

特異点のある *foliation* と Morse 不等式

名大 理 大 和 一 夫

Introduction.

多様体 M^n 上で定義された完全積分可能な 1 次微分形式 ω について、その特異点は M の位相的構造と深い関係があると予想される。例えば特異点のない ω をもつ M はかなり限られているであろうと Reeb は考えた。

ここでは、ある単純な条件のもとで ω の特異点と M との間に Morse 不等式が成立することをしめす。(§3. Theorem A.)

その結果、次の基本的な問題が得られる：

多様体 M^n に対してつねに、指数が 0 である特異点をもたない完全積分可能な 1-form ω が存在するか？

これについて我々は何も知らない。

さて、§1 と 2 で、 ω の特異点の近傍の様子を教える Lemma 1.2 を証明し、それによって §3 で、我々の main theorem を証明する。

§ 1. Local theory.

$\mathbb{R}^n$ の原点 0 を含む open set で def された 1-form $\omega = \sum a_i(x) dx^i$ が class C^r , $r \geq 2$, で $\omega \wedge d\omega = 0$, そして原点を nondegenerate singular point としてもつ, i.e., $a_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\det(a_{ij}) \neq 0$, 但し $a_{ij} = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x^j}\right)_{x=0}$, と仮定する. このとき Reeb によって

Lemma 1.1. $n \geq 3$ のとき matrix (a_{ij}) は symmetric.

が知られている. そこで (a_{ij}) の負の固有値の個数を λ とすると

Lemma 1.2. $n \geq 3$, $\lambda \neq 2$, $n - \lambda \neq 2$ のとき, 原点 0 の nbd $U, V \subset \mathbb{R}^n$ と homeomorphism $h: V \rightarrow U$ が存在して次の条件をみたす:

- (i). $h(0) = 0$ で, (V, df) の integral manifold を $(U, \omega|_U)$ の integral manifold にうつす. ここで $f = -(x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + \dots + (x^n)^2$.
- (ii). h は V の open dense subset V_0 で class C^r の diffeomorphism.
- (iii). h は向きを保つ, i.e., $\omega(h_* \text{grad} f) > 0$ on V_0 .

Remark 1. $\lambda = 2$ のときも次の条件をみたしていれば上の

主張成立:

(a_{ij}) の負の固有値に属する固有空間 $E^2 \subset \mathbb{R}^n$ に対して ω を E^2 に制限したもの $(\omega \text{ の domain } \cap E^2, \omega|_{\omega \text{ の domain } \cap E^2})$ の原点の nbd の leaf がすべて compact.

Remark 2. $n-\lambda=2$ のとき、上の主張で (i) を次のように変えると成立:

(i'). h は, (V, df) の integral manif. で h での f の値が ≤ 0 なるものを $(U, \omega|_U)$ の integral manif. にうつす.

$\lambda=0$ 或 $\lambda=n$ のときこの Lemma はすでに Reeb によっていられている. あらためてかきなおすと

Reeb の定理. $\lambda=0$ 或 n のとき, 原点の nbd $U, V \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) と homeom. $h: V \rightarrow U$, $h(0)=0$, が存在して

(i). h は 0 以外で C^r -diffeom. で, $\forall x \in V$ に対し $\exists a > 0$ s.t. $h(x) = ax$.

(ii). 中心 0 の半径 ρ の球面 $S^{n-1}(\rho) \subset V$ は h によって U の leaf にうつる.

§ 2. Lemma 1.2 の証明.

Lemma 1.2 の proof を簡単のため $\lambda \neq 1$, $n-\lambda \neq 1$ として行う.

まずそのまえにひとつ準備する.

2.1. $\mathbb{R}^2$ の原点の nbd で def. された 1-form α が

$$\alpha = b(y, z) dy + c(y, z) dz,$$

$$b(0, 0) = c(0, 0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とする. 但し (y, z) は標準的な座標系.

この α に対して vector field A を

$$A = -c(y, z) \frac{\partial}{\partial y} + b(y, z) \frac{\partial}{\partial z}$$

と def. すると、その linear part は $A' = -z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}$. そして

$$R_+^2 = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, z \geq 0\},$$

$$\Delta(p) = \{(y, 0) \mid 0 \leq y \leq p\} \cup \{(0, z) \mid 0 \leq z \leq p\}, \quad p > 0,$$

とおく. $p > 0$ が

$$b(y, 0) < 0 \text{ for } 0 < y \leq p, \quad c(0, z) < 0 \text{ for } 0 < z \leq p,$$

をみたすとする. $\Lambda > 0$ を十分小とする.

