

反対称有向グラフにおける有向ターサ

イクルの個数について

近畿大 田澤新成 (Shinsei TAZAWA)

位数 p の単純グラフの族の中で弦のないターサイクルの最大個数 t_p は

$$t_p = \begin{cases} \binom{n}{2}^2 & (p=2n) \\ \binom{n}{2} \binom{n+1}{2} & (p=2n+1) \end{cases}$$

であり, その極値グラフはそれぞれ $K_{n,n}$ と $K_{n,n+1}$ であることが立花, 奈良[3]により示された。田澤[2]は三角形を含む弦のない連結な (p, g) -単純グラフの族に対し, 弦のないターサイクルの最大個数についての1つの上限を与えた。

ここでは, 位数 p の反対称有向グラフの族の中で弦のない有向ターサイクルの最大個数について考える。そこで, 弦のないターサイクルとはこれの底グラフが弦をもたないことを意味する。この問題について, Moon and Moser[1]は反対称有向グラフの族として $m \times n$ の2組トーナメントの族のもとで, その最大個数は $\lfloor m/4 \rfloor \lfloor n/4 \rfloor$ であることを示した。そこで, $[x]$

は x を越えない最大の整数を表わす。反対称有向グラフ D に含まれる弦の n 個の有向 4-サイクルの個数を $f(D)$ とし、次の結果をえた。

定理 位数 p の反対称有向グラフ D の底グラフが三角形を含まないとき、

$$f(D) \leq \frac{p^4}{128}$$

が成る。

定理の証明 有向 4-サイクル $xyuw$ を点の列 $xyuw$ で表示する。

$\mathcal{L}(D)$ を D に含まれる弦の n 個の有向 4-サイクルの集合として、

$e = uv \in E(D)$ (D の弧集合) に対し、

$$s(e) = \#\{w \in V(D) \mid \exists w' \in V(D), uvw'w \in \mathcal{L}(D)\}$$

$$t(e) = \#\{w' \in V(D) \mid \exists w \in V(D), uvw'w \in \mathcal{L}(D)\}$$

とかくと、

$$f(D) \leq \frac{1}{4} \sum_{e \in E(D)} s(e)t(e) \quad (1)$$

と成る。 D の点 x の出次数を $d^+(x)$ 、入次数を $d^-(x)$ とかくと、

$e = uv \in E(D)$ に対し

$$s(e) \leq d^-(u), \quad t(e) \leq d^+(v) \quad (2)$$

である。 $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$ とかく。 G は D の底グラフとする

とき、 G は三角形を含まないから、 G の各辺 uv に対し、

$$(d(u)-1) + (d(v)-1) \leq p-2 \quad \text{すなわち} \quad d(u) + d(v) \leq p \quad (3)$$

が成り立つ。さて, (2), (3) から

$$\lambda(e) + t(e) \leq p \quad (4)$$

をうる。さらに, (2) から

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E(D)} \{\lambda(e) + t(e)\} &\leq \sum_{u, v \in E(D)} \{d^-(u) + d^+(v)\} = 2 \sum_{u \in V(D)} d^-(u) d^+(u) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{u \in V(D)} d(u)^2 = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in E(G)} \{d(u) + d(v)\} \end{aligned}$$

となり, (3) から

$$\sum_{e \in E(D)} \{\lambda(e) + t(e)\} \leq \frac{1}{2} \delta p \quad (5)$$

をうる。ここで, $\delta = |E(D)|$. 従って, 制約条件 (4), (5) の t と λ の右辺の上限を求めると,

$$\frac{1}{4} \sum_{e \in E(D)} \lambda(e) + t(e) \leq \frac{\delta p^2}{32} \quad (6)$$

となり, G が三角形を含まないという事実からえられた不等式 $\delta \leq p^2/4$ を (6) に適用して求める定理をうる。

参考文献

- [1] J.W.Moon and L.Moser(1962). On the distribution of 4-cycles in random bipartite tournaments. Canad. Math. Bull. 5, 5-12.
- [2] 田澤(1984) Motzkin-Straus 定理, 1, の応用, 日本数学会秋季総会分科会
- [3] 立花, 奈良(1984) 数理解析研究所講演予稿集