと τ_λ のモーメントは次の式で結ばれている:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(\mathbf{m}_\lambda)}{z^n} &= \frac{(1 - \frac{y_1}{z}) \cdots (1 - \frac{y_{r-1}}{z})}{(1 - \frac{x_1}{z}) \cdots (1 - \frac{x_r}{z})} \\ &= \exp \left\{ \log(1 - \frac{y_1}{z}) + \cdots + \log(1 - \frac{y_{r-1}}{z}) - \log(1 - \frac{x_1}{z}) - \log(1 - \frac{x_r}{z}) \right\} \\ &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^r x_i^k - \sum_{i=1}^{r-1} y_i^k \right) \frac{1}{z^k} = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(\tau_\lambda)}{k} \frac{1}{z^k}. \end{aligned} \quad (12)$$

この式は, $|z|$ が十分大きい適当な領域で成り立つ. したがって, $\{M_n(\mathbf{m}_\lambda)\}$ と $\{M_n(\tau_\lambda)\}$ は, 互いに他の多項式によって書き表される.

例 小さい次数のモーメントの関係式の計算を勧める. $M_2(\mathbf{m}_\lambda) = |\lambda|$.

注意 (12) 式は, 完全対称関数 $\{h_n\}$ と (Newton) ベキ和 $\{p_n\}$ の関係式と同じものである. ここで, h_n は n 次のすべての単項式の和, $p_n = \sum_i x_i^n$. つまり, $M_1(\mathbf{m}_\lambda) = M_1(\tau_\lambda) = 0$ のもとに, $h_n \mapsto M_n(\mathbf{m}_\lambda)$, $p_n \mapsto M_n(\tau_\lambda)$ と特殊化したもの.

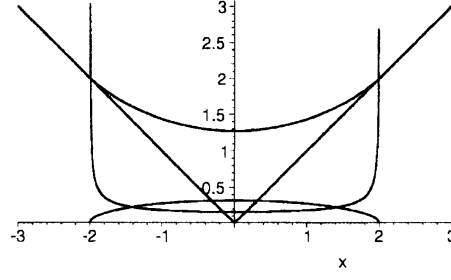


図 5: Young 図形の極限形状, 標準半円分布, 逆正弦分布

2.6 連続図形の推移測度と Rayleigh 測度

直角図形に対して定義された推移測度, Rayleigh 測度の概念は, 極限操作によって任意の連続図形に拡張される. $\omega \in \mathbb{D}$ が与えられたとする. ω は直角図形 $\lambda \in \mathbb{D}_0$ によって一様ノルムに関して近似できる. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $M_n(\tau_\lambda)$ が収束することは Rayleigh 測度の定義よりすぐにしたがう. そうすると, それらの多項式で表される $M_n(m_\lambda)$ も収束する. また, τ_λ, m_λ の台は一様に有界なので, モーメント問題が一意的に解ける (Carleman 条件をチェックするとよい). こうして $\omega \in \mathbb{D}$ の推移測度 m_ω と Rayleigh 測度 τ_ω が定まり, それらのモーメントは再び (12) 式をみたとす. なお, (12) 式は, 積分形で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} m_\omega(dx) = \frac{1}{z} \exp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-z} \left(\frac{\omega(x) - |x|}{2} \right)' dx$$

とも表せる.

重要例

$$\Omega(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} (x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}) & (|x| \leq 2) \\ |x| & (|x| > 2) \end{cases} \quad (13)$$

は連続図形であり,

$$m_\Omega(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2} I_{[-2,2]}(x) dx, \quad \tau_\Omega(dx) = \frac{1}{\pi \sqrt{4-x^2}} I_{(-2,2)}(x) dx \quad (14)$$

が成り立つ (図 5).

3 Plancherel 測度

3.1 Plancherel 測度

Young 図形の集合の上に確率測度を与えれば, 推移測度や Rayleigh 測度としての埋め込みを通して, $\mathbb{R}$ 上のランダム測度を得る. また, Young グラフの道の空間上に確率測度を与えれば, Young 図形の成長過程を得る. ここでは, 最も基本的な確率測度として, Plancherel 測度を導入する ([16], [17] など参照). なお, Young 図形の集合の上に確率測度を与えることは, ランダム行列におけるアンサンブルを指定することに相当する. 概念的な対応は次のとおりである.

(適当な対称性をもつ) 行列アンサンブル	$\longleftrightarrow$	Young 図形の集合上の確率測度
特に GUE	$\longleftrightarrow$	Plancherel 測度
行列の固有値	$\longleftrightarrow$	Young 図形の座標
固有値の経験分布	$\longleftrightarrow$	Young 図形に付随する点測度

$\mathbb{Y}$ 上の関数 φ が

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\Lambda: \lambda \nearrow \Lambda} \varphi(\Lambda)$$

をみたすとき, 調和関数と呼ぶ.

補題 次の関数は, 正值単位的調和関数である. ただし, 単位的とは, $\emptyset$ での値が 1 のこと.

$$\varphi(\lambda) = \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}) \quad (15)$$

Young グラフ上の $\emptyset$ から始まる無限に延びる道全体を $\mathfrak{T}$ で表す. $t \in \mathfrak{T}$ の第 n 層に当たる Young 図形を $t(n) \in \mathbb{Y}_n$ と書く. すなわち, $t = (\emptyset = t(0) \nearrow t(1) \nearrow \dots \nearrow t(n) \nearrow \dots)$. $\mathfrak{T}$ は $\prod_n \mathbb{Y}_n$ の相対位相に関してコンパクトであり, その位相から来る Borel 構造を入れる. 有限の道 $u = (\emptyset \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda)$ に対し, シリンダー集合 $C_u = \{t \in \mathfrak{T} | t(j) = \lambda^{(j)}, j = 0, 1, \dots, n\}$ を定める. (15) 式の調和関数を用いて

$$\mathfrak{P}(C_u) = \varphi(\lambda) = \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!}$$

とおくと, $\mathfrak{P}$ はシリンダー集合族の上に無矛盾に有限加法的測度を与える. $\mathfrak{T}$ はコンパクトだから Hopf の拡張定理の適用が容易で, $\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{T}$ 上の測度に拡張される. φ は単位的で

あったから, $\mathfrak{P}$ は確率測度になる. この $\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{T}$ 上の Plancherel 測度と呼ぶ. $\mathfrak{P}$ の第 n 層での周辺分布を $\mathfrak{P}_n$ で表し, これも $\mathbb{Y}_n$ 上の Plancherel 測度と呼ぶ. すなわち,

$$\mathfrak{P}_n(\lambda) = \mathfrak{P}(\{t \in \mathfrak{T} | t(n) = \lambda\}) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n). \quad (16)$$

注意 (16) 式は $S(n)$ の正則表現の既約分解, あるいは δ -関数の既約指標による分解の係数から得られるものであり, Fourier 解析における Plancherel 測度の用語と同じである. ここでは, 以下に述べる推移測度との関係につながるように, 道の空間上の確率測度として Plancherel 測度を導入した.

