

ある種の確率偏微分方程式の解の近似について

九大工. 国田 寛 (Hiroshi Kunita)

ランダムな係数をもつ偏微分方程式を確率偏微分方程式という。ランダムな媒質における熱方程式, ランダムなポテンシャルをもつ Schrodinger 方程式等はその例であり, 物理学の種々の問題と関係して研究されている。一方制御理論, フィルター理論等工学の問題においても確率偏微分方程式が研究されている。この報告では非線形フィルター理論で用いられる Zakai の確率偏微分方程式をとりあげ, その方程式の解の近似と確率力学系 (stochastic flow) の近似の問題と関連させて論じてい。

I. Zakai の確率偏微分方程式

まず二階及び一階の偏微分作用素を導入する。

$$L(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r X_j(t)^2 + h_0(t),$$

$$M_k(t) = Y_k(t) + h_k(t), \quad k=1, \dots, m.$$

ただし $X_j(t)$, $j=1, \dots, r$ 及び $U_k(t)$, $k=1, \dots, m$ は一階偏微分作用素で

$$X_j(t) = \sum_{i=1}^d X_j^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y_k(t) = \sum_{i=1}^d Y_k^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表わされ係数 $X_j^i(t, x)$, $Y_k^i(t, x)$ は (t, x) につき連続かつ x について C^∞ -級関数とする. $f_k(t) = f_k(t, x)$, $k=0, \dots, m$ は (t, x) について連続, x について C^1 -関数とする.

$W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ 上の standard なブラウン運動とする. Zakai の確率偏微分方程式は次のように表わされる.

$$(1) \quad dU_t(x, \omega) = L(t)U_t(x, \omega)dt + \sum_{k=1}^m M_k(t)U_t(x, \omega) \circ dW_t^k$$

定義 確率場 $U_t(x, \omega)$; $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}^d$ が次の性質をもつとき, $t=t_0$ で初期値 $f(x)$ をもつ方程式 (1) の解という.

(i) ほとんど全ての ω に対し, $U_t(x, \omega)$ は (t, x) について連続かつ x について C^∞ -級関数

(ii) x を固定すると $U_t(x)$ は $\mathcal{F}_t$ に適合した semimartingale かつ, その martingale 部分は (t, x) について連続かつ x について C^∞ -級 (a.s.).

(iii) 各 x を固定すると次の確率積分方程式が成り立つ

$$(2) \quad U_t(x) = f(x) + \int_{t_0}^t L(\tau)U_\tau(x) d\tau + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t M_k(\tau)U_\tau(x) \circ dW_\tau^k.$$

上の確率偏微分方程式の解の存在,一意性については,
 Pardoux [1], Krylov-Rozovsky [2], Kunita [3] 等の研究
 がある

二階の放物型線形方程式の解は確率微分方程式の解を用
 いて表現できることはよく知られている。上述の Zakai 方程
 式の解も確率微分方程式の解を用いて表現出来る。このこと
 を示すために別の確率空間 $(W, \mathcal{B}, \tilde{P})$ 上に n -次元 Wiener
 過程 $B_t(\omega) = (B_t^1(\omega), \dots, B_t^n(\omega))$ を用意する。直積空間
 $(\Omega \times W, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \otimes \tilde{P})$ を考えると, W_t と B_t は独立な Wiener
 過程である。

$$\tilde{q}_{s,t} = \sigma(B_u - B_v, W_u - W_v; s \leq u, v \leq t)$$

とあく, $(\Omega \times W, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}, P \otimes \tilde{P})$ 上に次の後向き確率微分方
 程式を考える。

$$(3) \quad d\hat{z}_s = - \sum_{j=1}^n X_j(s, \hat{z}_s) \circ dB_s^j - X_0(s, \hat{z}_s) - \sum_{k=1}^m Y_k(s, \hat{z}_s) \circ dW_s^k$$