そこで、写像 $\pi[\alpha]: \Delta(p) \times [0, \Lambda] \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ を 次のように def. する:

$(w, \lambda) \in \Delta(p) \times [0, \Lambda]$ に対して

$w \neq (0, 0)$ のとき, $\pi[\alpha](w, \lambda) = w$ をとる integral curve of $-A$ 上の点, w からの arc length が λ .

$w = (0, 0)$ のとき, $\pi[\alpha](w, \lambda) =$ 原点をとる stable manif. of A 上の点 $\in P_+^2$ で 原点からの arc length が λ .

2.2. Proof of Lemma 1.2 ($\lambda \neq 1, n - \lambda \neq 1$ として).

$\lambda = n$ or $\lambda = 1$ のとき Reeb の定理に一致. よって $3 \leq \lambda \leq n-3$ とする. また (必要なら座標変換して)

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とする.

ω を $\mathbb{R}^\lambda \times 0$ に制限すると index λ . よって Reeb の定理より

原点の π bd $U^-, V^- \subset \mathbb{R}^2$, homeom. $h^-: V^- \rightarrow U^-$, $h^-(0) = 0$ を次のようなものとする:

(i). h は 0 以外で C^r -diffeom. で, $\forall x^- \in V^-$ に對し $\exists a > 0$ s.t. $h^-(x^-) = ax^-$.

(ii). $(V^- \times 0, df^-|_{V^- \times 0})$ の各 leaf を $(U^- \times 0, \omega|_{U^- \times 0})$ の leaf にうつす. 但し $f^- = -(x^1)^2 - \dots - (x^n)^2$.

ここで $\omega|_{U^- \times 0}$ は 0 以外に singular point をもたないことに注意する. 同様に $U^+, V^+ \subset \mathbb{R}^2$, $h^+: V^+ \rightarrow U^+$, $f^+ = (x^{n+1})^2 + \dots + (x^n)^2$ がとれる.

さて, $x = (x^-, x^+) \in V^- \times V^+ \subset \mathbb{R}^n$ に對して $h(x) \in \mathbb{R}^n$ を次のように def. する:

a). $x^+ = 0$ のとき, $h(x) = h^-(x^-) \times 0 \in U^- \times 0 \subset \mathbb{R}^n$.

b). $x^- = 0$ のとき, $h(x) = 0 \times h^+(x^+) \in 0 \times U^+ \subset \mathbb{R}^n$.

c). $x^- \neq 0, x^+ \neq 0$ のとき, $h(x) = T \cdot \pi[T^* \omega](T^{-1} \cdot h^- \cdot T(w), \lambda)$,

但し

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ は linear map defined by $T(1, 0) = \frac{x^-}{\|x^-\|}$, $T(0, 1) = \frac{x^+}{\|x^+\|}$.

$(w, \lambda) \in \Delta(p) \times [0, \Lambda]$ は 1 系: $x = T \cdot \pi[T^*d(f^- + f^+)](w, \lambda)$ で def. される. また $\pi[\]$ は 2.1 において def. された写像.

このようにして def. した h が求めるものであることが確かめられる.

§ 3. 定理 A とその証明

M^n を closed connected C^∞ manifold, $n \geq 3$, とする. ω を M^n 上の 1-form で class C^r , $r \geq 2$, $\omega \wedge d\omega = 0$, その singular points はすべて nondegenerate とする. c_λ で ω の index λ の singular pts の 個数, b_λ で M^n の λ th Betti 数をあらわす.

3.1.

Theorem A. $c_0 \neq 0$, $c_1 = 0$, $c_{n-2} = 0$ ならば Morse 不等式:

$$b_\lambda - b_{\lambda-1} + \cdots \pm b_0 \leq c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0 \quad \text{for } \lambda = 0, \dots, n,$$

が成立する.

Remark. ω が closed あるいは M, ω が real analytic なら $c_{n-2} = 0$ の仮定はいらない.

証明のためのいくつかの定義を与える.

3.2. Leaflet と leaf.

Def. connected $(n-1)$ -submanifold $L \subset M^n$ が leaflet とは, L が ω の integral manifold で (包含関係で) 極大なものであるときとする. leaflet L が incomplete とは, curve $c: [0, 1] \rightarrow M^n$, $c([0, 1)) \subset L$, $c(1) = \text{singular pt}$, が存在するときとする. この singular pt を L の limit pt とよぶ.

