

乱流境界層におけるバースト現象のフラクタル性

名古屋大学大学院

辻 義之

Yoshiyuki Tsuji

名古屋大学工学部

中村 育雄

Ikuo Nakamura

1. はじめに

乱流境界層中の整構造（コヒーレント・ストラクチャー）については、最近の Robinson の報告にあるように、いまだその正確な肖像は定義されていない⁽¹⁾。整構造は、流れ場の状況に応じてその姿を多様に変化させる。敢えて抽象的な定義をすれば、“少なくとも一つの基本的な変数（速度成分、濃度、温度など）が、流れ場の局所最小スケールに比べて時間的・空間的に十分に大きな領域にわたって相関を示す三次元的な構造”ということになる⁽¹⁾。整構造は、乱流の大まかな統計量を予測するうえでのモデリングや、乱流の制御をおこなううえで必要不可欠な現象である。乱流境界層に限れば、壁近傍における乱れ生成の力学的メカニズムに関して、外層の大スケールの運動とエントレイメントとに関して、また外層と内層の相互作用の原因として、研究の対象となってきた。境界層中の整構造は、大きく四つのグループに分けることができる⁽²⁾。ここでは特に壁近傍（ $y^+ = u_* y / \nu < 100$ ； y は壁からの距離， u_* は摩擦速度、

ν は動粘性係数) において、低速流体が不安定化の後、主流方向へ放出される過程 (エジェクション) と外層の高速流体が壁近傍へ流入する過程 (スweep) とに注目する。従来からこれらの現象を抽出するには、I) 可視化⁽³⁾、II) VITA 法⁽⁴⁾、III) 四象限分割法⁽⁵⁾ が主に用いられてきた。最近では、より複雑な処理を必要とするが IV) Proper Orthogonal Decomposition⁽⁶⁾、V) Stochastic Estimation⁽⁷⁾、VI) Wavelets⁽⁸⁾ 等が用いられている。今回は、II) 及び III) によってバーストを抽出し、その構造についての解析結果を報告する。

2. 実験条件

実験は圧力勾配の無い平板乱流境界層でおこなった。基準レイノルズ数 U_0/ν を 31600 に設定し、前縁から 1900 (mm) の位置で流速の測定をした。この時、層外主流の平均速度 U_0 は約 5.0 (m/s) となる。プローブは I 型及び X 型を用いた。熱線は 5 μ m のタングステン線に銅メッキを施し、受感部を 1 mm (無次元化長さ $l^+=14.0$) とした。アナログデータは 12 bit A/D コンバータによって 5 kHz でサンプリングし、その後の処理は、名古屋大学大型計算機センターにデータを転送しておこなった。

境界層厚さ δ 、運動量厚さ θ は $\delta=40.0$ (mm), $\theta=4.80$ (mm) であり、各々の長さにもとづくレイノルズ数は、 $Re_\delta=1.4\times 10^4$ 、 $Re_\theta=1.69\times 10^3$ となる。クラウザー線図法を用いて計算した壁面摩擦係数 C_f 及び摩擦速度 u_* は 0.0039, 0.22 (m/s) であ

った。壁近傍の代表点として $y/\delta=0.1$ ($y^+=55.94$) における測定データから計算した長さ、時間尺度は以下のとおりである。

積分スケール： 7.32 (ms) (x 方向), 1.96 (ms) (y 方向)

マイクロスケール： 2.10 (ms) (x 方向), 1.48 (ms) (y 方向)

テイラーの凍結乱流仮説と等方性を仮定して求めたコルモゴロフの時間・空間スケールは、約 0.60 (ms) , 0.10 (mm) であった。ここで、x は流れ方向、y は壁に垂直方向である。

3. バースト検出方法

3. 1 V I T A 法 VITA 法は移動平均法的一种で、局所的に大きな乱れを生成する現象を抽出し、バーストと定義する。時刻 t において、時間幅 T^+ にわたる変動速度の局所の平均値と二乗平均値を以下のように定義する⁽⁴⁾。

$$u_A(t, T^+) = \frac{1}{T^+} \int_{t-T^+/2}^{t+T^+/2} u(t') dt', \quad u_R(t, T^+) = \left\{ \frac{1}{T^+} \int_{t-T^+/2}^{t+T^+/2} u(t')^2 dt' \right\}^{1/2} \quad (1)$$

よって、時刻 t での局所の乱れのゆらぎ（即ち、分散）は、

$$\text{var}(t, T^+) = u_R(t, T^+)^2 - u_A(t, T^+)^2. \quad (2)$$

局所の分散がある数居値を越えたときをバーストと定義する。

ただし、もう一つの条件（その時刻での速度の微係数が正になる）を加えて、定義関数は、

$$S_V(t, T^+) = \begin{cases} 1 : \text{var}(t, T^+) > k u_{rms} \text{ and } du/dt > 0 \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases}, \quad (3)$$

となる。上式から明らかなように、VITA 法は局所の変動速度

の分散が大きくなる（乱れを生成する）現象を抽出する。即ち、流れ方向速度信号中の低速から高速側への急激な立ち上がりを検出するもので、エジェクションの後にスweepが起こる一連の過程に対応する。以後、この過程をVバーストと呼ぶ。無次元平滑時間 T^+ と数居値パラメータ k は、Blackwelderらの研究にあわせ、 $T^+=10$, $k=1.0$ とした⁽⁴⁾。

3. 2 四象限分割法⁽⁵⁾ 時間平均レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ に

対して、時刻 t での瞬時のレイノルズ応力を $-\widetilde{uv} \equiv -u(t)v(t)$ とする。瞬時レイノルズ応力が正となる第二象限の事象（エジェクション）をバーストと定義する。バースト定義関数は、

$$S_R(t, H') = \begin{cases} 1 : |-\widetilde{uv}| > H' |-\overline{uv}| \text{ and } i=2 \\ 0 : \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

添え字 i は四象限分割の各象限で、以下を意味する。

$$\begin{aligned} i=1 : u > 0 \text{ and } v > 0, & \quad i=2 : u < 0 \text{ and } v > 0. \\ i=3 : u < 0 \text{ and } v < 0, & \quad i=4 : u > 0 \text{ and } v < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

四象限分割法によって抽出されるバースト（以後、Qバーストと呼ぶ）は、瞬時レイノルズ応力が時間平均レイノルズ応力の H' 倍以上になる第二象限の現象である。式(4)から同様に、第四象限（スweep）の定義関数も求められるが、これはQバーストとは呼ばないことにする。以後、スweep、エジェクションという言葉は、両者を対比させる時に用いる。図1に瞬時速度信号及びバースト定義関数（横軸上のパルス）を示す。

4. 解析結果

4. 1 集合平均

図 2 は壁変数で無次元化したバーストの平均発生周期である。Vバーストの結果は壁領域でほぼ一定の値をとり、それはBlakwelderらの結果⁽⁴⁾に良く一致している。Qバーストの発生周期は、Vバーストに比べて非常に小さくなる。これは四象限分割法が、連続的に起こる短い周期の小規模なバーストも検出するからと考えられる(図 1 参照)。実際、発生周期の確率密度関数を計算し、QバーストがVバーストに比べて、短いバースト周期の存在確率が高いことを確認した。

図 3 はVバースト、Qバーストの集合平均波形である。縦軸は集合平均の値をrms値で無次元化し、横軸は壁変数での無次元化時間である。Vバーストには、エジェクション・スイープの過程が良く捉えられている。Qバーストは H' の値を大きくすれば、瞬時レイノルズ応力の生成が大きな構造を抽出できる。集合平均波形から判断する限り、平均的なバーストの規模はVバーストの方が大きい。

