

3次元双曲型空間の平坦フロント

山田光太郎

3次元双曲型空間 H^3 の平坦な曲面に対して、それを正則なデータで表現する Weierstrass 型表現公式が知られている (Gálvez, Martínez, Milán [GMM]). ただし、曲面の複素構造は、第2基本形式 (ガウス方程式より定値になる) が定める共形構造によって与えられる。一方、 H^3 の完備平坦な曲面は horosphere と、測地線から等距離にある点がなす曲面に限る。したがって、平坦曲面の大域的な理論は意味をなさない。しかし、ある種の特異性を許す平坦曲面 — flat front — を考えれば、表現公式を通して豊かな幾何学を考えることができる。本稿では、國分雅敏, Wayne Rossman, 佐治健太郎, 梅原雅顕各氏との共同研究 [KUY, KRSUY, KRUY] に基づき、平坦フロントの幾何学を解説する。

1 3次元双曲型空間の平坦な曲面

断面曲率 -1 の3次元双曲型空間を H^3 で表す。2次元多様体 M^2 から H^3 へのはめこみ $f: M^2 \rightarrow H^3$ が平坦であるとは、ガウス曲率が恒等的に 0 となることである。

完備平坦な曲面は horosphere と双曲的円柱 (測地線から等距離にある点の集合) に限ることが知られている (Volkov-Vladimirova, S. Sasaki, 図1)。

一方、平坦曲面は次のような良い性質を持つ：

- 平坦はめこみ $f: M^2 \rightarrow H^3$ の第二基本形式は定値になる (ガウス方程式) から、 M^2 に共形構造を与える。これから定まる複素構造にかんする正則なデータによって、曲面を陽に表すワイエルストラス型表現公式がある [GMM, KUY]。
- 平坦な曲面の平行曲面はまた平坦である。
- ある種の特異点を許せば、例が豊富にある (図1)。

2 双曲型空間の平坦フロント

2次元多様体 M^2 から双曲空間 H^3 への、一般にはめこみとは限らない可微分写像 $f: M^2 \rightarrow H^3$ がフロントである、とは、 M^2 から単位余接束 $T_1^*H^3$ へのルジャンドルはめこみ $L: M^2 \rightarrow T_1^*H^3$ でその射影が f となるものが存在することである。リーマン計量を用いて $T_1^*H^3$ と単位接束 T_1H^3 を同一視すれば、ルジャンドル写像 L は、 f の「単

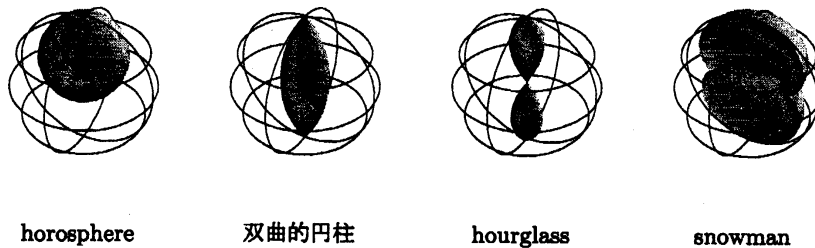


図 1: 完備平坦曲面 (左 2 つ); 特異点をもつ回転面 (右 2 つ)

「単位法線ベクトル場」 ν と見なすことができる。すなわち ν は f に沿った単位ベクトル場で、 $\langle df, \nu \rangle = 0$ を満たしている。

フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ の単位法線ベクトルを ν とするとき、 $t \in \mathbb{R}$ に対して $f_t(p) = \text{Exp}_{f(p)} t\nu(p)$ ($p \in M^2$) で与えられる写像 $f_t: M^2 \rightarrow H^3$ はまたフロントを与える。ただし Exp は H^3 の指数写像である。これを f から距離 t の平行フロントとよぶ。

点 p の近傍で f が平坦なはめこみを与えているとき、 f_t も (はめこみである限り) また平坦である。このことを用いて、平坦フロントを次のように定義する：

