

Diophantus 不等式 $|\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2| < \varepsilon$ の可解性について

山梨大学 中井嘉信 (Yoshinobu Nakai)

実数係数不定値の 2 次形式 $Q(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) について

「[?] $\forall \varepsilon$ 実数 > 0 , $\exists x \in \mathbb{Z}^n (\neq 0)$ s.t. $|Q(x)| < \varepsilon$ 」

のような Diophantus 不等式を扱った。 $\forall (Q(x))$ が、有理数係数ならば、 ε がある程度小さくなると、不等式を解く事は、Diophantus 方程式 $Q(x) = 0$ を解く事と同じになり、これは $Q(x)$ の「対角化」を行う事により、十分にくまなく調べられて来ている。一方 $Q(x)$ が真に実数係数のまゝのとき、つまり、 $\forall \alpha$ 実数 ($\neq 0$) について $\alpha Q(x)$ は整数係数にならない (Oppenheim (1931) の "incommensurable") とき、有理数係数の場合の手法はそのままでは使えなくなる。そこで問題は二つに分れて、

「[?] $\exists n_0$ s.t. $\forall n \geq n_0$, $\forall Q(x)$ (incommensurable な) 不定値実数係数 2 次形式, $\forall \varepsilon$ 実数 > 0 , $\exists x \in \mathbb{Z}^n (\neq 0)$ s.t. $|Q(x)| < \varepsilon$ 」

というタイプの問題と、 $Q(x)$ に一定の制限をつけて、例之は

「[?] (*) (2.1) について, $Q(x)$ は「additive type (x_2, x_3 等
 に cross-terms が出て来ないもの)」に制限した場合」
 というタイプの問題に合れる。更には、解の分布、性質など
 の問題は発展してゆくが、まず上記のように考えてみる。
 一般には [?] (4) の m_0 は 5 で良からうというのが「Oppenheim
 の予想 (1931) であるが今の所 Birch-Davenport-Ridout の
 $m_0 = 21$ が記録のようである。整数係数の方は古典的の Meyer
 の $m_0 = 5$ の結果がある。[?] (*) の方は、Davenport-Heilbronn
 (1946) で $m_0 = 5$ は十分というのが、Hardy-Littlewood
 が、Diophantus 方程式を解くために開発した「circle method」
 を発展させた方法で、Diophantus 同時近似についての簡単な、
 かつ決定的な lemma を使い、示された。一方 $a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2 = N$
 の形の Diophantus 方程式と解くのに、Kloostermann _{Λ} ⁽¹⁹²⁶⁾ は、いわ
 ゆる「Kloostermann 和」を non-trivial に評価する事に依り、
 解の個数に関する漸近公式の期待される主要項に^{cf. 17}
 Λ (trivial) に Kloostermann 和を評価すると誤差項になるべき分が同程度
 の order を有してしまうという困難とやり換けた。その後、
 4変数の additive 型の不等式について、Watson (1953) は
 Pell 方程式の解を上手に利用して、特定の形の係数と有する
 $Q(x)$ について、Diophantus 不等式の可解性を示した。(Watson
 は、同時に 3変数の例も示している。) 次に、Iwaniec (1977)

は、後の節を用い $Q(x) = (x_1^2 + x_2^2) - \theta \cdot (x_3^2 + x_4^2)$ (θ : 実数の無理数 > 0) について Diophantine 不等式の可解性を示した。ここでは $Q(\sqrt{\pi})$ のような性質が利用されている。そして Davangart-Heilbronn の手法で Kloosterman 和の事を知らせて $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_4 x_4^2$ (不定値, incommensurable) が相違ないであろうかと考えられる。 $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ に連分教の言葉で述べられる制限をかなり厳しくつければ「yes」であるという事を説明するのがこの稿の目的である。結局最後の neck は「連分用の変数 α および λ 達の「近似分教」(連分教の用語) がわかれば $\lambda \alpha$ の近似分教がわかるか」という事になるが、それがある意味で「わかる」という事(後記(1), (1)' 参照)である。期待としては、 $m_0 = 4$ で $[Q(x)]$ は肯定的であり、 $m=3$ では $[Q(x)]$ は $Q(x)$ の分教(肯定的に解けるような $Q(x)$ の特徴づけ)如何という事になるであろう。3変数については、Watson の例以外にはないであろう。4変数については、後記(1) を(1)で使用すること、何か“実数係数の場合に Singular Series の役と与る随”とてり出すべき事になるであろうと期待している。従ってその“随”の性質によらず、7行上に記した $m_0 = 4$ の場合の期待は $Q(x)$ の分教問題に帰するからいられる。多分、Kloosterman 和に関する Linnik 予想 (Kuznetsov 号(1981)) が解決される