4. 2 定義関数の解析

バーストの大きさを含めた分布は、式(3),(4)の定義関数によって把握されよう。各パルスの位置はバースト発生位置に対応し、パルスの大きさはバーストの規模に比例していると考えられるからである。仮に時間軸を空間軸に置き換えられるならば、定義関数は壁領域におけるバーストの一次元的な幾何学的情報を与えてくれる。定義関数の

時間平均として、間欠係数 Γ を考える。VITA 法では壁領域において、 $\Gamma=0.024$ のほぼ一定値をとる。四象限分割の場合は、パラメータ H' の大きさによって定義関数の性質は異なる。図 4 にはエジェクション ($i=2$) 及びスweep ($i=4$) の平均発生周期と間欠係数の値を示した。 H' の値が小さいときは、第四象限の方が発生周期は短く間欠係数の値も大きな値をとっている。しかし、 H' が大きくなると、この傾向は第二象限と逆になる。つまり、壁領域では小規模な現象としてはスweepが卓越するものの、大規模な現象としてはエジェクションが優勢であることが分かる。

図 5 は定義関数のパワースペクトルである。仮にパルス発生間隔の確率分布が指数型であれば、スペクトルはローレンツ型（低波数で一定値をとり、高波数では -2 乗のべき指数で減衰する）となる。Vバーストのそれは、まさにローレンツ型である。Qバーストは、高波数では傾き -2 で減衰しているようであるが、低波数ではローレンツ型とは異なる。図中に示されている -1.4 の傾きについては、次章で説明をおこなう。

4. 3 バーストとフラクタル

フラクタルを用いてバースト

の分布を特徴づけてみる。図 6 は定義関数の概要である。時間軸を大きさ ε のボックスに等分割し、定義関数が 1 の領域を少しでも含むボックスの数を $N(\varepsilon)$ とする。 ε の変化に対して、 $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}$ なる関係が成り立てば、分布はフラクタルと定義され

D はフラクタル次元と呼ばれる。図 7 に定義関数の解析結果の一例を示す。Q バーストのグラフには傾き一定の領域が存在し、フラクタル構造の存在を示唆する（ただし、 ε の大きなところであらわれる直線部の傾きは -1 でフラクタルとは関係ない）。 $H'=2.0$ で、フラクタル次元は $D=0.58$ である。図中の矢印はコルモゴロフ・スケール及び、積分スケールである。壁領域の $i=2, i=4$ のいずれの定義関数についても、 $0.0 \leq H' \leq 2.0$ の範囲でこの傾向は確認された。これに対し、V バーストのグラフは滑らかに変化し、直線領域は確認できない。以上より、四象限分割法で抽出される Q バーストの時間的（空間的）分布は自己相似性を有していることが分かる。これは前述の解析からも分かるように、四象限分割法は H' があまり大きくなければ、小スケールのバーストから規模の大きなバーストまで検出でき、その分布が統計的に同じであると言える。一方、VITA 法の場合は検出基準が厳しく、抽出される V バーストは規模の大きなものばかりであると考えられる。それゆえ、その構造には細かな構造があまり存在せず、統計的自己相似性は期待できない。

図 8 は Q バースト定義関数のフラクタル次元の変化を示す。 H' が小さいときには、第四象限の方がわずかではあるが次元の値は大きくなっており、構造が第二象限より複雑になっていることを意味する。しかし、 $H'=2.0$ となると、次元の値は逆転する。これは図 4 の傾向と良く対応している。

フラクタル的な分布に対しては、一般にそのスペクトルはベキ構造を持つ。一次元的なパルスについても、そのフラクタル次元とベキ指数との関係が導かれている。フラクタル次元 D の定義関数のパワースペクトルは高波数側で、 $-(2-D)$ の傾きで減衰する。図 7 より $H'=2.0$ のとき、 $D=0.58$ であるから、傾き -1.4 程度でスペクトルは減衰する。しかし、図より明らかな様に、ローレンツ型のスペクトルとの差異は微妙である。

仮に、時間軸を空間軸に置き換えれば、以上は定義関数の流れ方向 (x 軸) の構造の解析である。次に、バースト構造のспан方向 (z 軸) への分布を考察してみる。位置 $R=(x, y, z)$ における Q バーストの定義関数を、新たに $S_R(t, H', R)$ とする。 x は境界層の前縁から $1900 (mm)$ 、 y は $y^+=30$ に固定し、密度相関関数 $C(\xi)$ を $C(|z_1 - z_2|) \equiv \langle S_R(t, H', z_1) S_R(t, H', z_2) \rangle$ と定義すれば、 Q バーストのспан方向へのフラクタル性は、 ξ の変化の対して密度相関関数が、 $C(\xi) \propto \xi^{-(1-D)}$ の関係を満たすことである⁽⁹⁾。ただし $\langle \rangle$ は時間平均であり、 D はフラクタル次元である。図 9 に密度相関関数の両対数プロットを示す。第二、第四象限いずれの場合にも、明確な直線部が存在している。しかし、次元の値は図 8 の値とは異なる。 H' の変化に対する次元の変化の傾向は同じであるが、定量的には一致しない。これは、スweep、エジェクション領域が流れ方向とспан方向では異なるフラクタル次元を持つ、セルフアフィン・フラクタル

ルを構成しているからと考えられる。等方性乱流でない限り、乱流場は流れ方向（ x 軸）と垂直方向（ y 軸）、スパン方向（ z 軸）では性質が大きく異なるから、上述の結果も妥当なものといえる。

4. 4 散逸場とフラクタル エネルギー散逸場の間欠性は、

最近の実験やシミュレーションによって活発な議論の対象となり、カスケード・モデルの構築など興味深い問題を多数提供している⁽¹⁰⁾。ここでは、それらに対する若干の考察とバーストとの関わりについて述べる。熱線を用いた実験データから、瞬時の散逸量を厳密に求めることは、まず不可能である⁽¹¹⁾。ここではテイラーの凍結乱流の仮説と等方性を仮定して、近似的に $\varepsilon(t) \approx 15\nu (du/dt')^2|_{r=r_0}$ と見積もった。図 10 に瞬時散逸の分布を示す。縦軸は ε の時間平均 $\langle \varepsilon \rangle$ で無次元化してある。速度微分は注目した点の前後 10 点を用い、7 次のスプライン補間によって計算した。散逸場が間欠的になっていることは、図 10 を見れば明かであろう。ここでは、慣性小領域での議論は無視（境界層壁近傍ではパワースペクトルに慣性小領域はほとんど存在しない）して、図に示された ε の分布をどの様に特徴づけるかを考える。最も重要かつ容易に計算される、相関、スペクトル、確率密度関数はいずれも間欠性と結びつく重要な情報を与えてくれる。計算は複雑であるが、 ε の分布の幾何学的情報を取り入れた $f-\alpha$ スペクトルも提案されており、最近の研究で

は ε の分布を最も良くとらえているという報告もある⁽¹²⁾。ここでは、 ε の間欠性をより簡潔に特徴づけてみる。瞬時の散逸に対して、以下の定義関数を導入する。

$$S_E(t, s) = \begin{cases} 1 : \varepsilon(t) > s\langle\varepsilon\rangle \\ 0 : otherwise \end{cases} \quad (6)$$