定義 2.1. フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ が平坦フロントであるとは、各点 p に対して、ある平行フロント f_t が p の近傍で平坦なはめこみを与えることである。

Gálvez, Martínez, Milán は H^3 の (特異点をもたない) 平坦な曲面を複素解析的なデータで表す、ワイエルストラス型の表現公式を示した [GMM] が、それは平坦フロントの場合に拡張できる [KUY]。その表現公式を述べるために、 H^3 を

$$H^3 = \text{SL}(2, \mathbb{C}) / \text{SU}(2) = \{a^t \bar{a}; a \in \text{SL}(2, \mathbb{C})\}$$

とみなしておく。

定理 2.2 (ワイエルストラス型表現 [GMM, KUY]). 平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ に対して、 M^2 の複素構造とその複素構造に関して正則なはめこみ $E: \widetilde{M}^2 \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ が存在して、 $f = E^t \bar{E}$ かつ

$$(2.1) \quad E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (\omega, \theta: \text{正則 1 形式})$$

と書ける。さらに

$$(2.2) \quad d\sigma^2 = |\theta|^2 + |\omega|^2$$

は M^2 上の (非退化な) リーマン計量を与える。

逆に、 H^3 の平坦フロントはこのようにして得られる。

式 (2.1) の ω, θ を canonical forms, E を f の正則持ち上げという。

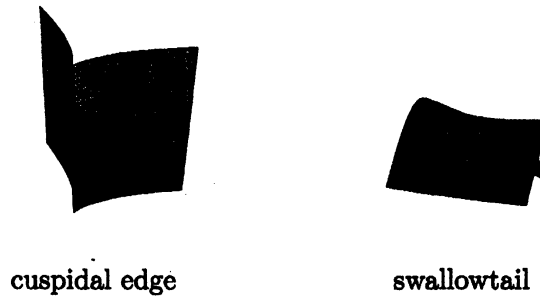


図 2: フロントのジェネリックな特異点

平坦フロントの canonical forms を用いて, f による H^3 の計量の引き戻し ds^2 (第一基本形式) および第二基本形式 $II = -\langle df, d\nu \rangle$ を次のように表すことができる. ただし $\langle, \rangle$ は H^3 の計量から定まる内積, ν は f の単位法線ベクトル場である:

$$ds^2 = \omega\theta + \overline{\omega\theta} + (|\omega|^2 + |\theta|^2), \quad II = |\theta|^2 - |\omega|^2.$$

フロント f のルジャンドル持ち上げ $L_f: M^2 \rightarrow T_1^*H^3$ による単位余接バンドルの標準的な計量 (佐々木計量) の引き戻しは (2.2) の 2 倍になる. M^2 の複素構造は (誘導計量が退化する点でも) このリーマン計量から与えられるものである.

3 特異点の判定条件

フロントであることは, 値域のリーマン構造によらない. ここでは, H^3 のフロントを局所的に R^3 のフロントと見なし, その特異点の局所的な性質を調べる. R^2 の原点の近傍 U 上で定義された, 原点に特異点をもつ R^3 へのフロント $f_1: (U, 0) \rightarrow (R^3, 0)$ と $f_2: (U, 0) \rightarrow (R^3, 0)$ が原点において A -同値である, とは原点を固定する R^2 の局所微分同相 φ と, 原点を固定する R^3 の局所微分同相 Φ が存在して $f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \varphi$ が成り立つことである. 3次元多様体内のフロントのジェネリックな特異点は cuspidal edge $(u, v) \mapsto f_C(u, v) = (u, v^2, v^3)$ または swallowtail $(u, v) \mapsto f_S(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ と A -同値である (図 2).