定義. t を固定する. $\tilde{q}_{s,t}$ に適合した後向きの連続 semi-
 martingale $\hat{z}_s, s \in [0, T]$ を

$$(4) \quad \begin{aligned} \hat{z}_s = & \alpha + \sum_{j=1}^n \int_s^t X_j(z, \hat{z}_z) \circ dB_z^j + \int_s^t X_0(z, \hat{z}_z) dz \\ & + \sum_{k=1}^m \int_s^t Y_k(z, \hat{z}_z) \circ dW_z^k \end{aligned}$$

を満たすとき (3) の解という。ただし $X_j(z, \alpha), Y_k(z, \alpha)$ は
 一階偏微分作用素 $X_j(H), Y_k(H)$ の係数の作るベクトル。

$\int_s^t f_t \circ dB_t$ は後向き Stratonovich 確率積分で, $\tilde{f}_{s,t}$ に
適当した後向き semimartingale $f_s, s \in [0, T]$ に対し次式で
定義される.

$$\int_s^t f_t \circ dB_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{e=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f_{t_e} + f_{t_{e+1}}) (B_{t_{e+1}} - B_{t_e})$$

ただし $\Delta = \{s=t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$.

以下では関数 $X_t(t, \alpha), Y_t(t, \alpha)$ は有界関数であるとする.
このとき (4) は唯一つの解をもつ. これを $\hat{\Sigma}_{s,t}(\alpha) = \hat{\Sigma}_{s,t}(\alpha, \omega, w)$
と書く. 次の命題はよく知られている.

命題 1. $\hat{\Sigma}_{s,t}(\alpha, \omega, w)$ の変形で, ほとんど全ての (ω, w) に
おいて次の性質をもつものが存在する.

- (i) $\hat{\Sigma}_{s,t}(\alpha, \omega, w)$ は (s, t, α) について連続, α について C^∞
- (ii) s, t を固定すると, 写像 $\hat{\Sigma}_{s,t}(\cdot, \omega, w): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ は C^∞
微分同型である.

$$(iii) \forall s < t \text{ に対し } \hat{\Sigma}_{s,u} = \hat{\Sigma}_{s,t} \circ \hat{\Sigma}_{t,u}$$

証明は Kunita [4] に参照した. .

今 t_0 を固定して $t \in [t_0, T]$ に対し

$$(5) \quad U_t(\alpha, \omega) = \tilde{E} \left[f(\hat{\Sigma}_{t_0,t}(\alpha, \omega, \cdot)) \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{t_0}^t h_k(\tau, \hat{\Sigma}_{\tau,t}(\alpha, \omega, \cdot)) \circ dW_k^k \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^t h_0(\tau, \hat{\Sigma}_{\tau,t}(\alpha, \omega, \cdot)) d\tau \right\} \right]$$

とおく.

定理 2. 上の $u_t(\omega, w)$ は (2) の解である

証明の概略.

$$\bar{\Phi}_{s,t}(\omega) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^m \int_s^t h_k(r, \hat{\Sigma}_{r,t}(\omega)) \circ dW_r^k + \int_s^t h_0(r, \hat{\Sigma}_{r,t}(\omega)) dr \right\}$$

とおく. 後向き伊藤の公式 (Kunita (47)) を後向きの積分に適用すると, 次の前向き伊藤型公式を得る.

$$\begin{aligned} (6) \quad & f(\hat{\Sigma}_{s,t}(\omega)) \hat{\Phi}_{s,t}(\omega) - f(\omega) \\ &= \sum_{j=1}^r \int_s^t \lambda_j(z) (f \circ \hat{\Sigma}_{s,z} \hat{\Phi}_{s,z})(\omega) \circ dB_z^j \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_s^t \gamma_k(z) (f \circ \hat{\Sigma}_{s,z} \hat{\Phi}_{s,z})(\omega) \circ dW_z^k \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_s^t f \circ \hat{\Sigma}_{s,z}(\omega) h_k(z, \hat{\Sigma}_{s,z}(\omega)) \hat{\Phi}_{s,z}(\omega) \circ dW_z^k \\ &+ \int_s^t f \circ \hat{\Sigma}_{s,z}(\omega) h_0(z, \hat{\Sigma}_{s,z}(\omega)) \hat{\Phi}_{s,z}(\omega) dz \end{aligned}$$