定義関数の解析は、バーストの場合と同様である。敷居値パラメータ s を大きくすれば、散逸の強い間欠領域を取り出すことができる。最も興味があるのは、この間欠構造にフラクタル性が有るか無いかである。図 11 にその結果を示す。フラクタル構造は確認できた。しかし、次元の値は、敷居値によって異なる。 s が大きくなると、一定値に漸近する傾向にあるが（図 12 参照）、この辺りではグラフに明確な直線部は存在しなくなってくる。 s が大きな場合は、測定データを増やしてもう少し考察する必要がある。なお、散逸場の特徴付けとして、興味深い方法が提案されている。文献（13）を参照して載きたい。

最近の報告によると⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾、 ε の分布がマルチフラクタルになっており、実験と同様な $f-\alpha$ スペクトルが簡単な二項分岐モデル（ p モデル）で再現できると言われている。しかし、実際に両者の確率密度関数（ $p(\varepsilon_r) : \varepsilon_r = \int_{V_r(x)} \varepsilon(x') dx' / V_r$ ）を比較してみれば分かることだが、 $p(\varepsilon_r)$ の小さなところでの分布は一致しない。 $f-\alpha$ スペクトルは、確率の小さなところも十分とら

え得る理論だが、その違いがでてこないのは疑問である。今のところ、実験データから $f-\alpha$ スペクトルを求めるには一般化次元 D_0 を介するのが主流あるが、どうもこのあたりに問題があるのではないかと（有限サイズの影響等ではなく、実験データの解析に対する基本的な欠陥）と筆者は考えている。

整構造はエネルギーカスケードの第一段階とも考えられ、散逸場に与える影響は大きい。本来、波数空間で議論する方が明快であるが、ここでは物理空間で考えてみる。バーストと散逸率との関係は、定義関数 $S_R(t, H')$ と $S_E(t, s)$ の相関に現れるであろう。そこで、以下の相関関数、

$$C(\tau) = \langle S_R(t_1, H') S_E(t_2, s) \rangle, \quad \tau = |t_1 - t_2|, \quad (7)$$

の分布を調べたが、相関は確認できなかった。

次に集合平均を考えてみる。バーストの定義関数が、1 から 0 に変わる点を $t_i; i=1, 2, 3 \cdots n$ とする（ t_i はバーストが終了する位置に対応する）。次式の集合平均を定義する。

$$[\varepsilon(\tau)] \equiv \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon(t_i) \varepsilon(t_i + \tau)}{n \langle \varepsilon \rangle}. \quad (8)$$

上式はエジェクション、スweep終了後の散逸率の平均的な分布を表す（図 13, 14）。興味深いのはエジェクション終了後に、非常に高い散逸率のピークが認められることである。一方、スweep終了後には散逸率は、時間平均値 $\langle \varepsilon \rangle$ にほぼ同じ

である。式(7),(8)の関係については今後の研究課題とし、さらなる解析を加える予定である。なお、バースト定義関数についての詳細は、文献(14)を参照して戴きたい。

5. 終わりに

乱流境界層壁近傍 ($y^+ < 100$) におけるバースト構造を実験的に解析し、以下の結論を得た。

∴ 四象限分割法によって検出された、バースト定義関数には統計的な自己相似性(フラクタル性)が存在する。ただし、それは流れ方向とスパン方向では、そのフラクタル次元が異なるセルフアフィン・フラクタルである。これに対し、VITA法から検出される定義関数にはフラクタル性は確認できない。

∴ テイラーの凍結乱流仮説と等方性を仮定して求めた散逸場で、ある数居値以上の高い散逸を示す間欠領域には、フラクタル性が存在する。しかし、数居値パラメータ s (式(6))によって、間欠領域のフラクタル次元は異なる。

∴ スイープ・エジェクションの定義関数を用い、散逸場の集合平均波形を調べた。エジェクション終了後、散逸は時間平均散逸量の2倍近い値を持つ。しかし、スイープ終了後には、その様な傾向は見られず、ほぼ時間平均値に等しい。

[参 考 文 献]

- (1) Robinson, S. K., Ann. Rev. Fluid Mech., 23(1991)601.
- (2) Cantwell, B. J., Ann. Rev. Fluid Mech., 13(1981)457.
- (3) Bogard, D. G. and Tiederman, W. G.,
J. Fluid Mech., 162(1986)389.
- (4) Blackweder, R. F. and Haritonidis, J. H.,
J. Fluid Mech., 132(1983)87.
- (5) Raupatch, M. R., J. Fluid Mech., 108(1981)363.
- (6) Nadine Aubry et al., J. Fluid Mech., 192(1988)115.
- (7) Guezennec, Y. G., Phys Fluids A., 1(1989)1054.
- (8) Liandart, J. and Moret-Bailly, F.,
Eur. J. Mech., B/Fluids, 9(1990)1.
- (9) Feder, J., *FRACTALS*, (1988)p104, Penum Press
- (10) Sreenivasan, K. R., Ann. Rev. Fluid Mech., 23(1991)539.
- (11) Klebanoff, P. S., NASA Report 1247, (1954)1135.
- (12) Meneveau, C. and Sreenivasan, K. R.,
J. Fluid Mech., 224(1991)429.
- (13) Takayasu, M., Characterization of violent fluctuations by interval distributions of level-sets. submitting
- (14) 辻 義之、中村育雄、伊藤正利、機械学会論文集,
58巻547号 (1992) 706 : 辻 義之、中村育雄、伊藤正利、
機械学会論文集, 1992年9月掲載予定

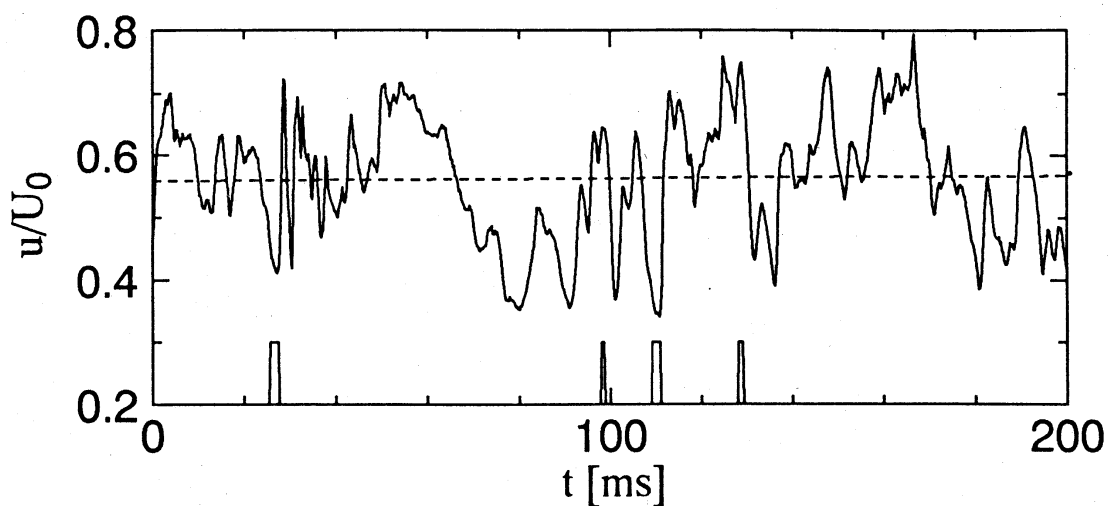


図 1 (a) 流れ方向速度信号及び V バースト定義関数 ($y^+ = 27.97$)