3.2 Plancherel 成長過程

$X_n(t) = t(n)$ を確率空間 $(\mathfrak{T}, \mathfrak{P})$ 上の確率変数とみなすと, $(X_n)_{n=0,1,2,\dots}$ は Markov 連鎖になる. なぜならば, $\lambda^{(j)} \in \mathbb{Y}_j, \Lambda \in \mathbb{Y}_{n+1}$ なる任意の $\lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} (= \lambda) \nearrow \Lambda$ に対して

$$\mathfrak{P}(t(n+1) = \Lambda | t(1) = \lambda^{(1)}, \dots, t(n-1) = \lambda^{(n-1)}, t(n) = \lambda) = \frac{\dim \Lambda}{(n+1) \dim \lambda} \quad (17)$$

となるから. (17) 式を推移確率 $p(\lambda, \Lambda)$ にもつこの $\mathbb{Y}$ 上の Markov 連鎖を Plancherel 成長過程と呼ぶ.

Plancherel 成長過程の推移確率と Kerov の推移測度の関係を見よう. $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の山谷座標を $x_1 < y_1 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$ とする. このとき, $\lambda \nearrow \Lambda$ となる $\Lambda \in \mathbb{Y}_{n+1}$ は r 個ある. λ の x_j で特定される第 j 谷に箱を 1 つ加えたものを Λ_j とする (図 6 右).

補題 $p(\lambda, \Lambda_j) = m_\lambda(\{x_j\})$

証明には, 既約表現の次元に関するフック公式:

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{b \in \lambda} h(b)} \quad (\lambda \in \mathbb{Y})$$

を用いる. $h(b)$ は箱 b における λ でのフックの長さを表す (図 6 左). (17) 式の右辺を λ の山谷座標を使って書き直す.

Plancherel 成長過程は, 次のように Rayleigh 測度の遷移で記述することもできる. 再び $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の山谷座標を $x_1 < y_1 < \dots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r$ とする. $\mathbb{Z}$ の点をサイトとし, x_i には $+1$, y_i には -1 , 他のサイトには 0 が載っている. 各ステップで, m_λ にしたがってサイト x_j を選ぶ. x_j から $+2$ を剥ぎ取り両隣のサイトに分配する. 結果できる配置で $+1, -1$ の値が載っているサイトをそれぞれ谷, 山として, 新しくできた x'_i, y'_i を山谷座標にもつ Young 図形が Λ_j である (図 7).

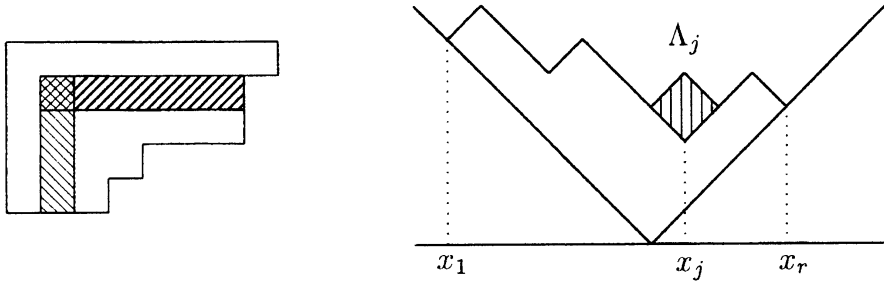


図 6: フック, Plancherel 成長過程

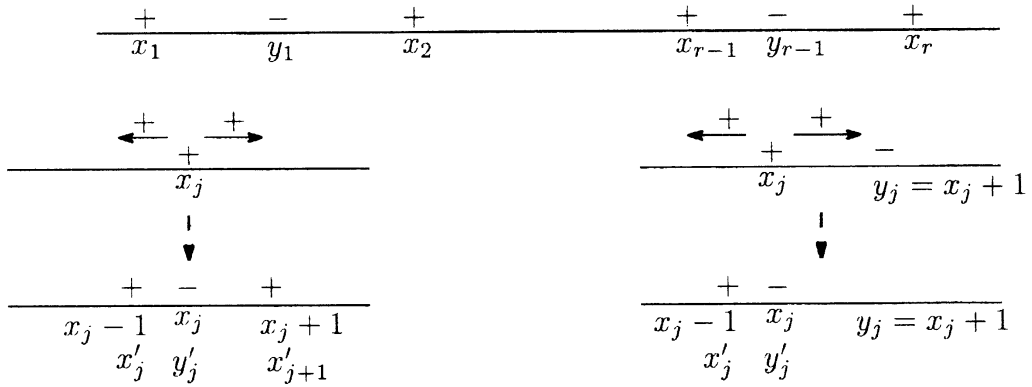


図 7: Plancherel 成長過程と Rayleigh 測度

4 Young 図形の多項式関数

4.1 $\mathbb{Y}$ 上の多項式関数

Young 図形 $\lambda \in \mathbb{Y}$ の座標として, ここでは 3 つ挙げておく.

- 行座標 $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots)$.
- Frobenius 座標 $\lambda = (a_1, \cdots, a_d; b_1, \cdots, b_d)$. ここで d は対角線の長さ, $a_i = \lambda_i - i + (1/2)$, $b_i = \lambda'_i - i + (1/2)$. 対角線上の箱を上下に半分ずつ分けた効果が $+1/2$ である.
- 山谷座標 $\lambda = (x_1 < y_1 < \cdots < x_{r-1} < y_{r-1} < x_r)$.

Kerov-Olshanski[18] によって導入された $\mathbb{Y}$ 上の多項式関数とは, 粗く言って Young 図形の上記の座標の多項式で表示される関数のことであり, それら全体 $\mathbb{A}$ の生成元集合として, たとえば $\{M_k(\tau_\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を取ることができる. $M_k(\tau_\lambda)$ は明らかに λ の山谷座標の多項式である. ちなみに, λ の Frobenius 座標と山谷座標は次の関係で結ばれている.

補題

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{r-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_r)} = \frac{1}{z} \prod_{i=1}^d \frac{(z+b_i)(z-a_i)}{(z-1-a_i)(z+1+b_i)} \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (18)$$

(12) 式により, $\{M_k(\tau_\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}}$ と $\{M_k(\mathbf{m}_\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}}$ とが互いに多項式関係で結ばれているから, 後者も $\mathbb{A}$ の生成元集合である. さらに, 次に示すように, 既約指標からできる生成元集合も取れる.

$\lambda, \rho \in \mathbb{Y}_n$ のとき, $S(n)$ の λ に対応する既約指標の ρ 型の共役類 (の任意の 1 点) における値を χ_ρ^λ と書く. 与えられた $\rho \in \mathbb{Y}$ に対し, $\mathbb{Y}$ 上の関数を次で定める:

$$\Sigma_\rho(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|^{\frac{|\rho|}{2}} \tilde{\chi}_{\rho \cup (1^{|\lambda|-|\rho|})}^\lambda & (|\lambda| \geq |\rho|) \\ 0 & (|\lambda| < |\rho|). \end{cases}$$

ただし, $\tilde{\chi}^\lambda = \chi^\lambda / \dim \lambda$, $n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ とする. $\rho \cup (1^m)$ は, 1 箱から成る行を m 個分 ρ にくっつけてできる Young 図形である. 特に, ρ が 1 行 (サイクルの共役類) のとき, $\Sigma_{(k)}$ を Σ_k と略記する. $\{M_k(\mathbf{m}_\lambda)\}$ と $\{\Sigma_k(\lambda)\}$ との多項式関係は, それらの母関数を通して見ることができる. われわれは $\mathbb{Y}$ 上の関数を考えているので, それらの関係式の係数は, λ のサイズ “ n ” を含まないようにしなければならない.