程度にたいして 後記 Corollary の $\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_4)$ 中の $\otimes$ の $\sigma_1 < 2^{0.03}$ や

$\sigma_3, \sigma_4 < p^{0.03}$ などは 改められたはずで (ここまでは、

Weyl の Λ ^{合同-多項式の} 1-2-予想の解決に利用した $|\sum_x \exp(2\pi i \frac{ax+b\bar{x}}{p})| < 2p^{\frac{1}{2}}$

(p 素数, $x=1, 2, \dots, p-1$, $x\bar{x} \equiv 1 \pmod{p}$, $p \nmid (a, b)$) ではなく、1回

Kloosterman の $\ll p^{\frac{3}{4}}$ を利用して解決). $\psi < 4$

$$|\lambda_1 \lambda_2^{-1}| = a_0 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots \quad \left(\begin{array}{l} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{N} \end{array} \right)$$

が、 $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ であり、

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k (\log q_k)^{-c_0} = +\infty \quad (c_0 \text{ は適当な正定数})$$

ならば、本質的に、ここに述べたと同じ原理で相違点と思われる。
しかし (Linnik 予想の) 最良の意味で解決されたこと

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k < +\infty \quad (\text{例としては})$$

のことは、上記の「Singular Series のような項」が期待するよう
に月に現れるかを見たいものである。3変数については

circle method は無力のように見える。Goldbach (2つの) の場
合に早く相違点「almost all 流」の手法もないのである。

§§. 「系」 ((0.2.1) 等はタイノ原稿の節番号.)

最初から系ではなかった。タイノ原稿 [N] で、複雑な条件と
有する $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ についての定理の系として下記の系を得た
ので。まず、 $v(x)$ は 整数の相違素因子数とし、いま $\eta_1, \dots$
 $\dots, \eta_4$ と $\varepsilon = \pm 1$ で $\eta_1, \dots, \eta_k$ は同符号でなるものの組とし

7.

$$\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_4) = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ s.t. } \begin{aligned} &\lambda_1 \neq 0, \text{ and } \lambda_2 = \eta_2, \\ &\lambda_1 \text{ 無理数, } \lambda_2 = \eta_2 (= \pm 1) \leftarrow \begin{array}{l} \text{これは statement 2} \\ \text{簡単に 7.2.12} \end{array} \\ &|\lambda_1| \text{ の 相対 < 近似分数 } v_1/\sigma_1, \quad p/q, \quad (1 \leq v_1 < q) \\ &|\lambda_3| \text{ の 近似分数 } v_3/\sigma_3, \\ &|\lambda_4| \text{ の 近似分数 } v_4/\sigma_4 \end{aligned} \right\}$$

に 8 組 $(p/q, v_1/\sigma_1, v_3/\sigma_3, v_4/\sigma_4)$ で 下 記 の 条件 $(*)$ を 満 了 する 0 無 限 に 存 在 する こと

と お く。 η_1 について $(*)$ は (便宜上 $\sigma_2 = v_2 = 1$ と お いて)