ただし $B_t^0 = t$ とする. 右辺の最后一項を伊藤積分で書き直すと

$$\begin{aligned} (7) \quad & \sum_{j=1}^r \int_s^t \lambda_j(z) (f \circ \hat{\Sigma}_{s,z} \hat{\Phi}_{s,z})(\omega) dB_z^j \\ &+ \int_s^t L(z) (f \circ \hat{\Sigma}_{s,z} \hat{\Phi}_{s,z})(\omega) dz \end{aligned}$$

(6) の各項を測度 $\tilde{P}$ で積分する. 左辺は $u_t(\omega, w) - f(\omega)$. 右辺の最后一項の積分は, (7) の最后一項の積分が 0 であることに注意し, 微分と積分の順序交換を行えば

$$\tilde{E}\left[\int_s^{t+} L(z) \left(1 + \sum_{k=1}^m \hat{z}_{s,k} \hat{z}_{s,k} \right) dz\right] = \int_s^{t+} L(z) u_z(z, \omega) dz$$

(6) の右辺の σ_2 の積分は、確率積分と順序交換を行
うことができる。

$$\sum_{k=1}^m \int_s^{t+} Y_k(z) u_z(z, \omega) \circ dW_z^k.$$

σ_3 項及び σ_4 項の積分についても類似の結果を得る。
これらを集めれば (2) が成立することがわかる。

II. 解の近似

確率微分方程式の近似解を求める方法として、Wiener 過
程を折線で近似したり、mollifier を用いて滑らかなものを
近似する方法が知られている。これらの方法は確率微分方
程式の解が stochastic flow を定義することと証明する
ために用いられた。Ikeda-Watanabe [5], Bismut [6],
Shu [7]. 確率偏微分方程式についてもこれらの近似が
有効であることを示そう。

Wiener 過程 $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^m)$ の折線近似 $W_t^{(n)}$ は
次のように定義する。

$$W_t^{(n)} = W_{\frac{k}{n}T} + \frac{n}{T} (W_{\frac{k+1}{n}T} - W_{\frac{k}{n}T}) (1 - \frac{k}{n}T),$$

$$\frac{k}{n}T \leq t < \frac{k+1}{n}T \quad \text{のとき}$$

また mollifier に δ に近似列 $W_t^{(n)}$ は $\mathbb{R}$ で定義する.

$$W_t^{(n)} = \int_0^T W_s \varphi_n(t-s) ds$$

ただし $\varphi(t)$ は $[0,1]$ に $\varphi \geq 0$ の非負 C^∞ 関数で $\int_0^1 \varphi(s) ds = 1$. $\varphi_n(t) = n \varphi(nt)$. 11 節の場合でも $W_t^{(n)}$, $n=1,2,\dots$ は W_t に一様収束する.

Wiener 過程 W_t の区分的にたぬらかな近似列 $W_t^{(n)}$, $n=1,2,\dots$ があることを示す. 各 n に対し $\mathbb{R}$ の確率偏微分方程式を考へる.

$$(8) \quad \frac{\partial u_t(x)}{\partial t} = L_H(u_t(x)) + \sum_{k=1}^m H_k(t) u_t(x) \cdot \dot{W}_t^{(n),k}$$

ただし $\dot{W}_t^{(n)}$ は $W_t^{(n)}$ の時間微分である. $t=t_0$ で初期値 $f(x)$ とする解を $u_t^n(x, \omega)$ とする. 11 節と同様に確率微分方程式の解を用いて表わそう. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{W}, \mathcal{F}, P \times \tilde{P})$ 上に $\mathbb{R}$ の後向き確率微分方程式を考へる.

