

Algebraic solutions of a certain type of functional equations

(ある種の関数方程式の代数的解の決定)

利光 剛 (慶應大・理工)

§ 1 . 序論と主結果

本研究では, ある種の乗法的変換に関する関数方程式を満たすべき級数について, その有理関数体上の代数性及び超越性を考察する. 特に, Mahler 関数はこの種のべき級数の一種である. 以下, $f(x)$ を複素係数の形式的ローラン級数, m, n を 2 以上の整数とする.

U. Zannier は 1998 年に次の定理を示した.

定理 Z1 (Zannier [5], Theorem 2). いま m, n が乗法的独立であるとする. このとき $f(x)$ が次の 2 つの関数方程式

$$\begin{aligned} f(x^m) &= P_m(x, f(x)) \\ f(x^n) &= P_n(x, f(x)) \end{aligned} \tag{1}$$

(ただし $P_m, P_n \in \mathbb{C}(x)[y]$) を満たすならば $f(x)$ は有理関数である.

注: m と n が “乗法的独立である” とは “ $m^A n^B = 1$ を満たす整数 A, B は $A = B = 0$ のみである” と定義する.

さらにこの定理より次の結果が導かれる.

定理 Z2 (Zannier [5], Theorem 1). $f(x)$ が有理関数でないとき, (1) の形の関数方程式を成立させる自然数 m の集合は, ある一つの自然数 r によって完全に生成される, つまり r^k の形の自然数に限る.

定理 Z1 の証明に先立ち, Zannier はまず (1) のタイプの関数方程式 (いずれか一方を満たせばよい) の解は有理関数か超越関数 (有理関数体上の超越性) であることを示

している。特に $f(x)$ が有理関数であれば、任意の自然数 n に対して (1) のタイプの関数方程式を満たすことが容易にわかる。従って $f(x)$ を超越関数であると仮定し、(1) より多項式 (y に関する) の合成式

$$P_m(x^n, P_n(x, y)) = P_n(x^m, P_m(x, y)) \quad (2)$$

を導き、多項式の合成式の解を決定付ける Ritt's theory を適用して (2) の解を決定し矛盾を導いている。

Zannier は [5] において、次の関数方程式についても同様の結果が得られるだろう、と予想している。

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_m(x, f(x^m)) \\ f(x) &= Q_n(x, f(x^n)) \end{aligned} \quad (3)$$

今回我々は上の予想を肯定的に示すことができた。

定理 1 ([3], Theorem 1). いま m, n が乗法的独立であるとする。このとき $f(x)$ が次の 2 つの関数方程式

$$\begin{aligned} f(x) &= Q_m(x, f(x^m)) \\ f(x) &= Q_n(x, f(x^n)) \end{aligned}$$

(ただし $Q_m, Q_n \in \mathbb{C}(x)[y]$) を満たすならば $f(x)$ は有理関数である。

さらに Zannier の結果と同様に次の定理を得た。

定理 2 ([3], Corollary). $f(x)$ が有理関数でないとき、(3) の形の関数方程式を成立させる自然数 m の集合は、ある一つの自然数 r によって完全に生成される、つまり r^k の形の自然数に限る。

証明の基本的方針は Zannier の手法を応用したものであるが、本質的な問題解決としては以下の 2 点である。

1. (3) の解の代数性 (有理関数体上の)。
2. ある対数微分に関わる関数方程式の有理関数性。

後者についてはある補題を示すことにより解決されたが、ここでは詳細は割愛する。前者は次の西岡 (啓) による定理によって解決される。

定理 N (西岡 (啓) [1]). $f(x)$ は複素係数の形式的べき級数とし、ある整数 $m \geq 2$ に関して次のうち少なくとも一方の方程式を満たすとする。

$$f(x^m) = \varphi(x, f(x)),$$

$$f(x) = \psi(x, f(x^m)),$$

ただし $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$. このとき $f(x)$ は有理関数でなければ超越関数である.

これらの変換 $x \mapsto x^n$ に関する関数方程式を満たすべき級数は Mahler 関数とよばれ, その代数点での値の超越性などが多く研究されている. 我々はこの種の関数方程式を “Mahler 型” とよぶことにする.