$$(*) \left\{ \begin{aligned} &\sigma_1, v_1 \text{ は } \begin{cases} e^{(\log Q)^{\frac{1}{2}}} < \sigma_1 < Q^{0.03}, \\ \forall (\sigma_1, v_1) < (\log Q)^{\frac{1}{2}}, \\ \exists p \text{ 素数 s.t. } p_1^{(\log p)} \parallel \sigma_1 \text{ 且 } p_1 > (\log Q)^{0.26} \end{cases} \\ &v_3/\sigma_3, v_4/\sigma_4 \text{ は } p = (Q\sigma_1 (\log Q)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \text{ と お いて} \\ &\begin{cases} |u_i| - v_i/\sigma_i < \frac{1}{p^2 (\log p)^{\frac{1}{2}}}, \\ \forall (v_i/\sigma_i) < (\log Q)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_i \text{ 0 無 理 数 なら } (\log Q)^{\frac{1}{2}} < \sigma_i < p^{0.03}, \\ \lambda_i \text{ 0 有 理 数 なら } |u_i| = v_i/\sigma_i \end{cases} \quad (i=3,4) \\ &\text{かつ} \begin{cases} (\sigma_{i_1}, v_{i_2}) = 1 & i_1, i_2 = 1, \dots, 4 \\ (\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}) = 1 & i_1, i_2 = 1, \dots, 4, \quad i_1 \neq i_2 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

である。 $\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_4) \neq \emptyset$ になることは後述する。このとき

『[系] $\eta_1, \dots, \eta_k = \pm 1$ (同符号でよい) に對し $\exists C, C'', C'$
(正の絶対定数),

st. $\forall \varepsilon > 0, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda(\eta_1, \dots, \eta_k), \exists p_0$

st. $\forall p > p_0$ (p は $\otimes$ にある $\forall$ の)

成り立つ

$$\# \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{N}^k ; \begin{aligned} & C' |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p < \lambda_1 < C'' |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p, \\ & |\lambda_1 \lambda_1^2 + \dots + \lambda_k \lambda_k^2| < \varepsilon \end{aligned} \right\}$$

$$\geq C \cdot \varepsilon \cdot (\max_i |\lambda_i|)^{-2} p^2$$

□

□ が成り立つ。 (C.2.1)

最後の所は $\geq C \cdot \varepsilon \cdot |\lambda_1 \dots \lambda_k|^{-\frac{1}{2}} p^2$ と書きたい所だが証明の都合でそうならなかった。(今春の広島大学での数学会の代数学分科会アブストラクト. 筆者の p は位置が書き間違え.)

上記 $\Lambda(\eta_1, \dots, \eta_k)$ が、十分沢山に $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ を含む事は次のように構成できる。連分範囲において知られた

『[Lemma] 実数 $\beta (> 0)$ と既約分数 P/Q について $|\beta - P/Q| < (2Q^2)^{-1}$ ならば、 P/Q は β の正則連分範囲に於て近似分数の一つである。

□ を利用する。今条件中の $V_i/\sigma_i, R/Q$ があるとして σ_i^0, V_i^0 と相関する素数で $\sigma_i^0 > \sigma_i (Q^{100})$, $V_i/\sigma_i \leq V_i^0/\sigma_i^0 \leq R/Q$,

$$|R/Q - V_i^0/\sigma_i^0| < (2Q^2)^{-1} \quad \text{とすれば、} V_i^0/\sigma_i^0 \text{ は } R/Q \text{ の近似分}$$

数の一つ γ 1.2.3. 次は $V_{i*}^0/\sigma_{i*}^0 \in \sigma_i^0 V_{i*}^0 - V_i^0 \sigma_{i*}^0 = \pm 1$,
 $\sigma_i^0 > \sigma_{i*}^0 \geq 0$, $V_i^0/\sigma_i^0 \geq V_{i*}^0/\sigma_{i*}^0 \geq R/Q$ (1.1) ($V_{i*}^0/\sigma_{i*}^0 = R/Q$ のとき
 1.2.3.4). $Q_i^0 \in \mathbb{N}$ と $R^0 = Q_i^0 V_i^0 + V_{i*}^0$, $R^0 = Q_i^0 \sigma_i^0 + \sigma_{i*}^0$ かつ
 $\exp((\log R^0)^{\frac{1}{2}}) < \sigma_i^0 < Q^{0.03}$ とする. R^0/Q^0 ,
 V_i^0/σ_i^0 , R/Q , V_i/σ_i が得られる. A は V_i^0/σ_i^0 , R/Q から上の事を
 くり返す. この通りに1.2.3.4の Cauchyの V_i/σ_i , R/Q , V_i^0/σ_i^0 , R^0/Q^0 ,
 ,... を得て. これの定められた数が $|\lambda_1|$ の値を果せる. $|\lambda_3|$,
 $|\lambda_4|$ について4回同様に同じ形式で繰り返す. (C.2.1.2)

証明に必要な主な事を述べる. 各々正確に書
 くと長くなるので、 $|\lambda_1| < 1$ はタイプAの原稿 [N] を参照されたい.