命題

$$\Sigma_k(\lambda) = -\frac{1}{k} [z^{-1}] \left\{ \frac{1}{G_{\mathbf{m}_\lambda}(z)} \cdots \frac{1}{G_{\mathbf{m}_\lambda}(z-k+1)} \right\} \quad (19)$$

ここに, $G_{\mathbf{m}_\lambda}$ は λ の推移測度の Cauchy(-Stieltjes) 変換である:

$$G_{\mathbf{m}_\lambda}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-x} \mathbf{m}_\lambda(dx) = (18) \text{ 式}.$$

証明は, サイクルでの既約指標の値を与える Frobenius の公式

$$n^k \tilde{\chi}_{(k) \cup (1^{n-k})}^\lambda = -\frac{1}{k} [z^{-1}] \left\{ z^k \prod_i \frac{z - (\lambda_i - i + n + k)}{z - (\lambda_i - i + n)} \right\} \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n)$$

による. これ自身は λ のサイズ n を陽に含むのでわれわれの用途には向かないが, これを山谷座標を用いて書き直す作業を行えばよい.

$\mathbb{A}$ には, 用途に応じていろいろな次数づけが考えられる. ここでは, $M_k(\tau_\lambda)$ を k 次斉次式と勘定して定まるもののみ挙げておく. これを重み次数と呼ぼう. (2), (3), (5) および (12) 式より, Young 図形の推移測度と Rayleigh 測度の k 次モーメントとキュムラント (古典, 自由, Boole) はすべて重み次数が k の多項式関数である. さらに, (19) 式により, 重み次数に関して

$$\Sigma_k(\lambda) = M_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda) + (\text{低次項}) \quad (20)$$

が導かれる．したがって, $M_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda)$ が $\Sigma_k(\lambda), \dots$ の多項式で表示される．結局, $\mathbb{A}$ の定義として $\{M_k\}, \{R_k\}, \{B_k\}, \{\Sigma_k\}$ のどの族を生成元集合に取っても同値である．

4.2 Kerov 多項式

(20) 式の右边を (3) 式によって λ の推移測度の自由キュムラントで表示すれば, $\Sigma_k(\lambda)$ が $R_2(\mathbf{m}_\lambda), \dots, R_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda)$ の多項式で表される．この多項式は Kerov 多項式と呼ばれる．(10) 式を思い出す:

$$R_{k+1}(\mathbf{m}_\lambda) = -\frac{1}{k}[z^{-1}] \left(\frac{1}{G_{\mathbf{m}_\lambda}(z)} \right)^k. \quad (21)$$

確かに (19), (21) の両式を並べると, 既約指標と自由キュムラントのつながりは一際興味深そうである．(19), (21) 式を展開してみよう．簡単のため, 記法上測度 $\mathbf{m}_\lambda$ は省略する．(19), (21) 式に

$$\frac{1}{G(z)} = z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{z^{k-1}}$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= R_{k+1} + (B_j \text{ たちの重み次数 } k \text{ 以下の多項式}) \\ &= R_{k+1} + (R_j \text{ たちの重み次数 } k \text{ 以下の多項式}) \end{aligned} \quad (22)$$

を得る．

$\mathbb{A}$ には, Young 図形の転置によって自然な対合が

$$f(\lambda) \mapsto \text{inv}(f)(\lambda) = f(\lambda')$$

で定まる．Young 図形の転置は推移測度や Rayleigh 測度の正負反転に当たるので, それらのモーメントは

$$\text{inv}(M_k) = (-1)^k M_k$$

をみたす．また, $U_{\lambda'} \simeq U_\lambda \otimes \text{sgn}$ であるから,

$$\text{inv}(\Sigma_k) = (-1)^{k-1} \Sigma_k$$

が成り立つ．

(22) 式の両辺の対合を取れば, こうして

$$\begin{aligned} \Sigma_k &= K_k(R_2, \dots, R_{k+1}) \\ &= R_{k+1} + (R_2, \dots, R_{k-1} \text{ の重み次数 } k-1 \text{ 以下の多項式で, 各項の重み次数は } \\ &\quad k+1 \text{ と同パリティをもつもの}) \end{aligned} \quad (23)$$

が得られる. Kerov 多項式 K_k のこの導出は, Okounkov による ([4] 参照). K_k は $\mathbb{Z}$ 係数であることが知られている. さらに実は $\mathbb{N}$ 係数であろうと予想されている (Kerov 予想) が, 今のところあまり有力なアプローチはないようである. 何らかの対象の数を勘定して係数を特徴づけることができれば, 申し分ない.

なお, (23) 式から, $\omega \in \mathbb{D}$ に対しても $\Sigma_k(\omega)$ を定義することができる (連続図形の “既約指標”).

5 クラス代数

5.1 クラス代数 $\mathfrak{C}$

前節の $\mathbb{A}$ を別の観点から見てみよう.

$\rho \in \mathbb{Y}$, $n \geq |\rho|$ とする. $\{1, 2, \dots, n\}$ から 1 回ずつ文字を選んで ρ の箱に書き入れる仕方全体を考える. すなわち

$$\Phi_{\rho;n} = \{ \phi : \{b\}_{b \in \rho} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \mid 1 \text{ 対 } 1 \text{ 写像} \}$$

とおく. $\phi \in \Phi_{\rho;n}$ から図 8 のように決まる $S(n)$ の元を g_ϕ とする. $\mathbb{C}[S(n)]$ の中心 $\mathcal{Z}(S(n))$ の元を

$$a_{\rho;n} = \begin{cases} \sum_{\phi \in \Phi_{\rho;n}} g_\phi & (|\rho| \leq n) \\ 0 & (|\rho| > n) \end{cases}$$

で定める. ρ が 1 行のときは, $a_{(k);n}$ を $a_{k;n}$ と略記する. また, $\sigma \in \mathbb{Y}_n$ に対応する $S(n)$ の共役類 C_σ にわたる和を

$$A_\sigma = \sum_{x \in C_\sigma} x \quad (\in \mathcal{Z}(S(n)))$$

と書く (隣接作用素と呼ぶことがある). 両者の関係は

$$a_{\rho;n} = n^{|\rho|} \frac{A_{\rho \cup (1^{n-|\rho|})}}{|C_{\rho \cup (1^{n-|\rho|})}|} \quad (|\rho| \leq n)$$

である.

$a_{\rho;n}$ たちについては, 積の構造定数が n に関して安定しているという著しい性質がある.

