

A. A. CARACUBA による VINOGRADOV 積分の評価について

名工大 数学教室 江田義計

§1. 自然数 k ($k \geq 2$, 以下 k は正の整数), $s > s_0$ に対し次へ連立 DIOPHANTINE 方程式

$$(1) \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_s = y_1 + \cdots + y_s, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_1^k + \cdots + x_s^k = y_1^k + \cdots + y_s^k, \\ 1 \leq x_i, y_i \leq P \quad (i=1, 2, \dots, s) \end{cases}$$

の解 $(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$ の解の個数 $I_k(P)$ を求めることは大変興味あることであり, 実は Waring 問題等この種の型の問題の基礎となるものである。

L. K. HUA は 1952 年に中国科学の中で

$$(2) \quad \begin{cases} k \geq 2, \quad s_0 = [k^2 (3 \log k + \log \log k + 4)] \\ I_k(P) \sim c P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

を証明している。

この結果は VINOGRADOV による方法と改良進展させたものの一つである。VINOGRADOV の方法については英訳本: THE

METHOD OF TRIGONOMETRICAL SUMS IN THE THEORY OF NUMBERS

(1954), [1] によって見られる。

WARING 問題 というのは

自然数 $k \geq c$ に対し, すべて k の s 個の自然数 $N \in$

$$N = x_1^k + \dots + x_s^k$$

のように非負の整数 $x_1, \dots, x_s$ で表わすような s を求めること, または, このような s の最小値 $G(k)$ とこれの最良の上界を求めることである。VINOGRADOV は 1937 年に彼の

CIRCLE METHOD によって

$$\begin{cases} k \geq 3 \quad \text{かつ} \\ G(k) < 3k \log k + 11k \end{cases}$$

と示しているが ([1] 参照) 更に苦心の改良によって 1959 年には

$$(3) \quad \begin{cases} k \geq 170000 \quad \text{に対し} \\ G(k) < k(2 \log k + 4 \log \log k + 2 \log \log \log k + 13) \end{cases}$$

を得ている。

§2. (1) の解の個数を評価する問題は

$$f(x) = \alpha_k x^k + \dots + \alpha_1 x$$

としたとき, 次の VINOGRADOV 積分とも平均値定理ともよばれる

積分

$$I = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x=0}^P e^{2\pi i f(x)} \right|^{2s} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k$$

を評価することは帰着される。これは VINOGRADOV によつて
 開発された方法であり、[1]で見ることがよい。(3)を得るにはこの平
 均値定理が必要であるが、これには(2)の形でなくとも次の形
 でよい：

$$(4) \quad \begin{cases} s > c_1 k^2 \log k & \text{のとき} \\ I_k(P) \leq c P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

A. A. Karacuba は 1973 年に (4) を精密な形で

$$(5) \quad \begin{cases} k \geq 2, P \geq 1, s \geq c k^2 \log k & \text{のとき} \\ I \leq e^{c_1 k^2 \log k} P^{2s - \frac{1}{2}k(k+1)} \end{cases}$$

を与えている。(c_1, c は $\leq$ は絶対常数である)。 (5) の
 結果もその方法を大変面白く復れしている。有限次代数体^Kでも
 Waring 問題は論ぜられ、 $G(k)$ と類似の函数 $G_K(k)$ を定
 義することは出来るが、もし (5) が K で求のうられれば現在知
 られている $G_K(k)$ の上界を更に少く出来ることを注意す
 る。 = のことは可能であらう。