Def. leaflets $L_1, \dots, L_\ell$ と singular pts $p_1, \dots, p_m$ が 次の条件をみたすとき, M の subset $\tilde{L} = L_1 \cup \dots \cup L_\ell \cup p_1 \cup \dots \cup p_m$ を leaf とよぶ. $m \geq 1$ のとき singular leaf とくにいう:

- (i). $L_i \cap L_j = \emptyset$ for $i \neq j$, $p_i \neq p_j$ for $i \neq j$.
- (ii). incomplete な L_i に対して その limit pt は $p_1, \dots, p_m$ のどれかと一致. 又, どの p_j に対しても p_j を limit pt としてもつ leaflet は $L_1, \dots, L_e$ のどれかと一致.
- (iii). どの L_i と p_j に対しても, L_i の limit pt p_{i_1} がとれてそれを limit pt とする L_{i_2} がとれて $\dots$ このような process で p_j が得られる.
- 以下, $x \in M$ に対して $L(x)$ で x をとる leaf をあらわす.

3.3. Translation.

M の Riemann metric を ひとつ fix して, $Y = \omega^* = \omega$ の dual vector field, $\{\psi_t\}$ を M の one param. tr. gr. gen. by $\dot{\psi}_t = Y$, とする.

Def. P_0, P_1 を M の subsets で 夫々 ある leaflet L_1, L_2 に含まれているとする. P_0 が P_1 に translate できるとは 写像

$$T: P_0 \times [0, 1] \rightarrow M$$

- s.t. (i). $T|_{P_0 \times 0} = \text{id}$, $T|_{P_0 \times 1}: P_0 \rightarrow P_1$ homeomorphism,
- (ii). $\forall t \in [0, 1]$ に対して $T(P_0 \times t)$ は ある leaflet に含まれ,
- (iii). $\forall p \in P_0$ に対して, curve $T|_{p \times t}$ $t \in [0, 1]$ の tangent vector は $Y(T(p, t))$ の正数倍.

Remark. 上の def. ①, P_0 に対して 次のような条件が満たされているとき T は 1-1:

$\exists N^n \subset M^n$ compact submanifold s.t. $P_0 \subset \partial N$, ∂N の連結成分は 夫々 一つの leaf になっていて, そして $Y|_{\partial N}$ は 外向き.

Remark. $L \subset M^n$ を nonsingular compact leaf とする. もし L がそれ自身に translate できるなら, すべての leaf は L に diffeom.

3.4. 次の仮定のもとで次の2つの Lemmas が成立する:

$L \subset M^n$ を compact nonsingular leaf, $q \in L$ とする. そして $\forall t > 0$ に対して L が leaf $L(\psi_t(q))$ に translate できるとする.

Lemma. M^n のすべての leaf は L に diffeomorphic かそれとも $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q)$ が存在して ω の singular pt かのどちらか.

Proof. $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q)$ が存在せぬなら, $0 < t_1 < t_2$ s.t. $L(\psi_{t_1}(q)) = L(\psi_{t_2}(q))$. よって 3.3 の Remark よりすべての leaf は L に diffeom.

Lemma. $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q) = p$ が存在するとき, p を含む singular leaf を

$$\tilde{L} = L_1 \cup \dots \cup L_l \cup p_1 \cup \dots \cup p_m, \quad p_1 = p,$$

とし, $\lambda_i = p_i$ の index, $q'_j \in L_j$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, l$,

とおく.

(i). もし $\lambda_i \neq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$ ならば $\tilde{L}$ は compact.

(ii). もし $\lambda_i \neq 1$ かつ $\lambda_i \neq n-2 \quad \forall i = 1, \dots, m$ で $\pi_1(L) = 0$ ならば このとき $\exists \delta_j > 0$ s.t. $L(\psi_t(q'_j))$, $0 < t \leq \delta_j$, は nonsingular compact で $\pi_1 = 0$. そして manifold $L(\psi_{\delta_1}(q'_1)) \cup \dots \cup L(\psi_{\delta_l}(q'_l))$ は L に各次数が $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ の m 回の spherical modifications をまとめたものである.

Proof of (i). L_1 は p_1 を limit pt としてもつとする.

Assertion 1. $\forall x \in L_1$ に対して $\exists s > 0, \exists x_0 \in L$ s.t. $x = \psi_s(x_0)$.

これを証明するのに, x が p_1 に十分近くて Lemma 1.2 の nbhd U に含まれているとしてよい. このとき $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\psi_{-\varepsilon}(x) \in U$.

すると $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\psi_{-\varepsilon}(x) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$. ところが $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q) = p$ だから, $\exists t > 0$ s.t. $\psi_t(q) \in h(f^{-1}(-\varepsilon))$. 一方明らかに $f^{-1}(-\varepsilon) \approx S^{\lambda-1} \times \dot{D}^{n-\lambda}$ (λ は p_1 の index). $\lambda \neq 1$ なのだから connected.