一般に, フロントの特異点が cuspidal edge, swallowtail と A -同値 (以下, 誤解の恐れがない場合は単に “cuspidal edge (swallowtail) である” という) であるための必要十分条件が [KRSUY] で与えられたが, とくに, 平坦フロントの場合は, 誘導計量が複素データ (canonical forms ω, θ) によって表されているので, これらを用いて判定条件を書くことができる:

定理 3.1 (特異点の判定条件 [KRSUY, Theorem 1.2]). 双曲型空間の平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ の定義域上の点 $p \in M^2$ のまわりの複素座標 z をとり, canonical forms ω, θ を $\omega = \hat{\omega}dz, \theta = \hat{\theta}dz$ と表すと,

- p が f の特異点であるための必要十分条件は $|\hat{\omega}| = |\hat{\theta}|$ が成り立つことである. (このとき, フロントであることからこの値は 0 にならない.)

- 特異点 p が非退化であるための必要十分条件は $\hat{\omega}'\hat{\theta} - \hat{\theta}'\hat{\omega} \neq 0$ が成り立つことである。ただし $' = d/dz$ である。
- 非退化な特異点 p の像が cuspidal edge と局所微分同相であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Im} \left(\frac{(\hat{\theta}'/\hat{\theta}) - (\hat{\omega}'/\hat{\omega})}{\sqrt{\hat{\omega}\hat{\theta}}} \right) \neq 0$$

が成り立つことである。

- 非退化な特異点 p の像が swallowtail と局所微分同相であるための必要十分条件は

$$\operatorname{Im} \left(\frac{(\hat{\theta}'/\hat{\theta}) - (\hat{\omega}'/\hat{\omega})}{\sqrt{\hat{\omega}\hat{\theta}}} \right) = 0 \quad \text{かつ} \quad \operatorname{Re} \left(\frac{s(\hat{\theta}) - s(\hat{\omega})}{\hat{\omega}\hat{\theta}} \right) \neq 0$$

が成り立つことである。ただし、 $s(\hat{\omega})$ は

$$s(\hat{\omega}) = \left(\frac{\hat{\omega}'}{\hat{\omega}} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\omega}'}{\hat{\omega}} \right)^2,$$

すなわち ω の積分で与えられる関数の Schwarz 微分である。

特異点の近くでは ω も θ も 0 にならないから、 $\omega = dz$ となるような座標系をとることができる。さらに $\theta = e^h dz$ と書くと、局所的には平坦フロントはひとつの解析関数 h でパラメータづけられることがわかる。以下 f_h で canonical forms $(dz, e^h dz)$ により定まる平坦フロントを表すことにする。定理 3.1 の応用として、この状況のもとでジェネリックな特異点は cuspidal edge と swallowtail のみであることを示すことができる。より正確に述べれば

定理 3.2 ([KRSUY, Theorem 3.4]). 領域 $U \subset \mathbb{C}$ をひとつ固定し、 $\mathcal{F}(U) := \{f_h | h \in \mathcal{O}(U)\}$ に $\mathcal{O}(U)$ の C^∞ コンパクト開位相をいれておく。任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して、 $S(K) \subset \mathcal{F}(U)$ を K 上の特異点は cuspidal edge と swallowtail のみであるような平坦フロントの集合とする。このとき、 $S(K)$ は $\mathcal{F}(U)$ の開かつ稠密な部分集合である。

4 平行曲面と特異点

平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ の各点 p に対して、 $f(p)$ から $-\nu(p)$ ($\nu(p)$) 方向に出発する H^3 の測地線が定める H^3 の理想境界 $\partial H^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の点 $G(p)$ ($G_*(p)$) を対応させる写像 G, G_* を双曲的ガウス写像という。フロント f の正則持ち上げ $E = (E_{ij})$ に対して $G = E_{11}/E_{21}$, $G_* = E_{12}/E_{22}$ と書けるので、これらは M^2 の複素構造に関して正則写像となることがわかる。すなわち、 G, G_* は M^2 上の有理型関数である。定義より、 f とその平行フロント f_t の双曲的ガウス写像は一致する。逆に、双曲的ガウス写像を一組与えれば、それに対して平坦フロントの平行族が次のようにして得られる：

$$f = E^t \bar{E}, \quad E = \begin{pmatrix} G/\Delta & G_*\Delta/(G - G_*) \\ 1/\Delta & \Delta/(G - G_*) \end{pmatrix} \quad \Delta := e^t \exp \int \frac{dG}{G - G_*}.$$