Mahler 関数の理論における問題の一つに “ pq -Mahler 問題” とよばれるものがある. これは

“異なる自然数 p, q に関して Mahler 型関数方程式を満たすべき級数は自明なもの (有理関数) にかぎるか?”

という予想であり未だ完全には解決されていない. 我々の結果と Zannier の結果はこの予想の解答の一つになっており, 有限オートマトンの生成する数列や整数の p -進展などに応用がある.

次に Mahler 型よりも複雑な形である, 複数の変換を含む関数方程式

$$f(x^m) = \varphi(x, f(x), f(x^2), \dots, f(x^{m-1})), \quad (4)$$

(ただし, $\varphi \in \mathbb{C}(x, y_1, \dots, y_{m-1})$) を考える. このタイプの関数方程式を満たすべき級数の例としては次のものがあげられる.

$C(n)$ を n 個の炭素原子を含む鎖式飽和アルコールの異性体の個数とする. 純粋に数学的モデルとするため化学上の存在性は無視し, 可能な構造式は全て考える. これはある種の rooted trees の数え上げの問題となる. この $C(n)$ に対してべき級数 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} C(n)x^n = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + \dots,$$

と定義する. このとき $f(x)$ は次を満たすことが知られている (Polya [2]).

$$g(x) = 1 + \frac{x}{6}(g(x)^3 + 3g(x)g(x^2) + 2g(x^3)). \quad (5)$$

さらに純粋的数学モデルとして, 炭素原子の代わりに原子価が $m+1$ である空想上の原子を考え, この原子を n 個含む同様の rooted trees の数を $C_{m+1}(n)$ とし,

$$F_{m+1}(x) = \sum_{n \geq 0} C_{m+1}(n)x^n$$

とする. このとき $F(x)$ は次の関数方程式を満たすことが知られている (Polya [2]).

$$F_{m+1}(x) = 1 + x \sum \frac{F_{m+1}(x)^{j_1} F_{m+1}(x^2)^{j_2} \cdots F_{m+1}(x^m)^{j_m}}{1^{j_1} \cdot j_1! \cdot 2^{j_2} \cdot j_2! \cdots m^{j_m} \cdot j_m!}, \quad (6)$$

ただし, 和は $\sum r j_r = m$ となる j_i についてのみとるものとする.

(5) および (6) はいずれも複数の変換を含む (4) のタイプの関数方程式であり, 定理 N によって級数の超越性を判定することができず, 級数の有理関数体上の超越性は未知であった. 我々は今回定理 N の拡張である次の定理を示すことに成功した.

定理 3 ([3], Theorem 2). $f(x)$ は複素係数の形式的べき級数とし, ある整数 $m \geq 2$ に関して次の関数方程式を満たすとする.

$$f(x^m) = \varphi(x, f(x), f(x^2), \dots, f(x^{m-1})),$$

ただし, $\varphi \in \mathbb{C}(x, y_1, \dots, y_{m-1})$. このとき $f(x)$ は有理関数でなければ超越関数である.

この結果より, 上述の級数 $g(x)$ 及び一般の $F_{m+1}(x)$ ($m \geq 3$) の有理関数体上の超越性を導くことができる. 具体的にはこれらの級数が有理関数でないことさえ示せばよい ([3], Theorem 3).

§ 2 . 証明の概略

ここでは定理 1 の証明の概略を述べる.

いま $f(x)$ が有理関数でないとすると, 定理 N より $f(x)$ は超越関数である. このとき m と n が乗法的独立であるとして矛盾を導く. 定理の関数方程式より次の (y に関する) 多項式の合成式を得る.

$$Q_m(x, Q_n(x^a, y)) = Q_n(x, Q_m(x^b, y)). \quad (7)$$

$Q_m(x, y)$, $Q_n(x, y)$ の y に関する最高次の係数 (x の有理関数となる) を比較することによって, これら最高次の係数は定数としても一般性を失わないことがわかる (上述の問題点 2 はこの過程で必要になる). $\deg Q_m = g$, $\deg Q_n = h$ とし, g, h に関する場合分けをする.

Step 1. $g, h \geq 2$.

Step 2. $g = 1, h \geq 2$.

Step 3. $g = h = 1$.

証明の大半は Step 1 である. ここでも Step 1 を主に説明する.