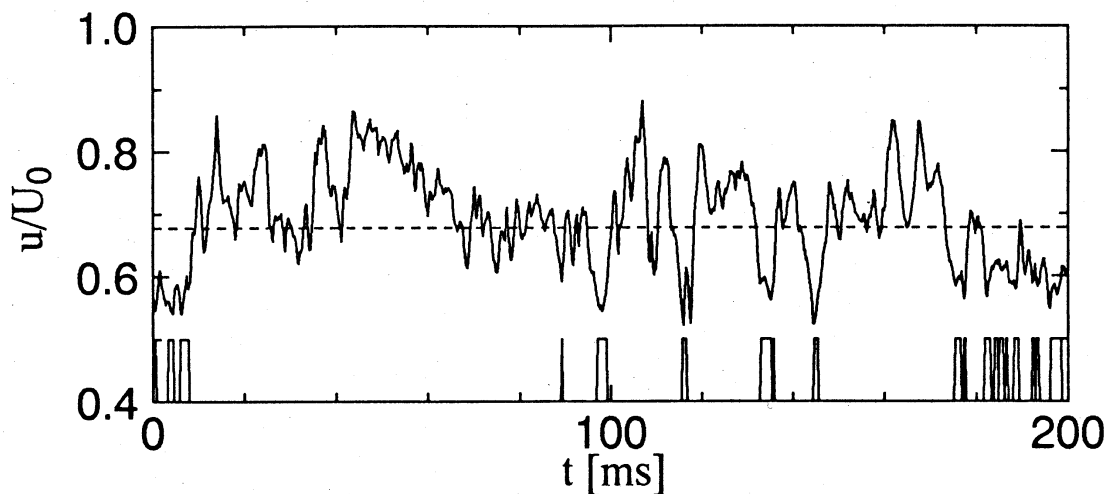


図 1 (b) 流れ方向速度信号及び Q バースト定義関数 ($y^+ = 55.94$)

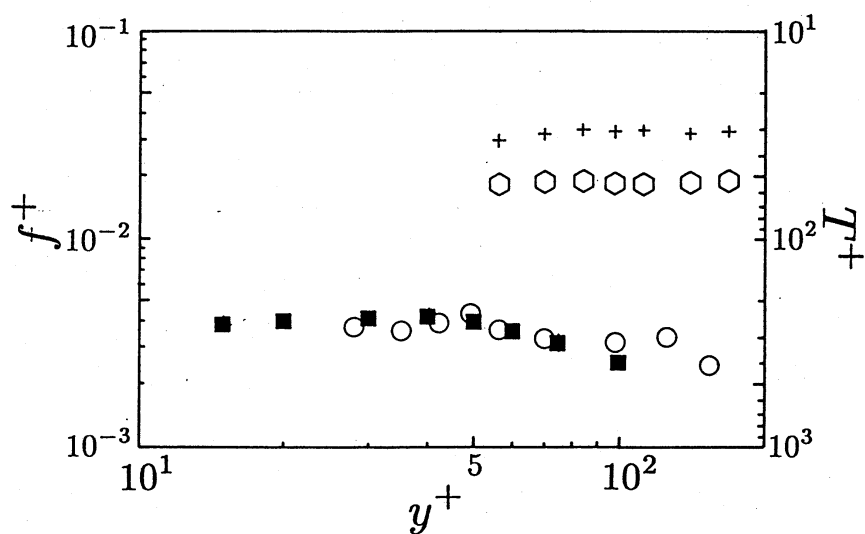


図 2 バースト平均発生周期. [■ : Blackwelder, ○ : VITA 法,
+ : 四象限分割法 ($H' = 2.0$), ◇ : 四象限分割法 ($H' = 4.0$)]

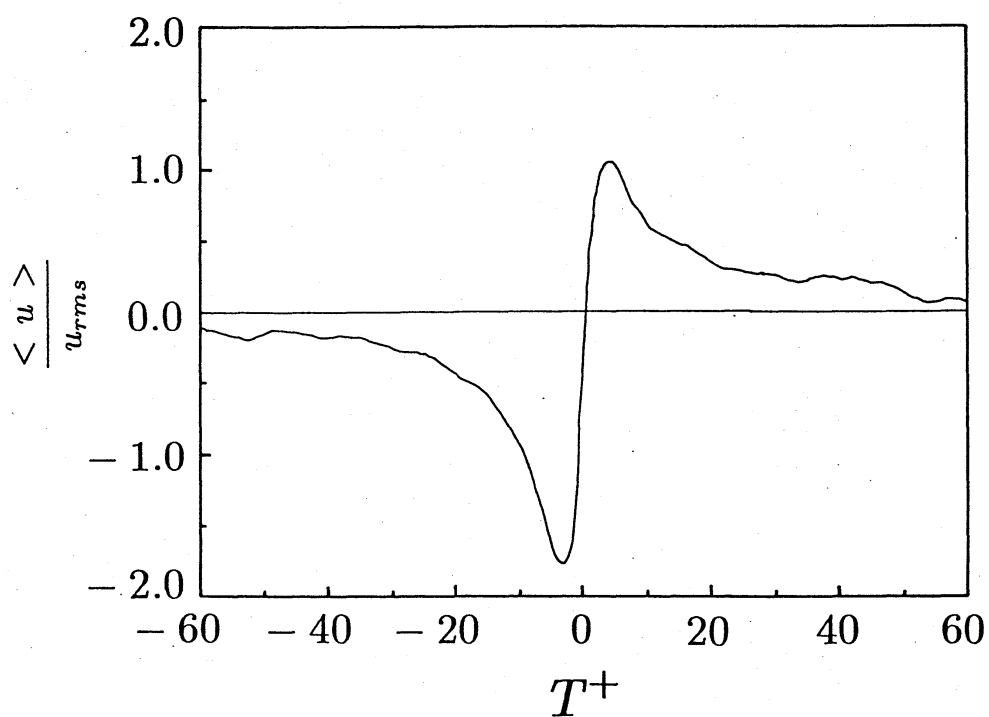
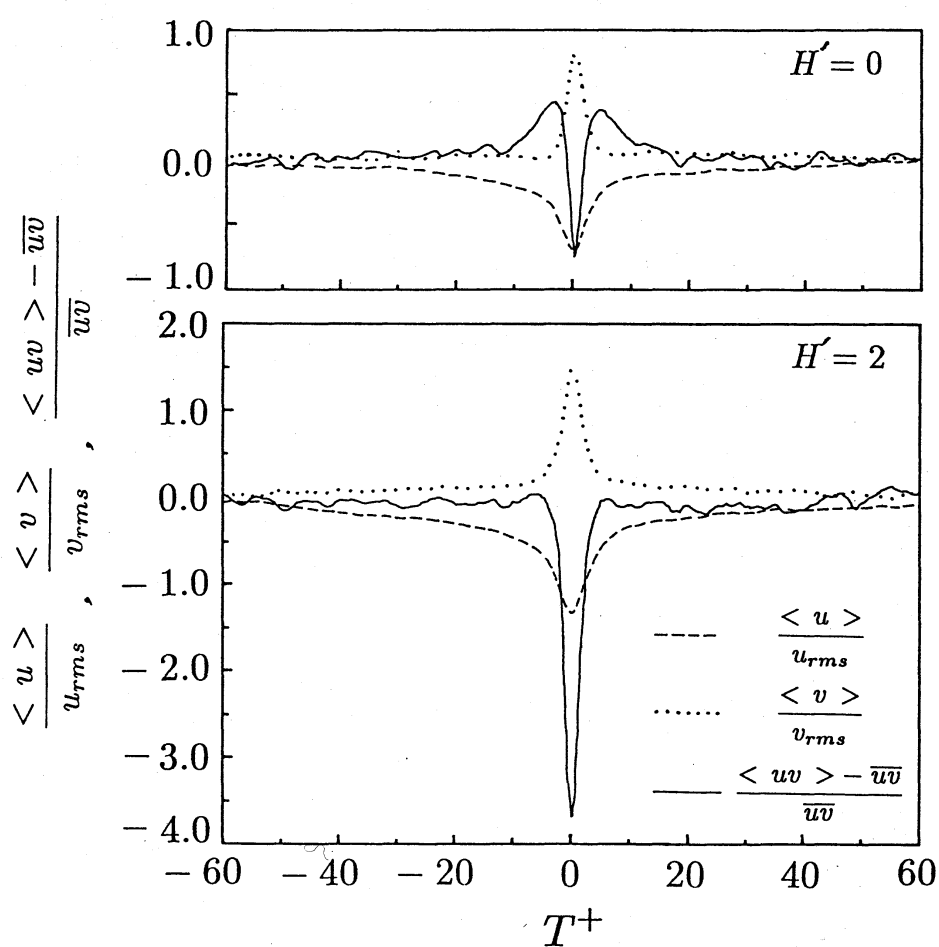
(a) V バースト集合平均波形 ($y^+ = 27.97$)(b) Q バースト集合平均波形 ($y^+ = 55.94$)