ここで t は平行族のパラメータを与えている。

一方, $Q = \omega\theta$ は f の誘導計量の $(2,0)$ -part を与えている。これを ホップ微分 という。ホップ微分もまた平行フロント族に共通な量である。実際, これは

$$Q = \frac{-dG dG_*}{(G - G_*)^2}$$

と表すことができる。

これを用いて定理 3.1 を双曲的ガウス写像の言葉で書き換えることができる：

命題 4.1 ([KRSUY]). 平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ の双曲的ガウス写像を G, G_* , ホップ微分を $Q = \hat{Q} dz^2$ (z は M^2 の複素座標), canonical forms を ω, θ とする。さらに,

$$\begin{aligned} \rho &:= \frac{\theta}{\omega}, & \xi &= \left(\frac{G''_*}{G'_*} - \frac{G''}{G'} + 2 \frac{G' + G'_*}{G - G_*} \right) \hat{Q} dz^3, \\ \zeta_c &= \left(\frac{G''_*}{G'_*} - \frac{G''}{G'} + 2 \frac{G' + G'_*}{G - G_*} \right)^2 \frac{1}{\hat{Q}}, & \zeta_s &= \frac{\{G_*, z\} - \{G, z\}}{\hat{Q}} = \frac{S(G_*) - S(G)}{Q} \end{aligned}$$

とおき,

$$\begin{aligned} \Sigma(f) &:= \{p \in M^2; |\rho(p)| = 1\}, & Z_0(f) &:= \{p \in M^2; \xi(p) = 0\}, \\ Z_c(f) &:= \{p \in M^2; \operatorname{Im} \sqrt{\zeta_c(p)} = 0\}, & Z_s(f) &:= \{p \in M^2; \operatorname{Re} \zeta_s(p) = 0\}. \end{aligned}$$

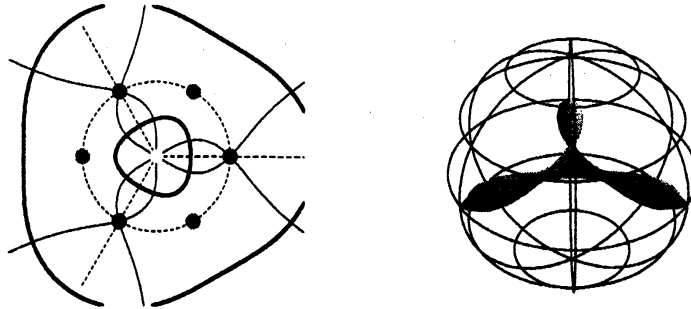
と書くと,

- $p \in M^2$ が f の特異点であるための必要十分条件は $p \in \Sigma(f)$ となることである。
- $p \in M^2$ が非退化な特異点であるための必要十分条件は $p \in \Sigma(f) \cap Z_0(f)^c$ となることである。
- $p \in M^2$ の像が cupsidal edge と局所微分同相であるための必要十分条件は $p \in \Sigma(f) \cap Z_0(f)^c \cap Z_c(f)^c$ となることである。
- $p \in M^2$ の像が swallowtail と局所微分同相であるための必要十分条件は $p \in \Sigma(f) \cap Z_0(f)^c \cap Z_c(f) \cap Z_s(f)^c$ となることである。

注意 4.2. 判定条件を与える集合 $Z_0(f), Z_c(f), Z_s(f)$ は双曲的ガウス写像によって定義される。したがって, フロントの平行族に共通である: $Z_0(f) = Z_0(f_t)$, etc. 一方, 平行フロントの特異点集合 $\Sigma(f_t)$ は

$$\Sigma(f_t) = \{p \in M^2 \mid |\rho| = e^{2t}\}$$

で与えられる。すなわち $|\rho|$ の level set である。



左図 (定義域) 上の黒丸はエンド, 白丸は臍点, 灰色の丸は Z_0 を表している. さらに, 破線は Z_c , 細い実線は Z_s , 太い実線は特異点集合である. 特異点集合が Z_c と交わる 6 点が swallowtail であり, 他の特異点は cuspidal edge であることがわかる.