定理 (Kerov[14], Ivanov-Kerov[12]) (I)

$$a_{\sigma;n} a_{\tau;n} = \sum_{\rho} f_{\sigma,\tau}^{\rho} a_{\rho;n} . \quad (24)$$

ここで, 係数 $f_{\sigma,\tau}^{\rho}$ は次の性質を持つ:

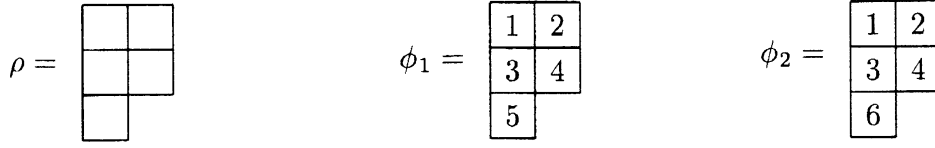


図 8: $g_{\phi_1} = g_{\phi_2} = (12)(34) \in S(6)$

- $f_{\sigma,\tau}^\rho \in \mathbb{Z}$ であり, n に依存しない.
- $f_{\sigma,\tau}^{\sigma \cup \tau} = 1$.
- $f_{\sigma,\tau}^\rho \neq 0$ ならば $|\rho| \leq |\sigma| + |\tau|$.

(II) n によらない $|\rho|$ 次の $\mathbb{Z}$ 係数多項式 $P_\rho(x_1, x_2, \dots, x_{|\rho|})$ があって

$$a_{\rho;n} = P_\rho(a_{1;n}, a_{2;n}, \dots, a_{|\rho|;n})$$

と表される. ただし, x_j の次数を j と勘定して多項式の次数とする.

(24) と同じ関係式

$$c_\sigma c_\tau = \sum_{\rho} f_{\sigma,\tau}^\rho c_\rho$$

をみたす $\{c_\rho\}_{\rho \in \mathbb{Y}}$ によって生成される $\mathbb{C}$ -代数を $\mathfrak{C}$ で表し, クラス代数と呼ぶ (標準的な用語ではない). $\mathfrak{C}$ と $\mathbb{A}$ とは既約指標を取ることによって結びついている;

$$\tilde{\chi}^\lambda(a_{\rho;n}) = \Sigma_\rho(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{Y}_n).$$

$\tilde{\chi}^\lambda$ は $\mathcal{Z}(S(n))$ 上で乗法的であることに注意する.

5.2 Jucys-Murphy 元

$\mathbb{A} \longleftrightarrow \mathfrak{C}$ において, Σ_ρ に対応するのが c_ρ (あるいは $a_{\rho;n}$) であった. $M_k(\mathbf{m}.)$ に対応するものは, Jucys-Murphy 元

$$J_n = (1 \ n+1) + (2 \ n+1) + \dots + (n \ n+1) \in \mathbb{C}[S(n+1)]$$

を用いて作られる. J_n は $(S(n+1)$ にこれまでのように埋め込まれた $S(n)$ と可換である. したがって, $\mathbb{C}[S(n+1)]$ から $\mathbb{C}[S(n)]$ への自然な射影 (条件つき期待値) $\mathbb{E}_n$ を

$$\begin{aligned} x \in S(n) & \longmapsto x \\ x \in S(n+1) \setminus S(n) & \longmapsto 0 \end{aligned}$$

で定めると, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mathbb{E}_n J_n^k$ は中心 $\mathcal{Z}(S(n))$ の元である.

J_n のスペクトル構造はよく知られている. $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ の山谷座標を $(x_1 < y_1 < \dots < y_{r-1} < x_r)$ とし, λ の第 j 谷に箱をのせた Young 図形を $\Lambda_j \in \mathbb{Y}_{n+1}$ とする ($j = 1, 2, \dots, r$). $\text{Res}_{S(n)}^{S(n+1)} U_{\Lambda_j}$ の λ 成分の表現空間が, $U_{\Lambda_j}(J_n)$ の固有値 x_j に属する固有空間になる. このことを用いれば,

$$\tilde{\chi}^\lambda(\mathbb{E}_n J_n^k) = \sum_{j=1}^r x_j^k \frac{\dim \Lambda_j}{(n+1) \dim \lambda} = M_k(\mathbf{m}_\lambda) \quad (k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{Y}_n) \quad (25)$$

が得られる.

5.3 クラス代数のモーメント元

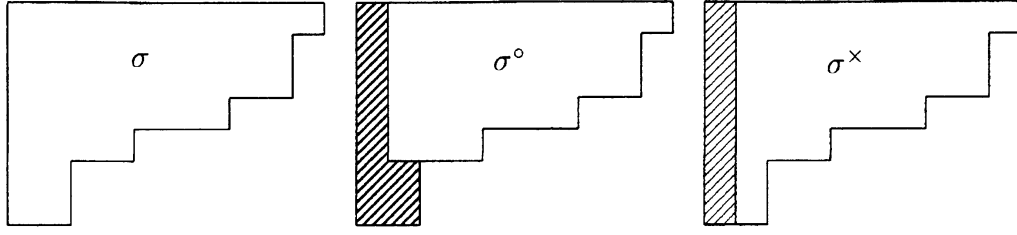
(25) 式は, $\mathbb{E}_n J_n^k$ が $\mathcal{Z}(S(n))$ における (推移測度の) モーメントの役割をもつこと, さらにそれからクラス代数 $\mathfrak{C}$ におけるモーメント元を定めることを示唆している. 今, $\mathcal{M}_{k;n} = \mathbb{E}_n J_n^k$ とおく. モーメント-キュムラント公式の自由版 (3) の反転公式により, $\mathcal{M}_{k;n}$ の多項式として $\mathcal{R}_{k;n}$ を定める. その係数はもちろん n によらない. そうすると, $\{a_{k;n}\}$ と $\{\mathcal{R}_{k;n}\}$ とは, $\{\Sigma_k\}$ と $\{R_k(\mathbf{m})\}$ と同じ関係式 (つまり Kerov 多項式) によって結ばれている. $\{a_{k;n}\}, \{\mathcal{M}_{k;n}\}, \{\mathcal{R}_{k;n}\}$ は, n によらない係数をもつ多項式によって互いに関係づけられているので, その関係をそのまま $a_{k;n} \mapsto c_k$ に適用して, $\mathfrak{C}$ におけるモーメント元 $\mathcal{M}_k$, 自由キュムラント元 $\mathcal{R}_k$ を定義する. また, $\mathbb{A}$ の元の重み次数の概念も, $\mathfrak{C}$ に移行させておく. さて, モーメント-キュムラント公式

$$\mathcal{M}_{k;n} = \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)| \mathcal{R}_{2;n}^{m_2(\sigma)} \dots \mathcal{R}_{k;n}^{m_k(\sigma)} \quad (26)$$

を考える. ただし, $\bar{\mathbb{Y}} = \{\rho \in \mathbb{Y} | m_1(\rho) = 0\}$ とおいた. 定義より $\mathcal{R}_{1;n} = \mathcal{M}_{1;n} = \mathbb{E}_n J_n = 0$ なので, (26) 式の右辺では $\bar{\mathbb{Y}}_k$ にわたる和だけになる. $\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}$ に対し, 図 9 のように (斜線部を取り除いて) σ° と $\sigma^\times$ を定める (全く標準的でない記号). (26) 式右辺の $\mathcal{R}_j$ に Kerov 多項式を逆に解いたものを代入して $a_{j;n}$ たちで表し, 重み次数が最大 (すなわち k) の項を取り出すと, 結局次式を得る.