図 3 バースト集合平均波形

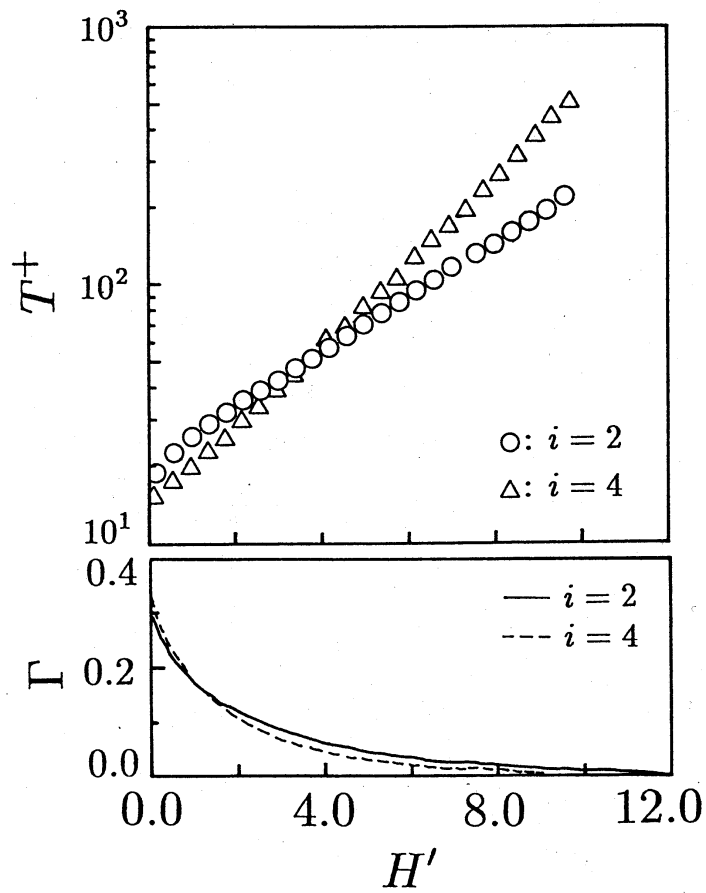


図 4 四象限分割法（第二、第四象限）による定義関数の平均発生周期 T^+ と、間欠係数 Γ の H' に対する変化（ $y^+=55.94$ ）

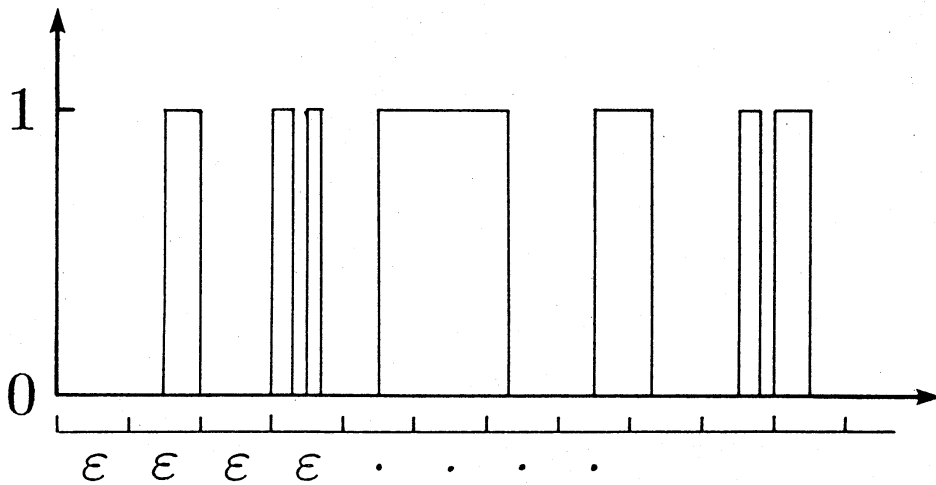
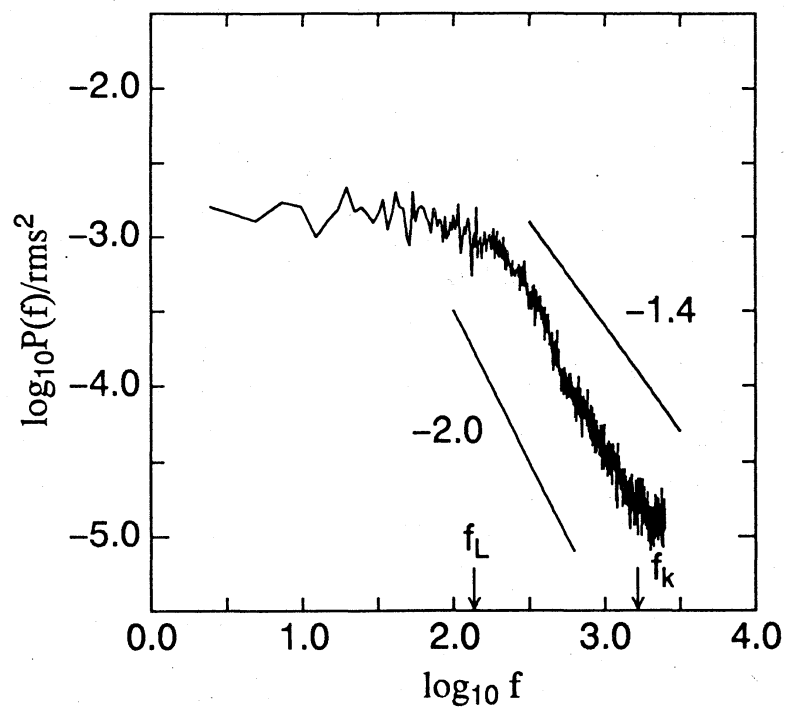
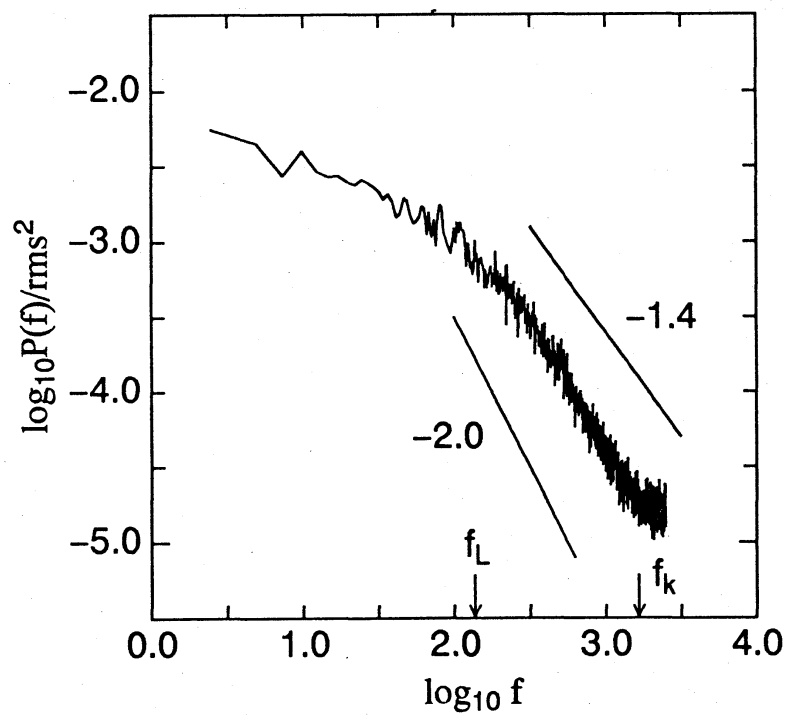