図 3: Trinoid

特異点の例

簡単な具体例 (trinoid) を用いて, 特異点のあらわれかたを観察しよう: $M^2 = C \cup \{\infty\} \setminus \{1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$ とおき, $f: M^2 \rightarrow H^3$ を

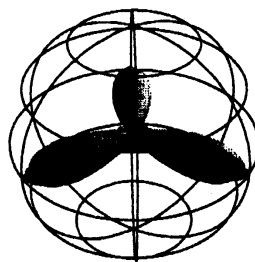
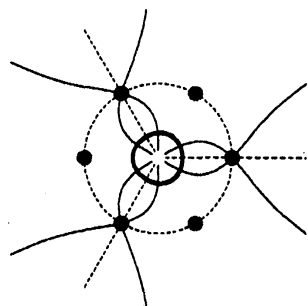
$$G = z, \quad \omega = (z^3 - 1)^{-(1/2)}$$

で与えられるものとする (図 3). 集合 $Z_0(f)$ は, 解析関数の零点であるから離散的な点となる (図 3 左の灰色の丸). また $Z_c(f)$, $Z_s(f)$ はそれぞれ図 3 の破線と細い実線で与えられている. 特異点集合がこれらの集合と交わると, cuspidal edge 以外の特異点が生じるはずである. 実際, この例では 6 つの swallowtail があらわれる.

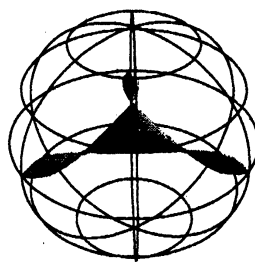
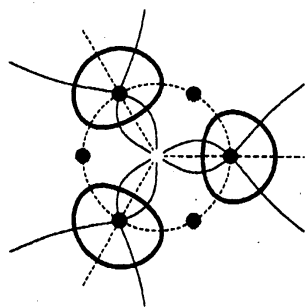
フロント f の平行フロント族を考える. このとき, Z_0 , Z_c , Z_s は変わらないが, 特異点集合 $\Sigma(f_t)$ が変化する (すなわち $|\rho|$ の別の等高線となる). 図 4 を見ると, 特異点集合が 2 つの連結成分となったり 3 つの連結成分となったりすることがわかる. とくに $t = \sqrt[3]{2}$ のとき, 特異点集合は Z_0 を通り, cuspidal edge でも swallowtail でもない (退化した) 特異点があられるが, それ以外の場合にあられる特異点は cuspidal edge と swallowtail のみになることがわかる. これは $Z_c(f) \cap Z_s(f)$ がエンドと臍点からなるが, これらが特異点となることがないからである.

5 平坦フロントの大域的な性質

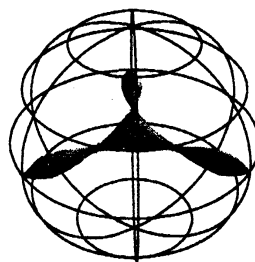
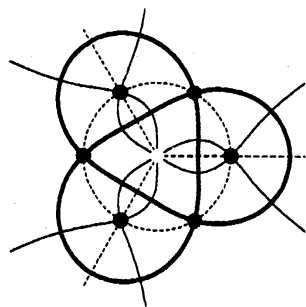
ワイエルストラス型の表現公式, すなわち正則関数による表現公式は, 大域的な議論のための強力な道具である. 平坦フロントは一般に特異点を持つので, 大域的な議論をするための枠組を作っておく.