定理

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_n J_n^k &= \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)| a_{\sigma^\times;n} + (\text{重み次数 } k-1 \text{ 以下の項}) \\ &= \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)| n^{l(\sigma)} (1 + O(1/n)) \frac{A_{\sigma^\circ \cup (1^n - |\sigma^\circ|)}}{|C_{\sigma^\circ \cup (1^n - |\sigma^\circ|)}|}. \end{aligned} \quad (27)$$

図 9: σ° と $\sigma^\times$

ただし, $\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}$ に対して $l(\sigma) = |\sigma^\times| = \sum_j (j-1)m_j(\sigma)$ とおいた.

系

$$\tilde{\chi}^\lambda(\mathbb{E}_n J_n^k) = \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)| n^{l(\sigma)} (1 + O(1/n)) \tilde{\chi}_{\sigma^\circ \cup (1^{n-|\sigma^\circ|})}^\lambda. \quad (28)$$

[10] では, Kerov 多項式を使わず, $\bar{\mathbb{Y}}$ 上のある種の (非 Markov 的な) ランダムウォークを用いて, (27) 式の初等的な証明を与えた. 第 6, 7 節では, (27), (28) を応用して, 対称群の表現における集中現象を観察する. クラス代数 $\mathfrak{C}$ の中で, 重み次数が最高次の項どうしのみならず, もっと低次の項も含めた変換法則の研究が, 最近 P. Śniady によってなされている ([21],[22]).

6 集中現象 I

6.1 Young 図形の極限形状

1970 年代後半の Vershik-Kerov[28] と Logan-Shepp[19] による Young 図形の極限形状の発見は, 対称群の表現の漸近理論に大きな発展の契機をもたらした. これは, Plancherel 測度で測ったときに最も尤もらしい Young 図形の形状を与えるものである. 言い換えれば, $S(n)$ の正則表現の既約分解において, $n \rightarrow \infty$ の極限で見られる集中現象のことである. 本節では, 大数の法則の枠組の中でこれに説明を加える.

$S(n)$ の $l^2(S(n))$ 上の左正則表現を L_n とする. L_n は $\mathbb{Y}_n$ にわたる既約表現の直和として

$$L_n \simeq \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} U_\lambda^{\oplus \dim \lambda}$$

と分解される. その正規化された指標をとれば

$$\delta_e = \tilde{\chi}^{L_n} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \frac{\dim^2 \lambda}{n!} \tilde{\chi}^\lambda = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \mathfrak{P}_n(\lambda) \tilde{\chi}^\lambda$$

を得る. Young 図形を横顔を通して連続図形とみなし, 縦横両方に $1/\sqrt{n}$ のスケーリングを施す:

$$\lambda \in \mathbb{Y}_n \subset \mathbb{D}_0 \longmapsto \lambda^{\sqrt{n}} \in \mathbb{D}_0, \quad \lambda^{\sqrt{n}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda(\sqrt{n}x).$$

$\lambda^{\sqrt{n}}(x)$ と $|x|$ とで囲まれた部分の面積が常に 2 に保たれていることに注意する. この状態で $n \rightarrow \infty$ にもっていくとき, Plancherel 測度で測って (13) 式の図形に Young 図形が集中していく様子が, 次の大数の弱法則によって記述される.

定理 ([28],[19]; [13] も参照) Plancherel 測度のもとに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)| = 0 \quad (\text{確率収束}),$$

すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{P}_n(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \|\lambda^{\sqrt{n}} - \Omega\|_{\text{sup}} \geq \epsilon\}) = 0$$

が成り立つ.

このように, 左正則表現の既約分解を $1/\sqrt{n}$ でスケーリング (ズームアウト) して眺めると, $n \rightarrow \infty$ につれて, Ω の形に近い Young 図形に対応する既約成分のみが浮かび上がってくる. 巨視的に見ればちょうど “ Ω -成分” だけが観測されるとも言える. この意味で, (13) 式の Ω を極限形状と呼ぶ.

6.2 極限形状の導出

連続図形の間のずれ $\omega_1 - \omega_2$ を一様ノルムで測るのに代えて,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k (\omega_1(x) - \omega_2(x)) dx \quad (k \in \mathbb{N})$$

を考えてみる. 両者の位相は一般には異なるが, 固定されたコンパクト区間上の連続関数の空間では, 2 つの位相は一致する (Weierstrass の多項式近似定理).

補題 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{D}$ に対し,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k (\omega_1(x) - \omega_2(x)) dx = \frac{2}{(k+1)(k+2)} \{M_k(\tau_{\omega_1}) - M_k(\tau_{\omega_2})\} \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (29)$$

$\mathbb{D}$ の位相を定めるものとして次の距離, 半距離の族を考える.

- (U) 一様位相 : $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega_1(x) - \omega_2(x)|$.
 (R) Rayleigh 測度のモーメント位相 : $\{|M_k(\tau_{\omega_1}) - M_k(\tau_{\omega_2})|\}_{k \in \mathbb{N}}$.
 (T) 推移測度のモーメント位相 : $\{|M_k(\mathbf{m}_{\omega_1}) - M_k(\mathbf{m}_{\omega_2})|\}_{k \in \mathbb{N}}$.

代数 $\mathbb{A}$ における多項式関係より, (R) と (T) の位相は一致する. 上の補題より, 固定されたコンパクト区間上では (U) と (R) が一致する.

大数の弱法則を示すには, 問題となっている確率変数について

- 平均の計算
- 分散の評価
- Chebychev の不等式で仕上げ

の手順を踏むのが普通である. ここでは, 上記位相の関係を踏まえた上で, Jucys-Murphy 元から作られたモーメント元に対してこの計算を行い, 極限形状の定理の証明の概略を見てみよう.

土俵になる (代数的) 確率空間は, $(\mathbb{A}|\mathbb{Y}_n, E^{\mathfrak{P}_n})$ あるいは $(\mathcal{Z}(S(n)), \tilde{\chi}^{L_n}(=\delta_e))$ である. 後者の中で, $\mathbb{E}_n J_n^k$ を扱う. 漸近表示 (27) 式より,

$$\tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^k) = \sum_{\sigma \in \overline{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)| n^{l(\sigma)} (1 + O(1/n)) \tilde{\chi}_{\sigma^\circ \cup (1^n - |\sigma^\circ|)}^{L_n}$$

を得るが, 右辺の指標値が 0 でないのは, $\sigma^\circ = \emptyset$ すなわち $\sigma = (2^p)$ の形のときに限る. このとき, $l(\sigma) = p = k/2$ であり, 非交差対分割の個数はよく知られているように Catalan 数に等しいから,

$$|NC((2^p))| = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} = M_{2p}(\mathbf{m}_\Omega).$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^k) n^{-k/2} = M_k(\mathbf{m}_\Omega).$$

この式は k が奇数でも正しい. これが, 平均の計算に当たる部分である.