図 6 定義関数の概念図

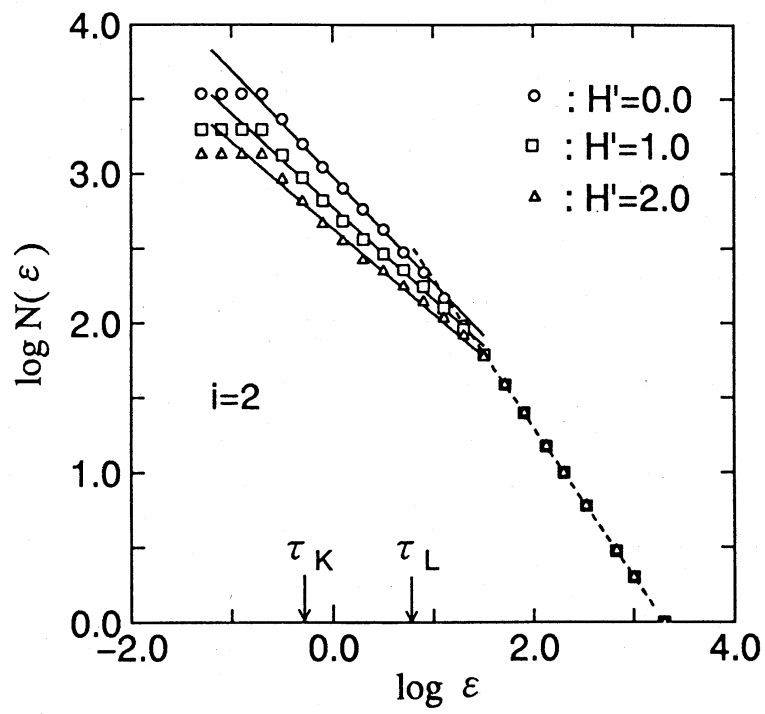


(a) Vバースト定義関数 ($y^+ = 55.94$)

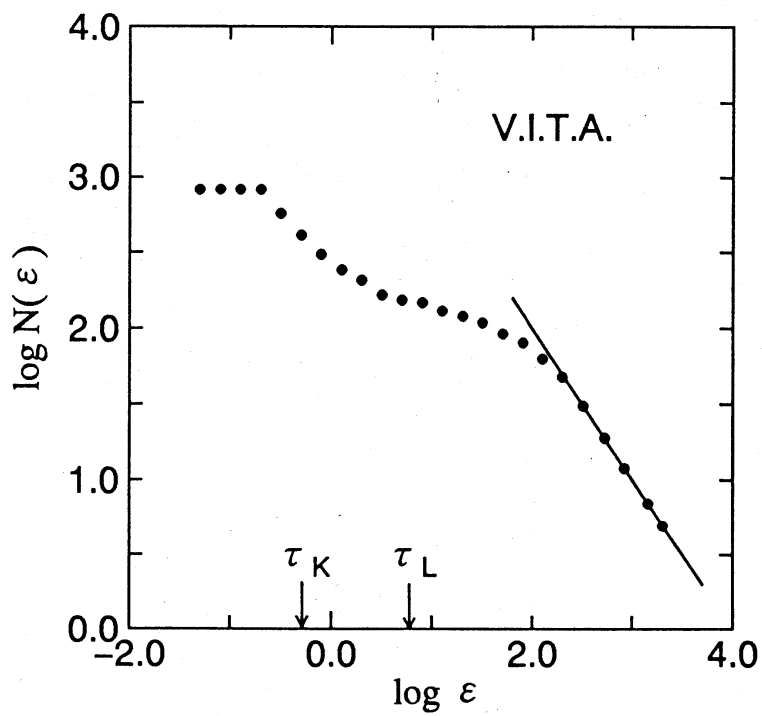


(b) Qバースト定義関数 ($H' = 2.0$, $y^+ = 55.94$)

図5 定義関数のパワースペクトル

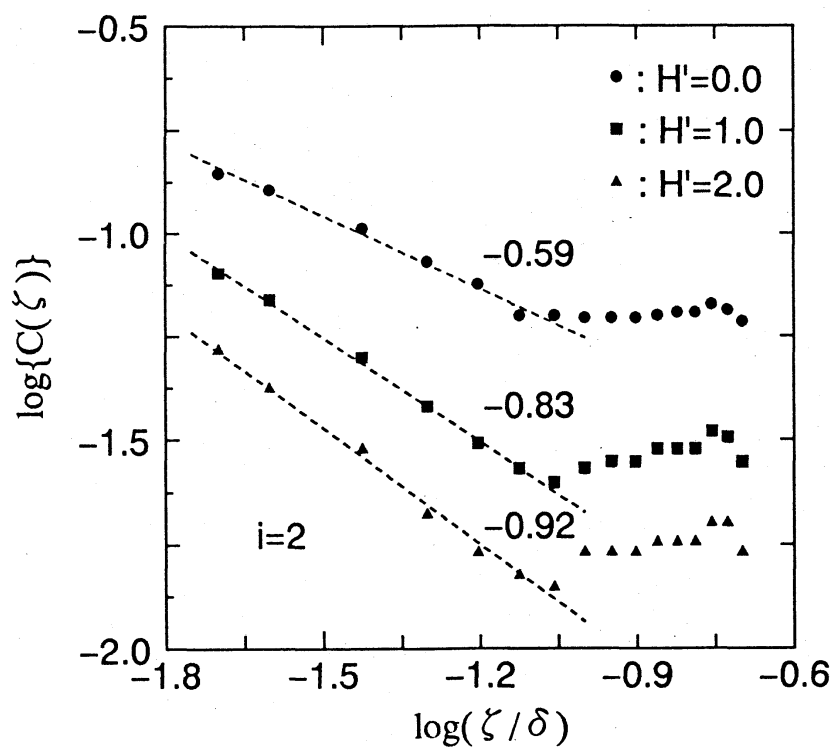


(a) Qバースト定義関数の解析結果 ($H' = 2.0$, $y^+ = 55.94$)