$$d\hat{\xi}_s = \sum_j X_j(\hat{\xi}_s) \circ d\hat{B}_s^j + \sum_{k=1}^m Y_k(\hat{\xi}_s) \dot{W}_s^{(n),k}$$

時刻 t で α を通る解を $\hat{\xi}_{s,t}^n(x)$ と書く. 即ち

$$(9) \quad \hat{\xi}_{s,t}^n(x) = \alpha + \sum_{j=1}^r \int_s^t X_j(\hat{\xi}_{r,\tau}^n(x)) \circ d\hat{B}_\tau^j + \sum_{k=1}^m \int_s^t Y_k(\hat{\xi}_{r,\tau}^n(x)) \dot{W}_\tau^{(n),k} d\tau$$

$\hat{\xi}_{s,t}^n$ に関することも命題 1 が成り立つ.

定理3. t_0 を固定する.

$$(10) \quad u_{t_0,t}^n(\alpha, \omega) = \tilde{E}[f(\xi_{t_0,t}^n(\alpha, \omega, \cdot)) \hat{\xi}_{s,t}^n(\alpha, \omega, \cdot)]$$

は (2.1) の解である. したがって

$$(11) \quad \hat{\xi}_{s,t}^n(\alpha, \omega, \eta) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^r \int_s^t h_j(\tau, \xi_{\tau,t}^n(\alpha)) \dot{W}_\tau^{(n),k} d\tau \right. \\ \left. + \int_s^t h_0(\tau, \xi_{\tau,t}^n(\alpha)) d\tau \right\}$$

証明は定理2 と同様に出来る.

定理4. $W_t^{(n)}, n=1, 2, \dots$ が Wiener 過程の断続近似または mollifier 近似とする. $u_t^n(\alpha, \omega)$ 及び $u_t(\alpha, \omega)$ とそれぞれ初期値 $f(\alpha)$ ともつ確率偏微分方程式 (2) 及び (8) の解とする. このとき任意の $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial \alpha_i})^{\alpha_i}$. $(\frac{\partial}{\partial \alpha_i})^{\alpha_i}$ に対し

$$D^\alpha u_t^n(\alpha) \implies D u_t(\alpha, \omega) \quad (\text{広義-様}) \quad \text{in } L^2(P)$$

が成立する.

この定理の証明のためには次の stochastic flow の収束定理が基礎になる.

定理5 定理3 と同じ仮定の下で

$$D^\alpha \hat{\xi}_{s,t}^{(n)}(\alpha, \omega, \eta) \implies D^\alpha \hat{\xi}_{s,t}(\alpha, \omega, \eta) \quad (\text{広義-様}) \quad \text{in } L^2(P \otimes \tilde{P})$$

$$D^\alpha (\hat{\xi}_{s,t}^{(n)})^{-1}(\alpha, \omega, \eta) \implies D^\alpha (\hat{\xi}_{s,t})^{-1}(\alpha, \omega, \eta) \quad (\quad) \quad "$$

が成立する.

文 献

- [1] E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics*, 3 (1979), 127-167.
- [2] N. V. Krylov-B. L. Rozovskii, On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations, *Math. USSR Izvestiya* 11 (1977), 1267-1284.
- [3] H. Kunita, Cauchy problem for stochastic partial differential equations arising in nonlinear filtering theory, *Systems & Control letters*, 1 (1981), 37-41.
- [4] H. Kunita, Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms, *Lecture Notes in Math.* 1097 (1984), 144-303.
- [5] N. Ikeda-S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North Holland-Kodansha, 1981.
- [6] J. M. Bismut, *Mécanique aléatoire*, *Lecture Notes in Math.* 866 (1981).
- [7] J. G. Shu, On the mollifier approximation for solutions of stochastic differential equations, *J. Math. Kyoto Univ.* 22 (1982), 243-254.