分散の評価のために, (27) 式から

$$\tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^k \mathbb{E}_n J_n^l) - \tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^k) \tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^l) = O(n^{(k+l)/2-1})$$

を見るのは易しい. そうすると

$$\tilde{\chi}^{L_n}((\mathbb{E}_n J_n^k - n^{k/2} M_k(\mathbf{m}_\Omega))^2) = \{\tilde{\chi}^{L_n}(\mathbb{E}_n J_n^k) - n^{k/2} M_k(\mathbf{m}_\Omega)\}^2 + O(n^{k-1})$$

がしたがう。この左辺は、 $\tilde{\chi}^\lambda$ が中心で乗法的であることと (25) より

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \mathfrak{P}_n(\lambda) \tilde{\chi}^\lambda ((\mathbb{E}_n J_n^k - n^{k/2} M_k(\mathbf{m}_\Omega))^2) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_n} \mathfrak{P}_n(\lambda) \{M_k(\mathbf{m}_\lambda) - n^{k/2} M_k(\mathbf{m}_\Omega)\}^2$$

となるから、Chebychev の不等式を用いて、 $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\mathfrak{P}_n(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid |M_k(\mathbf{m}_{\lambda\sqrt{n}}) - M_k(\mathbf{m}_\Omega)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{o(n^k)}{n^k \epsilon^2} \longrightarrow 0$$

を得る。最後に、位相を一様距離に持つていくための注意。比較的簡単な考察から、Plancherel 測度に関して第 1 行と第 1 列が

$$E^{\mathfrak{P}_n}[\lambda_1] \leq 2\sqrt{n}, \quad E^{\mathfrak{P}_n}[\lambda'_1] \leq 2\sqrt{n}$$

をみたすことがわかる。そうすれば、

$$\mathfrak{P}_n\left(\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}} \leq K, \frac{\lambda'_1}{\sqrt{n}} \leq K\right) \geq 1 - \frac{4}{K}$$

となる $K > 0$ がとれて、コンパクト区間 $[-K, K]$ に話を帰着させることができる。

7 集中現象 II

7.1 Littlewood-Richardson 係数

Littlewood-Richardson 係数は数学の幅広い分野に出現する。ここでは、対称群の既約表現の外部積 (outer product) の既約分解の係数として扱う。

$m, n \in \mathbb{N}$ に対して $S(m), S(n)$ をそれぞれ $\{1, \dots, m\}, \{m+1, \dots, m+n\}$ の置換として $S(m+n)$ に埋め込む。 $\lambda \in \mathbb{Y}_m, \mu \in \mathbb{Y}_n$ に対して外部積 $\lambda \circ \mu$ の既約分解

$$U_\lambda \circ U_\mu = \text{Ind}_{S(m) \times S(n)}^{S(m+n)} U_\lambda \boxtimes U_\mu \simeq \bigoplus_{\nu \in \mathbb{Y}_{m+n}} c_{\lambda\mu}^\nu U_\nu$$

を考え、 $c_{\lambda\mu}^\nu$ を Littlewood-Richardson 係数と呼ぶ。正規化された指標の分解

$$\tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu} = \sum_{\nu \in \mathbb{Y}_{m+n}} \frac{c_{\lambda\mu}^\nu \dim \nu}{\dim \lambda \circ \mu} \tilde{\chi}^\nu$$

を与える $\mathbb{Y}_{m+n}$ 上の確率測度

$$\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}(\nu) = \frac{c_{\lambda\mu}^\nu \dim \nu}{\dim \lambda \circ \mu} \quad (\nu \in \mathbb{Y}_{m+n})$$

を (標準的な呼称ではないが) Littlewood-Richardson 測度と呼ぼう. この測度についての漸近挙動を論じるにあたり, 以下 m と n が同程度に大きくなる状況, すなわち $0 < \alpha < \beta < \infty$ を固定して

$$\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \alpha \leq m/n \leq \beta\}$$

という添字に沿う極限を考える. $1/\sqrt{m}, 1/\sqrt{n}$ のスケーリング極限で集中現象を観察する枠組は, 前節と同じである. (27) 式の漸近表示を用いて, 状態 $\tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}$ に関する平均, 分散を計算する. その際, 誘導指標公式の他に, Biane の漸近的指標公式 ([2]):

$$\tilde{\chi}_{\rho \cup (1^{n-|\rho|})}^{\lambda} = n^{-|\rho|} \prod_{j \geq 2} R_{j+1}(\mathbf{m}_{\lambda})^{m_j(\rho)} + O(n^{-l(\rho)/2-1}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (30)$$

($\rho \in \bar{\mathbb{Y}}, \lambda \in \mathbb{Y}(A)$) を用いる. ここで, $A > 0$ に対して

$$\mathbb{Y}_n(A) = \{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid \text{row}(\lambda) \leq A\sqrt{n}, \text{col}(\lambda) \leq A\sqrt{n}\}$$

とおいた. $\mathbb{Y}_n$ の元を A -均衡 Young 図形と言う. 一般に $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ ならば $\text{row}(\lambda)\text{col}(\lambda) \geq n$ が成り立つので, $\lambda \in \mathbb{Y}_n(A)$ は下からの評価 $\text{row}(\lambda) \geq \sqrt{n}/A, \text{col}(\lambda) \geq \sqrt{n}/A$ も持つ. $\lambda \in \mathbb{Y}_n(A)$ ならば $\mathbf{m}_{\lambda\sqrt{n}}$ の台が $[-A, A]$ に含まれるので, n によらない定数 $C_{A,k} > 0$ が取れて

$$M_k(\mathbf{m}_{\lambda}) \leq C_{A,k} n^{k/2}, \quad R_k(\mathbf{m}_{\lambda}) \leq C_{A,k} n^{k/2} \quad (31)$$

の評価が成り立つ.

Kerov 多項式 (23) を既知とすれば, (30) 式が次のようにして得られる. $\rho \in \bar{\mathbb{Y}}$ とする. (23) 式と共役類についての簡単な評価より

$$\Sigma_{\rho}(\lambda) = \prod_{j \geq 2} R_{j+1}(\mathbf{m}_{\lambda})^{m_j(\rho)} + (\text{重み次数に関する低次項})$$

がわかる. $\lambda \in \mathbb{Y}_n(A)$ ならば (31) 式が成り立つので, 主要項のオーダーは

$$\sum_{j \geq 2} \frac{j+1}{2} m_j(\rho) = \frac{1}{2} (|\rho| + \text{row}(\rho)),$$

低次項のはそれより 1 以上小さい. これは, Biane の公式のオーダーと一致している.

次の大数の弱法則は, Biane によって示された.

定理 ([2]) $A > 0, \omega, \psi \in \mathbb{D}$ が与えられたとする. $\lambda \in \mathbb{Y}_m(A), \mu \in \mathbb{Y}_n(A)$ で, 一様位相に関して

$$\lambda^{\sqrt{m+n}} \longrightarrow \omega, \quad \mu^{\sqrt{m+n}} \longrightarrow \psi \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

と収束する族を取ると, Littlewood-Richardson 測度 $\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}$ に関し, $m, n \rightarrow \infty$ のとき

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\nu^{\sqrt{m+n}}(x) - (\omega \boxplus \psi)(x)| \rightarrow 0 \quad (\text{確率収束})$$

すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}(\{\nu \in \mathbb{Y}_{m+n} \mid \|\nu^{\sqrt{m+n}} - \omega \boxplus \psi\|_{\sup} \geq \epsilon\}) \rightarrow 0$$

が成り立つ.