$t = -0.2$

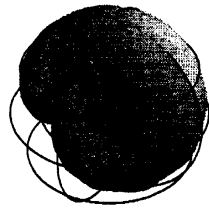


$t = 0.2$

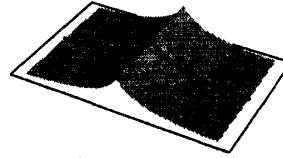


$t = (\log 2)/6$

図 4: Trionoid の平行フロント



ポアンカレ球モデル



上半空間モデル

図 5: Peach front: 上半空間モデルでは犬追線を平行移動したもの

完備性

定義 5.1. なめらかな 2 次元多様体 M^2 上で定義された平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ が完備であるとは, M^2 上の対称 2 テンソル T で, (1) M^2 のあるコンパクト集合の外側では 0, (2) $ds^2 + T$ は M^2 上の完備なリーマン計量, となるものが存在することである. ここで ds^2 は f の第一基本形式である.

たとえば, 図 1, 3 などは完備なフロントである. 図 5 のようなフロントは, “エンド” に特異点が集積するので, 完備ではない.

平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ が完備ならば

- リーマン面 M^2 はコンパクト・リーマン面 $\overline{M}^2$ から有限個の点 (エンド) を除いたものに正則同値.
- ホップ微分 Q は $\overline{M}^2$ 上の有理型 2 微分に拡張される.
- Canonical forms ω, θ は M^2 の普遍被覆上で定義される正則 1 次微分形式であるが, 各エンドの近傍で $\omega = z^\mu \omega_0, \theta = z^{\mu^*} \theta_0$ の形にかけ. ただし z は原点がエンドに対応する複素座標, $\mu, \mu^* \in \mathbb{R}, \omega_0, \theta_0$ は $z = 0$ の近傍で正則な微分形式である.

一方, 双曲的ガウス写像 G, G_* はエンドで正則 (有理型) になるとは限らない. G, G_* が有理型となるエンドを regular end, そうでないものを irregular end とよぶ. とくに, すべてのエンドが regular end であるならば, G, G_* はコンパクト・リーマン面 $\overline{M}^2$ 上の有理型関数になるので, それぞれ有限の写像度を持つ.

定理 5.2 ([KUY]). 完備平坦フロントの双曲的ガウス写像 G, G_* は

$$\deg G + \deg G_* \geq (\text{エンドの数})$$

を満たす. とくに, 等号は, 全てのエンドが regular で, かつエンドの近傍で自己交叉をもたないことである.

これは, ユークリッド空間の極小曲面の Osserman の不等式の対応物と考えることができる.

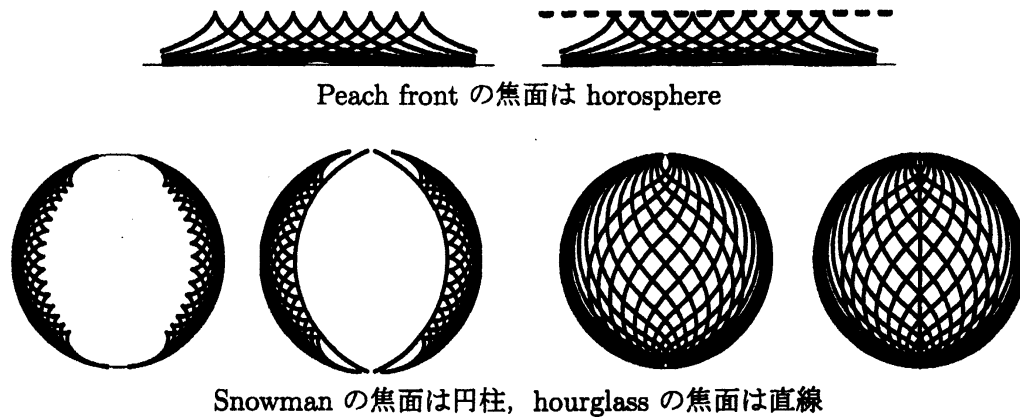


図 6: 平坦フロントの焦面

特異点集合の大域的性質

第4節の例では、平行フロント族のうち、cuspidal edge や swallowtail 以外の特異点を持つものはひとつしかなかった。大域的な仮定のもと、このことが一般的に成り立つことがわかる：