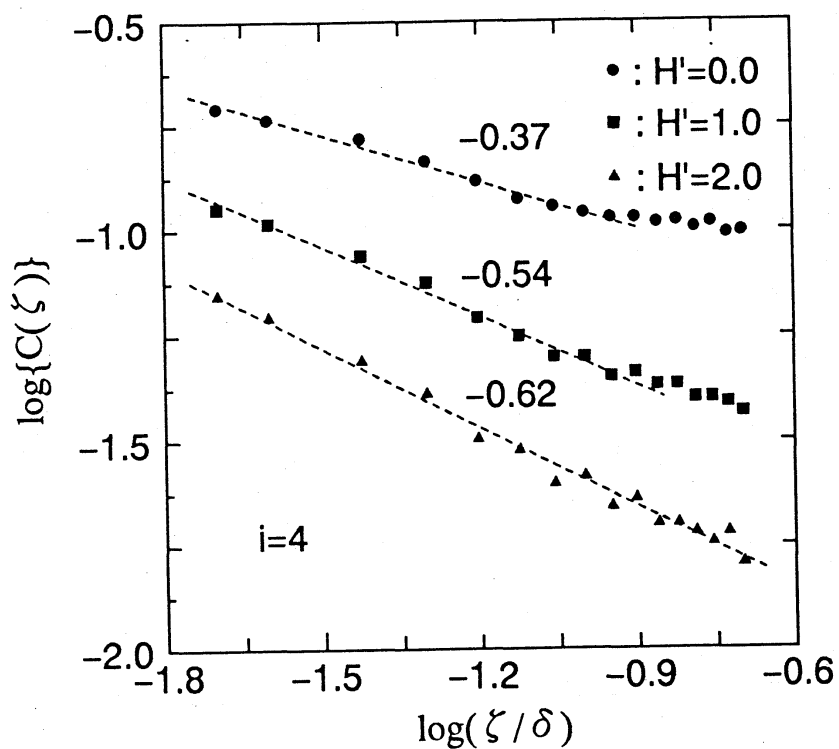


(b) Vバースト定義関数の解析結果 ($y^+ = 55.94$)

図 7 定義関数のフラクタル性の解析



(a) 第二象限



(b) 第四象限

図9 四象限分割における、第二、第四象限の定義関数のスパン方向への密度相関関数の変化。図中の数字は直線部の傾きを示す

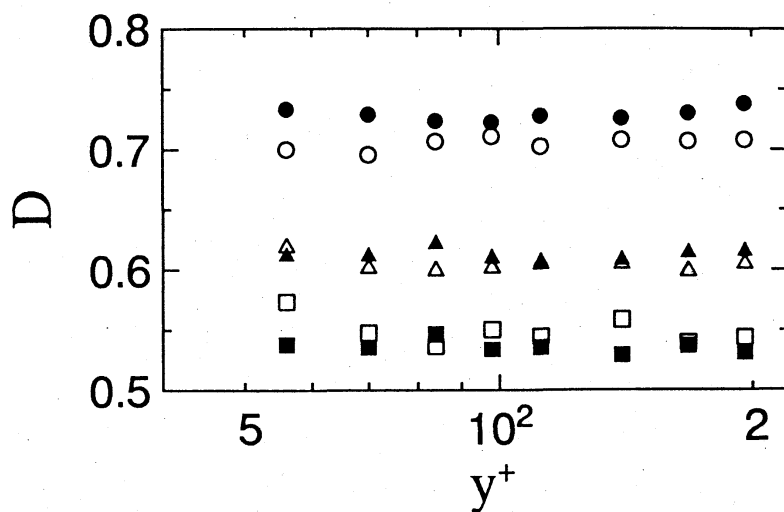


図 8 壁領域での定義関数のフラクタル次元の変化

[$\circ$: $i=2$, $H'=0.0$, $\square$: $i=2$, $H'=2.0$, $\triangle$: $i=2$, $H'=1.0$,
 $\bullet$: $i=4$, $H'=0.0$, $\blacksquare$: $i=4$, $H'=2.0$, $\blacktriangle$: $i=4$, $H'=1.0$]

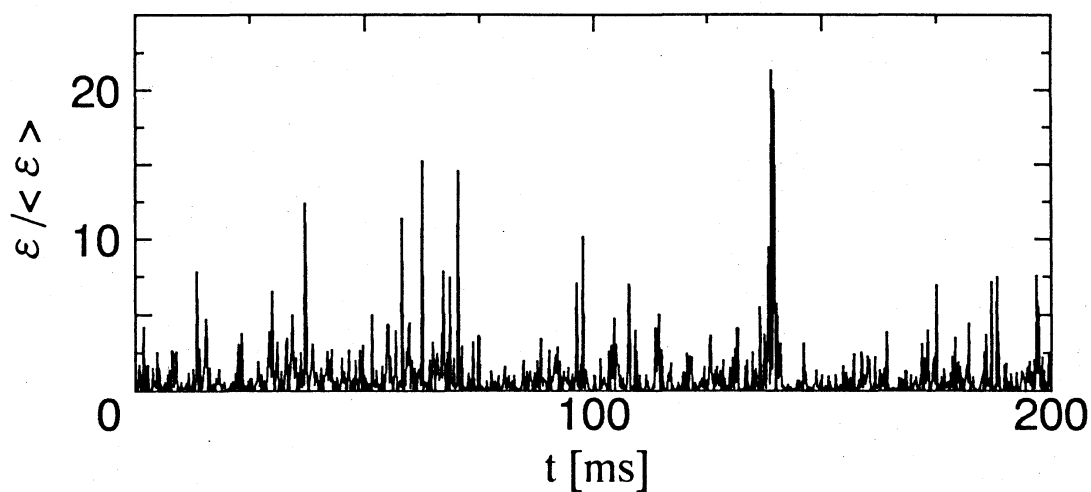


図 10 凍結乱流仮説と等方性を仮定した、瞬時の散逸率 ($y^+=55.94$)