等式 (7) において $Q_m(x, y), Q_n(x, y)$ の 2 番目の次数の係数を比較すると, ある適当な置き換えを行なうことによって $Q_m(x, y), Q_n(x, y)$ の 2 番目の係数は共に 0 とできることがわかる. さらにある補題 (Zannier [5], Lemma 6) をもちいて, g と h が乗法的従属であるときは $m = n$ を導くことがわかるが, これは仮定に反するため g と h は乗法的独立であることがわかる.

Diophantine 近似に関する Dirichlet または Kronecker の結果と, 必要ならば m, n を $2m, 2n$ に置き換え, さらに必要ならばもとの関数方程式 (3) を相互に合成作用させて得られた新しい関数方程式, 例えば

$$f(x) = Q_n(x, Q_m(x^n, f(x^{mn}))) := Q_{mn}(x, f(x^{mn}))$$

と

$$f(x) = Q_m(x, Q_n(x^m, Q_m(x^{mn}, f(x^{m^2n})))) := Q_{m^2n}(x, f(x^{m^2n}))$$

の組など, を対象に議論を再出発させることにより (このような場合でも今までの議論が同様に進められることがわかる), $Q_m(x, y), Q_n(x, y)$ の y に関する次数 g, h (合成作用させた場合は, ある 2 組の g, h のべきの積, 例えば上のケースでは gh と g^2h , になる) は次の性質を満たすものとしてよい.

$$g < h < 2g,$$

$$\left(r, \frac{h}{r}\right) \geq 4, \quad r := (g, h),$$

ここで (A, B) は A と B の最大公約数を表す. 上述の議論の結果, 定理の主張にある 2 つの関数方程式を

$$f(x) = G(x, f(x^a)),$$

$$f(x) = H(x, f(x^b))$$

と書き直す. また, $G(x, y), H(x, y)$ の y に関する次数をそれぞれ g, h とする. 特に $Q_m(x, y) = G(x, y), Q_n(x, y) = H(x, y), m = a, n = b$ と考えればもとの関数方程式に一致する. ここから議論を再出発する. 上の関数方程式より多項式の合成式 ((7) に相当するもの)

$$G(x, H(x^a, y)) = H(x, G(x^b, y))$$

を得る. 簡単のため

First equality.

$$G \circ H^\sigma = H \circ G^\tau, \quad (8)$$

とおく. ただし $A \circ B$ は多項式 $A(X)$ と $B(X)$ の合成 $A(B(X))$ を表わし, σ, τ は

$$\sigma: x \mapsto x^a,$$

$$\tau: x \mapsto x^b$$

で定義される同型写像とする.

いま, (8) に Ritt's theory (特にここでは Tortrat [4], Proposition 1) を適用する. この定理の正確な主張は割愛するが, 合成式 (8) の解となる多項式を決定付けている定理である. これより (8) の解 $G(x, y), H(x, y)$ は次の関係を満たさねばならないことがわかる. ここで k は有理関数体 $C(x)$ の代数閉包を表わす.

Second equalities. ある $R, S, P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in k[y]$ が存在して

$$G = R \circ P_1, H = R \circ Q_1, G^\tau = P_2 \circ S, H^\sigma = Q_2 \circ S \quad (9)$$

を満たす. (8) に注意すれば

$$R^\tau \circ P_1^\tau = P_2 \circ S, \quad R^\sigma \circ Q_1^\sigma = Q_2 \circ S \quad (10)$$

が成り立つ. さらに次数に関して

$$\deg R = \deg S = (g, h) = r \quad (11)$$

が成り立つ.

等式 (9), (10) の多項式 R に対してある 1 次式を合成させ, R の 2 番目 (に高い次数) の係数を 0 にする. このとき一般性を失わないように P_1, P_2, Q_1, Q_2 を置き換え, さらにある補題 ((Zannier [5], Lemma 6) を用いて次の関係式を得る.