定理 5.3. 完備な平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ の平行フロント族 $\{f_t\}$ を考える。もし、 f が hourglass (図1の三番目の回転面) の被覆でなければ、有限個の t の値をのぞいて f_t の全ての特異点は cuspidal edge か swallowtail に局所微分同相である。

定理 5.3 の証明は、集合 $Z_c(f) \cap Z_s(f)$ を詳細に調べることによる。前の節の例では、この集合は臍点集合と一致したが、一般に、 $Z_c(f) \cap Z_s(f)$ が集積点を持つならば、その点の近傍で有限個 $|\rho|$ の level set の和集合に一致することが言え、このことから結論を得ることができる。

6 焦面

曲面（フロント）の主曲率中心の軌跡を焦面 *caustic* という。焦面は、また平行曲面族における特異点の軌跡である。図5のフロントの平行フロントは、もとのフロントの平行移動となる。とくに、その特異点の軌跡は上半空間の水平な平面、すなわち horosphere になっている。また、図1の回転面、とくに snowman の焦面は双曲的円柱、hourglass の焦面は1本の測地線となっている（図6）。

Roitman [R] は、平坦曲面の焦面が（はめこみになっているような点では）平坦であることを示し、もとの平行曲面族の双曲的ガウス写像を用いて焦面を表す公式を得た。さらに、この焦面は、特異点の近傍ではフロントになることもわかる。しかし、一般に単位法線ベクトルが大域的に定義できないことがある。また、完備平坦フロントの焦面も完備とは限らない。実際、図7のように「エンド」に特異点が集積する場合があります。このような対象も考察するため、平坦フロントの定義と完備性の概念を拡張する：

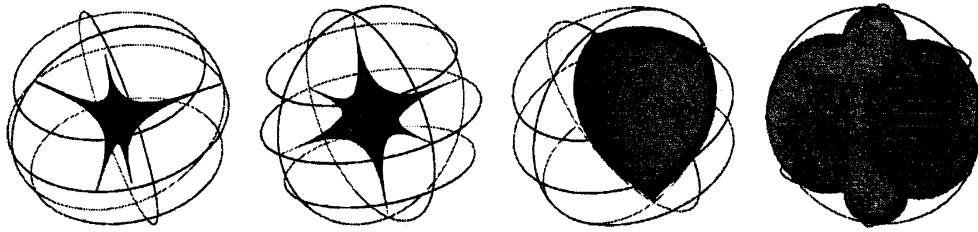


図 7: 焦面としてあらわれる p-フロント

定義 6.1. • 写像 $f: M^2 \rightarrow H^3$ が平坦 p-フロントである, とは各点 $x \in M^2$ の近傍ではフロントとなることである.

- 平坦フロント $f: M^2 \rightarrow H^3$ が弱完備であるとはそのルジャンドル持ち上げ $L: M^2 \rightarrow T_1^*H^3$ による誘導計量が完備となることである.

このように定義すると, 次のことがわかる [KRUY]:

- H^3 の平坦 p-フロントは向きづけ可能である.
- フロントでない p-フロントの 2 重被覆はフロントである.
- 完備な平坦フロントは弱完備である.

この言葉を用いれば

完備な平坦フロントの焦面は, 弱完備な平坦 p-フロントになる

ことがわかる [KRUY].

参考文献

- [GMM] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann. **316** (2000), 419–435.
- [KUY] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. of Math. **216** (2004) 149–175.
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic space*, Pacific J. of Math. **221** (2005) 303–351.
- [KRUY] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, to appear in J. of Math. Soc. Japan.
- [R] P. Roitman, *A flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics*, preprint.