注意 (i) 連続図形の自由畳み込みは, 対応する推移測度の自由畳み込みによって定義する;

$$\mathfrak{m}_{\omega \boxplus \psi} = \mathfrak{m}_{\omega} \boxplus \mathfrak{m}_{\psi}.$$

(ii) $\lambda \in \mathbb{Y}_m(A), \mu \in \mathbb{Y}_n(A)$ ならば, Littlewood-Richardson 係数の性質より, $\mathfrak{L}_{\lambda,\mu}$ の台はある A' -均衡 Young 図形たちから成る.

上の定理の証明は, 大筋前節 (極限形状) と同じようにしてできる. (27) 式を $\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k$ に適用して

$$\tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}(\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k) = \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)|(m+n)^{l(\sigma)}(1+O(1/n))\tilde{\chi}_{\sigma \circ (1^{m+n-|\sigma|})}^{\lambda \circ \mu}$$

を得る. Frobenius の誘導指標公式と $\tilde{\chi}^{\lambda}, \tilde{\chi}^{\mu}$ に対する Biane の漸近的指標公式を用いて, 右辺の指標部分の計算を行うと,

$$\begin{aligned} & \tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}(\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k) \\ &= \sum_{\sigma \in \bar{\mathbb{Y}}_k} |NC(\sigma)|(m+n)^{m_2(\sigma)}(R_3(\mathfrak{m}_{\lambda}) + R_3(\mathfrak{m}_{\mu}))^{m_3(\sigma)} \cdots (R_k(\mathfrak{m}_{\lambda}) + R_k(\mathfrak{m}_{\mu}))^{m_k(\sigma)} \\ & \quad + O(n^{k/2-1}) \end{aligned}$$

となる. $R_2(\mathfrak{m}_{\lambda}) = m$, 自由畳み込みの自由キュムラント, モーメント-自由キュムラント公式に注意して

$$\tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}(\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k) = M_k(\mathfrak{m}_{\lambda} \boxplus \mathfrak{m}_{\mu}) + O(n^{k/2-1})$$

を得る. これで平均の計算ができた. 分散の評価は, 再び誘導指標公式を用いて前節と同じようになされる. 結果,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}((\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k) - M_k(\mathfrak{m}_{\lambda} \boxplus \mathfrak{m}_{\mu}))^2 &= \{\tilde{\chi}^{\lambda \circ \mu}(\mathbb{E}_{m+n} J_{m+n}^k) - M_k(\mathfrak{m}_{\lambda} \boxplus \mathfrak{m}_{\mu})\}^2 \\ & \quad + O(n^{k/2-1}). \end{aligned}$$

さらにこの左辺は

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Y}_{m+n}} \mathfrak{L}_{\lambda, \mu}(\nu) \{M_k(\mathbf{m}_\nu) - M_k(\mathbf{m}_\lambda \boxplus \mathbf{m}_\mu)\}^2$$

と書けるので, Chebychev の不等式を使うところも同様である.

今扱っている $1/\sqrt{m+n}$ でスケールされた図形 (およびその推移測度) は, 一様に有界な台を持っている. したがって, 上に得られた推移測度のモーメント位相に関する集中現象は, 一様位相に関しても成り立っている.

7.2 他の既約分解における集中現象

Young 図形が Plancherel 測度や Littlewood-Richardson 測度以外の確率にしたがって分布している場合にも, 同様の集中現象が起こる例がいろいろ知られている. それらは, $S(n)$ の何らかの表現の既約分解から生じる $\mathbb{Y}_n$ 上の確率測度であり, たとえば次のようなものがある.

- (R) $S(n_1 + \cdots + n_p)$ の既約表現の Young 部分群 $S(n_1) \times \cdots \times S(n_p)$ への制限 ([2])
- (T) $S(n)$ の既約表現のテンソル積 ([2])
- (Z) $H_n \simeq (\mathbb{Z}_2)^n \rtimes S(n)$ から $S(2n)$ への既約表現の誘導 ([10])
- (F) $S(\infty)$ の因子表現の $S(n)$ への制限 ([3])

(R) では, 各 j について $n_j/n \rightarrow t_j \in (0, 1)$, $n = n_1 + \cdots + n_p$ とすると, $1/\sqrt{n}$ -スケールリングで与えられた $\omega \in \mathbb{D}$ に収束する $\lambda \in \mathbb{Y}_n$ に対して, 既約表現 U_λ の Young 部分群への制限の既約分解は $1/\sqrt{n}$ -スケールリングで $\omega_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \omega_p$ -成分に集中する. ここに, ω_j は, ランク t_j の射影による ω の自由圧縮 (free compression) である. なお, 連続図形の自由圧縮は, 対応する推移測度のそれでもって定義される.

(T) では, どんな既約表現のテンソル積も, $1/\sqrt{n}$ -スケールリングで極限形状 Ω に集中する. 対称群の既約表現のテンソル積の既約分解を記述するのは一般には難しいが, 集中現象は簡明である.

(Z) では, H_n の既約表現が $\{(m, \lambda, \mu) | m \in \{1, 2, \dots, n\}, \lambda \in \mathbb{Y}_m, \mu \in \mathbb{Y}_{n-m}\}$ でパラメトライズされるが, どの既約表現を $S(2n)$ に誘導しても, 既約分解は $1/\sqrt{2n}$ -スケールリングのもとに極限形状 Ω に集中する.

(F) の因子表現は, 有名な Thoma パラメータ

$$\{\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0), \beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0) \mid \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) \leq 1\}$$

でパラメトライズされる ([27],[29]). これらの $S(n)$ への制限は, たとえば $\alpha = \beta = \mathbf{0}$ ならば正則表現 (したがって Plancherel 測度), $\alpha = (1/N, \dots, 1/N, 0, 0, \dots)$ ($1/N$ が N 個並ぶ), $\beta = \mathbf{0}$ ならば $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ への自然な表現である. どの因子表現の場合も $1/\sqrt{n}$ -スケーリングで集中現象が見られる. たとえば後者の $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ の例で, $N \sim \sqrt{n}$ の域では, 集中先は Marčenko-Pastur (自由 Poisson) 分布の変形版で記述される.

8 Young 図形のゆらぎ

ひとたび巨視的な集中現象が見られれば, 集中先の近傍に目を凝らしてどのようなゆらぎ (fluctuation) が観測されるかを問うのは自然である. Plancherel 測度に対しては, この方面の研究がかなり進んでいる. ゆらぎを端的に記述する結果として, 次の Kerov および Ivanov-Olshanski によるものがある.