よって $\psi_{-\varepsilon}(x)$ と $\psi_t(q)$ とを結ぶ curve で leaf に含まれるものか
とれる. ところが $L(\psi_t(q))$ に L は translate できる. よって

$x_0 \in L$ がとれて ある $s > 0$ に対して $x = \psi_s(x_0)$. Assertion 1 が
しめされた. 次に, L_1 が limit pt p_2 をもつとする. 同様にして

Assertion 2. $\exists w_0 \in L$ s.t. $p_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(w_0)$.

これら二つの Assertions から,

Assertion 3. $\tilde{L}$ の任意の点に $L(\psi_t(q))$ が限りなく近づく.

M^n は compact だから,

Assertion 4. $\tilde{L}$ が noncompact なら, $\forall \varepsilon > 0$ に対して
 $\exists j \in \{1, \dots, l\}, \exists z \in L_j, \exists \tau > 0$ s.t. $\psi_{-\tau}(z) \in L_j$ かつ
 $\text{dis}(z, \psi_{-\tau}(z)) < \varepsilon$.

もはや Lemma (i) の証明を終えることは容易.

Proof of Lemma.(ii).

簡単のために, $\lambda_i \neq n-1$ for $\forall i=1, \dots, m$. として証明する.

そうすると, $\tilde{L} = L_1 \cup p_1 \cup \dots \cup p_m$, $2 \leq \lambda_i \leq n-3$. となる.

各 p_j , $j=1, \dots, m$, に対して, p_j の nbd U_j , homeom. $h_j: \dot{D}^n(p) \rightarrow U_j$, f_j が Lemma 1.2 の条件を満たすようにとれる. ($\lambda_j=2$ のときはその Remark による.) そして, $q_i \notin U_1 \cup \dots \cup U_m$, $U_j \cap \tilde{L} = h_j(f_j^{-1}(o))$ ($\tilde{L}$: compact!) とする. そこで, $W_j = h_j(\dot{D}^n(\varepsilon)) \subset U_j$, $\varepsilon > 0$ + 十分小, とおくと

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L} - W_1 \cup \dots \cup W_m$$

は次の条件をみたす:

$$\exists \text{ imbedding } k: S^{\lambda_1-1} \times \dot{D}^{n-\lambda_1} \cup \dots \cup S^{\lambda_m-1} \times \dot{D}^{n-\lambda_m} \rightarrow L(\psi_\tau(q))$$

s.t. $L(\psi_\tau(q)) - \text{Im } k$ は $\tilde{L}_0$ に translate できる. ($\tau > 0$ + 十分大)

明らかに

$$\pi_1(\tilde{L}_0) = \pi_1(L(\psi_\tau(q)) - \text{Im } k) = 0. \quad (2 \leq \lambda_i \leq n-3!)$$

従って $\tilde{L}_0$ は少しなら translate できる. すなわち,

$\delta > 0$ と leaflet $L(\psi_\delta(q_i))$ の submanifold $\tilde{L}_0$ が存在して

次の条件をみたす:

(i). $\tilde{L}_0$ は $\tilde{L}_0$ に translate できる

(ii). $2\tilde{L}_0 = J_1 \cup \dots \cup J_m$, $J_i \subset U_i$ $i=1, \dots, m$ とかける.

このとき, $J_i \approx S^{\lambda_i-1} \times S^{n-\lambda_i-1}$ だから J_i は connected.

($2 \leq \lambda_i \leq n-3!$) よって $r_i > 0$ が存在して $J_i \subset h_i(f_i^{-1}(r_i))$.

$h(f_i^{-1}(z_i)) \subset M$ が一つの integral manifold であるから 集合

$$\tilde{L}_0 \cup h_1(f_1^{-1}(z_1)) \cup \dots \cup h_m(f_m^{-1}(z_m))$$

も integral manifold, しかも boundary がなくて compact, connected. によって $L(\psi_g(q))$ も compact nonsingular leaf. Lemma の残りの証明は容易.

3.5. Lemma. $L \subset M^n$ を compact nonsingular leaf, $q \in L$ とする. そして $t_0 > 0$ が次の条件をみたすとする:

- (i). L は leaf $L(\psi_{t_0}(q))$ に translate できない.
- (ii). $0 < t < t_0$ に対して L は leaf $L(\psi_t(q))$ に translate できる.

このとき $\exists q' \in L$ s.t. $\forall t > 0$ に対して L は $L(\psi_t(q'))$ に translate 可能で $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_t(q')$ が存在して singular pt.

Proof. むつかしくない.

3.6. Theorem A の証明.

Theorem A は 3.4 及び 3.5 の Lemmas の直接の結果である.