Third equalities.

$$P_1 \circ Q_2 = Q_1 \circ P_2, \quad (12)$$

(10), (11) より

$$\deg P_1 = \deg P_2 = \frac{g}{r} := p, \quad \deg Q_1 = \deg Q_2 = \frac{h}{r} := q,$$

$$q \geq 4, \quad (p, q) = 1, \quad 2 < p < q < 2p, \quad (r, q) \geq 4.$$

等式 (12) に Ritt's Second Theorem (これも合成式の解の多項式を決定する定理である. 詳しくは Zannier [5], section 2 または Tortrat [4], Proposition 5 参照) を適用すると以下の 2 つの解を得る.

Case 1. ある 1 次式 $L_1, L_2, L_3, L_4 \in k[y]$ と 多項式 $F \in k[y]$ が存在して

$$\begin{aligned} P_1 &= L_1 \circ y^p \circ L_2, & Q_1 &= L_1 \circ y^e F^p(y) \circ L_3, \\ P_2 &= L_3^{-1} \circ y^p \circ L_4, & Q_2 &= L_2^{-1} \circ y^e F(y^p) \circ L_4, \end{aligned}$$

とかける. ただし, $e = q - p \deg F$ であり, 従って F は高々 1 次である.

Case 2. ある 1 次式 $L_1, L_2, L_3, L_4 \in k[y]$ が存在して

$$\begin{aligned} P_1 &= L_1 \circ T_p \circ L_2, & Q_1 &= L_1 \circ T_q \circ L_3, \\ P_2 &= L_3^{-1} \circ T_p \circ L_4, & Q_2 &= L_2^{-1} \circ T_q \circ L_4, \end{aligned} \tag{13}$$

とかける. ただし T_p は Chebishev 多項式である.

まず Case 1 については F の次数が 0 のときと 1 のときに場合分けをする. 前者の場合は最終的に $f(x)$ が定数であることを導き, 後者は非自明な多項式の合成では得られない (合成の一方が恒等写像である場合を自明とよぶ) はずの合成式 (例えば, $A \circ B = C$ としたとき, このように表現できる多項式 C は存在しないことが示される, ということ) を導く. 故にいずれの場合も成立できず, Case 1 は否定される.

次に Case 2 であるが, まず (13) を (10) に代入し次式を得る.

$$L_3 \circ R_1^r \circ T_p = T_p \circ S_1 \circ L_2^{-r},$$

$$L_2 \circ R_1^s \circ T_q = T_q \circ S_1 \circ L_3^{-s},$$

特に $R_1 = R \circ L_1$, $S_1 = L_4 \circ S$ とする. これらの式に, よく知られた Chebishev 多項式の性質

$$T_0 = 1, \quad T_d(y + y^{-1}) = y^d + y^{-d} \quad \text{for } d > 0,$$

$$T_m \circ T_n = T_{mn} = T_n \circ T_m$$

を適用しつつ式変形を施す. さらにある補題 (Zannier [5], Lemma 11) を用いて最終的に次式を得る.

$$G = \pm c^{-1} T_g(cy),$$

ゆえに

$$cf(x) = cG(x, f(x^a)) = \pm T_g(cf(x^a)).$$

しかしながらこの関数方程式の解 $f(x)$ は定数となることが証明でき、これは仮定に反するため Case 2 も否定される。

以上で Step 1 が解決された。

Step 2 は $g = 1, h \geq 2$ より

$$G(x, y) = \alpha y + g(x), \quad H(x, y) = \beta y^h + h_1(x)y^{h-1} + \dots$$

とおくと、係数比較により $f(x)$ が有理関数であることが導かれる。

また、Step 3 では

$$G(x, y) = \alpha y + g(x), \quad H(x, y) = \beta y + h(x)$$

とおき、有理関数 $g(x), h(x)$ の部分分数分解を考えることにより $f(x)$ の有理関数性が示される。

いずれも仮定に反するため背理法により定理が示されたことになる。

参考文献

- [1] Ke. Nishioka, *Algebraic function solutions of a certain class of functional equations*, Arch. Math. **44** (1985), 330–335.
- [2] G. Polya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math. **68** (1937), 145–254.
- [3] T. Toshimitsu, *Remarks on a paper by U. Zannier*, to appear..
- [4] P. Tortrat, *Sur la composition des polynomes*, Colloq. Math. **55** (1988), 329–353.
- [5] U. Zannier, *On a functional equation relating a Laurent series $f(x)$ to $f(x^m)$* , Aequationes Math. **55** (1998), 15–43.