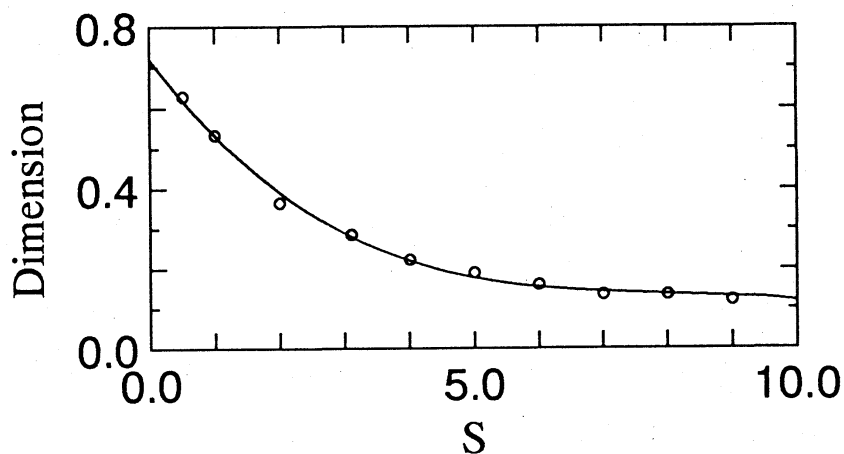
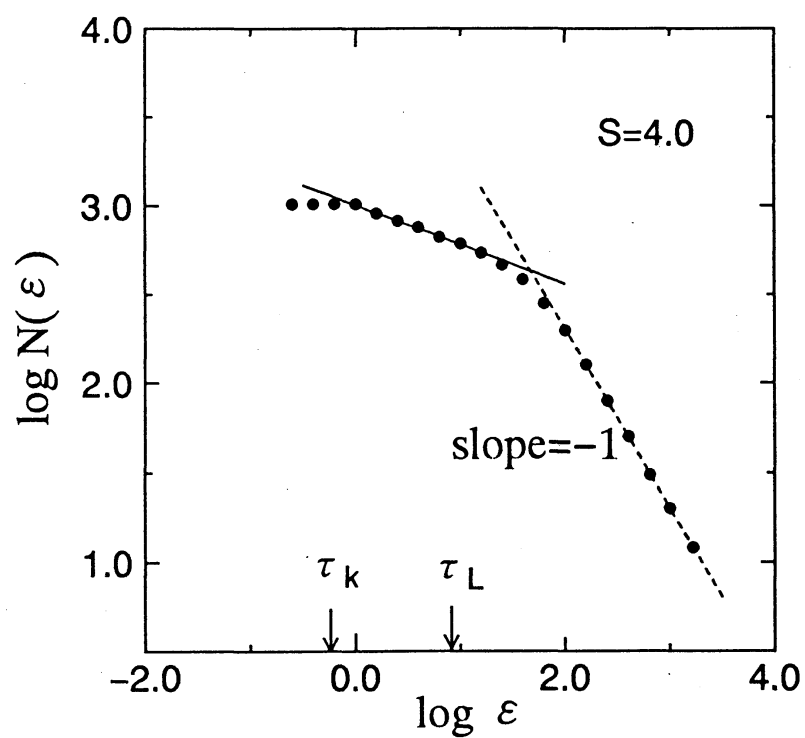
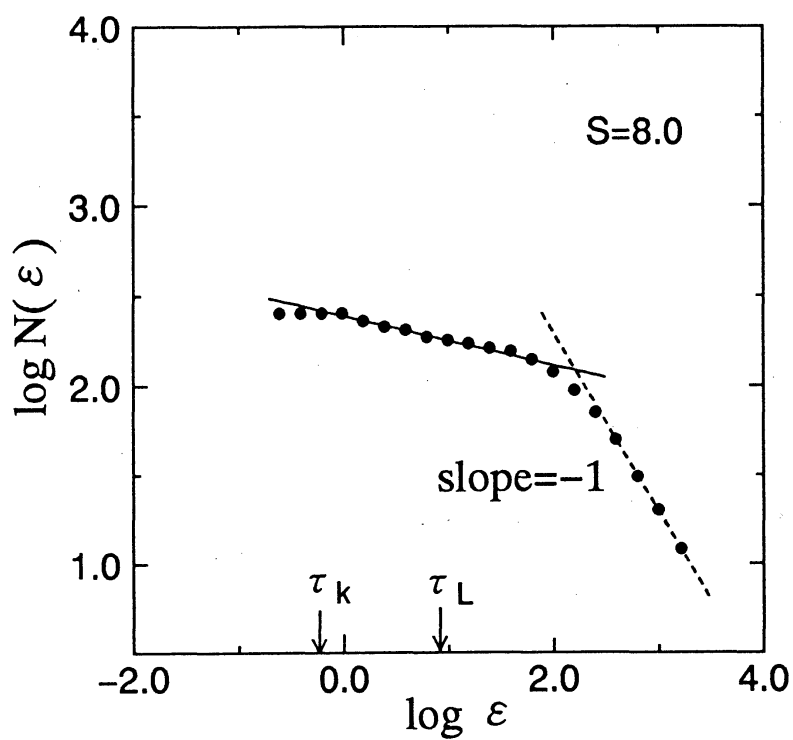


図 12 敷居値パラメータに対する次元の変化 ($y^+=55.94$)

(a) $s=4.0$ の場合(b) $s=8.0$ の場合図 1 1 散逸の定義関数のフラクタル性の解析 ($y^+=55.94$)

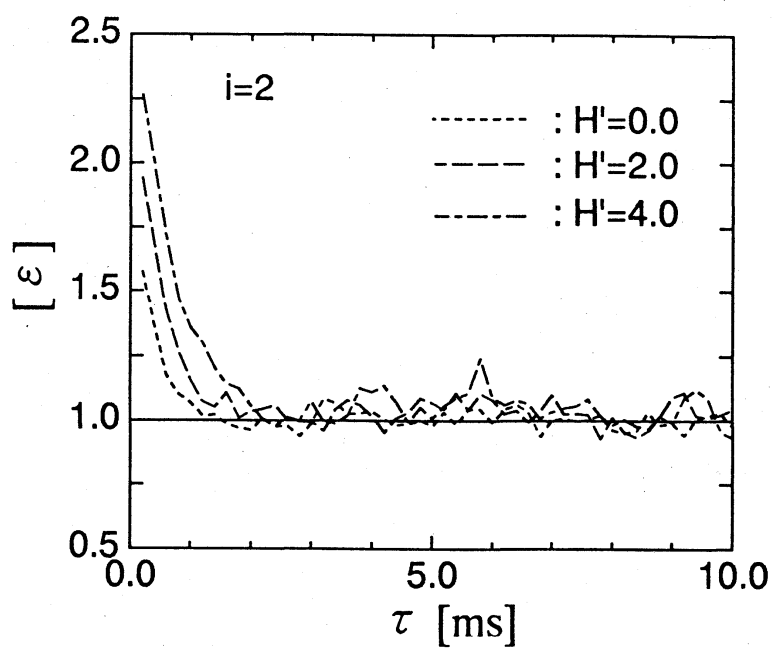


図 1.3 エジェクション過程後の散逸場の集合平均波形 ($y^+=55.94$)

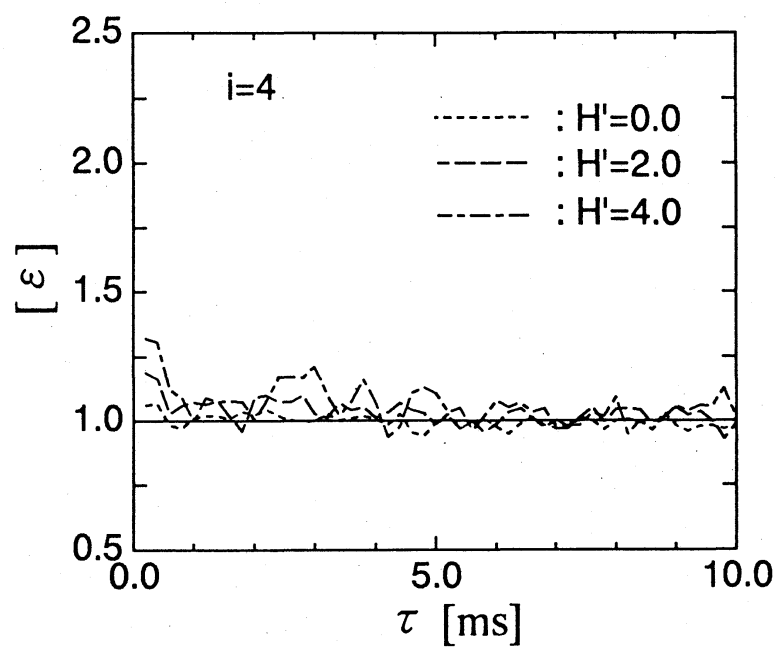


図 1.4 スイープ過程後の散逸場の集合平均波形 ($y^+=55.94$)