定理 ([14],[13]) $[-2, 2]$ 上の Gauss 超過程 Δ があって, Plancherel 測度に関し

$$\lambda^{\sqrt{n}} \sim \Omega + \frac{2}{\sqrt{n}}\Delta \quad (n \rightarrow \infty) \quad (32)$$

が成り立つ. より正確に言うと, 任意有限個のテスト関数 $f_1, \dots, f_p$ に対し,

$$\int_{-2}^2 \frac{\sqrt{n}}{2} (\lambda^{\sqrt{n}}(x) - \Omega(x)) f_j(x) dx \quad (j = 1, \dots, p) \quad (33)$$

の $\mathbb{Y}_n$ 上の Plancherel 測度 $\mathfrak{P}_n$ に関する結合分布が $n \rightarrow \infty$ で Gauss 分布に収束する.

実際, Δ は, Chebychev 多項式を用いたランダム Fourier 級数で係数が独立同分布の Gauss 確率変数になっているもので与えられる.

(32) 式は, 縦横 $1/\sqrt{n}$ でスケーリングして極限形状 Ω を捉えた後, Ω とのずれを縦方向にスケールを元に戻して測ったものである. そうすると, 区間の端 ± 2 の近くではゆらぎが大きくて, ずれがもはや関数では記述できなくなっている.

(29) 式はゆらぎの計算にももちろん有用である. (29) 式と (33) 式を見比べれば, $\mathbb{A}$ の中で生成元たちの結合分布, およびその極限を計算するという作業が見えてくる. このような文脈の中, 最も基盤になるのが既約指標に対する次の Kerov の中心極限定理である.

定理 ([14]) 任意の $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ と $x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{P}_n(\{\lambda \in \mathbb{Y}_n \mid n^{-k/2} \Sigma_k(\lambda) \leq x_k \ (k = 2, \dots, m)\}) = \prod_{k=2}^m \int_{-\infty}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-x^2/2k} dx$$

が成り立つ. すなわち, 異なる長さのサイクルでの既約指標の値を中心極限定理のスケールで正規化したものは, $n \rightarrow \infty$ で漸近的に独立であり, 極限は Gauss 分布にしたがう.

大雑把に言って, (32) 式は, A での生成元の変換則を通して Kerov の中心極限定理を Rayleigh 測度の結合分布に翻訳したものである. 同じようにして推移測度に読みかえれば, Wigner の半円分布のまわりのゆらぎを得る.

最後に, Kerov の中心極限定理の幾つかの方面への発展事項を列挙して, 本稿を終る.

1. 上述のような A の他の生成元の Plancherel 測度に関する中心極限定理 (Ivanov-Olshanski[13])
2. サイクルに限らず任意の共役類での既約指標の値の Plancherel 測度に関する中心極限定理 (Hora[8], Ivanov-Olshanski[13])
3. 隣接作用素の (生成・消滅作用素による) 量子分解を通した非可換中心極限定理 (Hora[9])
4. 既約指標の互換での値の Plancherel 測度に関する誤差評価つき中心極限定理 (Fulman[5])
5. Jack 測度 (Plancherel 測度の α -変形) と既約指標の互換での値の α -変形に対する誤差評価つき中心極限定理 (Fulman[6])
6. Kerov 多項式の低次項の解析を通した精密化 (Śniady[21],[22])

参考文献

- [1] 明出伊類似, 尾畑伸明, 量子確率論の基礎, 数理情報科学シリーズ 21, 牧野書店, 2003.
- [2] Biane, P., Representations of symmetric groups and free probability, Adv. Math. 138 (1998), 126–181.
- [3] Biane, P., Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups, Internat. Math. Res. Notices (2001), 179–192.
- [4] Biane, P., Characters of symmetric groups and free cumulants, In: A.M. Vershik (ed.), Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics, LNM 1815, 185–200, Springer, 2003.
- [5] Fulman, J., Stein’s method and Plancherel measure of the symmetric group, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [6] Fulman, J., Stein’s method, Jack measure, and the Metropolis algorithm, math.CO/0311290.
- [7] Hiai, F., Petz, D., The semicircle law, free random variables and entropy, MSM 77, Amer. Math. Soc., 2000.

- [8] Hora,A., Central limit theorem for the adjacency operators on the infinite symmetric group, *Commun. Math. Phys.* 195 (1998), 405–416.
- [9] Hora,A., A noncommutative version of Kerov’s Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, In: A.M.Vershik (ed.), *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics*, LNM 1815, 77–88, Springer, 2003.
- [10] Hora,A., Jucys-Murphy elements, walks on Young graph and applications to asymptotic representation theory, preprint.
- [11] 洞 彰人, 対称群の表現と漸近的組合せ論, ‘数学’, to appear.
- [12] Ivanov,V., Kerov,S., The algebra of conjugacy classes in symmetric groups and partial permutations, *J. Math. Sci.* 107 (2001), 4212–4230.
- [13] Ivanov,V., Olshanski,G., Kerov’s central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams, In: S.Fomin (ed.), *Symmetric functions 2001*, 93–151, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [14] Kerov,S., Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group, *C. R. Acad. Sci. Paris* 316 (1993), Série I, 303–308.
- [15] Kerov,S.V., Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem, *Funct. Anal. Appl.* 27 (1993), 104–117.
- [16] Kerov, The boundary of Young lattice and random Young tableaux, *DIMACS Series in Discrete Math. Theoret. Computer Sci.* 24 (1996), 133–158.
- [17] Kerov,S.V., *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*, MMONO 219, Amer. Math. Soc., 2003.
- [18] Kerov,S., Olshanski,G., Polynomial functions on the set of Young diagrams, *C. R. Acad. Sci. Paris* 319 (1994), Série I, 121–126.
- [19] Logan,B.F., Shepp,L.A., A variational problem for random Young tableaux, *Adv. Math.* 26 (1977), 206–222.
- [20] 尾畑伸明, 量子確率論における独立性とグラフのスペクトル解析, ‘数学’, to appear.
- [21] Śniady,P., Free probability and representations of large symmetric groups, [math.CO/0304275](https://arxiv.org/abs/math.CO/0304275).
- [22] Śniady,P., Symmetric groups and random matrices, [math.CO/0301299](https://arxiv.org/abs/math.CO/0301299).
- [23] Speicher,R., Combinatorial theory of the free product with amalgamation and operator-valued free probability, *Mem. Amer. Math. Soc.* 627, 1998.
- [24] Speicher,R., Free probability theory and random matrices, In: A.M.Vershik (ed.), *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics*, LNM 1815, 53–73, Springer, 2003.
- [25] 寺田 至, ヤング図形のはなし, 日本評論社, 2002.
- [26] 寺田 至, 原田 耕一郎, 群論, 岩波講座現代数学の基礎 14, 岩波書店, 1997.
- [27] Thoma,E., Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Z.* 85 (1964), 40–61.
- [28] Vershik,A.M., Kerov,S.V., Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux, *Soviet. Math. Dokl.* 18 (1977), 527–531.

- [29] Vershik, A.M., Kerov, S.V., Asymptotic theory of characters of the symmetric group, *Funct. Anal. Appl.* 15 (1981), 246–255.
- [30] Voiculescu, D.V., Dykema, K.J., Nica, A., *Free random variables*, CRM Monograph Ser. 1, Amer. Math. Soc., 1992.