(1) 2項目は Davenport - Heilbronn の説明の所で述べた Diophantine
 同時近似の Lemma (1.1) の γ のことである. γ の発展形 1.1.7.
 [Prop.] $\forall c_1 (>1)$, $\forall c_2 (>0)$, $\exists h_1 (\gg 1)$, $\exists h_1' (\gg 1)$, $\forall E_{100} (\gg 1)$,
 $\exists P_1$ かつ λ_1, λ_2 実数 >0 , $\lambda_1, \lambda_2^{-1}$ 無理数, $|\lambda_1| \leq E_{100}$,
 $\lambda_1, \lambda_2^{-1}$ の 近似分数 R/Q ($R, Q \in \mathbb{N}$, $(R, Q)=1$)

について.

$$P \text{ は } Q^{\frac{1}{2}} (\log Q)^{h_1'} \leq P \leq Q^{c_1}, \quad P > P_1,$$

$$H \text{ は } P \gg H \gg (\log P)^{h_1}$$

とある.

3. ((4, 5, 2)).

(1). $\left(\frac{Y}{p}\right)$ を素数 p について $X^2 \equiv Y \pmod{p}$ に関する Legendre 記号 χ (一般に $X, Y \in \mathbb{N}$ のとき $X = (X, Y) \cdot X_1$, $Y = (X, Y) \cdot Y_1$, $X_1 = 2^x \hat{X}_1$, $(2 \nmid \hat{X}_1, (X_1, Y_1) = 1)$ とおいて

$$J\left(\frac{Y}{X}\right) = \left(\frac{Y_1}{\hat{X}_1}\right) \quad \text{Jacobi の記号}$$

とおく. このとき ((2.3.9))

$$\left| \sum_{\tilde{A}^\Delta} \prod_{i=1, \dots, 4} J\left(\frac{(k_i + l_i) \tilde{A} - l_i \tilde{A}^\Delta}{(\tilde{t}_i^{-1} D_i a)}\right) \right| \ll \left(\text{non-trivial 記号} \right)$$

を得る. ここで $a, b, \tilde{A}, k_i, l_i$ は与えられて V_i/D_i は $|A|$ の近似分母で, $\tilde{A}^\Delta$ は

$$(*) \quad \begin{cases} \tilde{A}^\Delta \equiv \tilde{A}_0 \pmod{W' [V_1, \dots, V_4]} \\ (\tilde{A}^\Delta, \tilde{A}) = 1 \\ \tilde{A}^\Delta \text{ は いくつかの整数の公約数が } \ll \sqrt{|a|} \end{cases}$$

を満たす. W' はいくつかの条件を満たす数に依存して

$$\tilde{t}_i \in (\tilde{A}^\Delta, D_i V_i a b) \text{ の因子で } D_i a \text{ の約数部分}$$

とおくとき

$$\tilde{t}_i \mid W' \quad \text{for } \forall \tilde{A}^\Delta \text{ } (*) \text{ の } \chi \text{ の}$$

となる. この証明の際に 5 頁の $(*)$ における素数 p の存在を仮定した.

(V') 及び上記 $\tilde{A}^\Delta$ の存在を保証する Proposition ((2.3.11.5)).

(2) Kloosterman 和を含む重み附の指数和についての

van der Corput の表示. $((3.1.4)), ((3.2.4))$.

(b) 更 τ . Birch - Davenport (1958) の δ は $|\lambda_1 \lambda_1^2 + \dots + \lambda_4 \lambda_4^2| < \varepsilon$ のかわりに $\left| \sum_{i=1}^4 (\varepsilon^{-1} 2^{2t_i+1} \lambda_i) (2^{t_i} y_i)^2 \right| < 2$ を用いる事と等しい。
 τ . λ_i は λ_i のかわりに $|\lambda_1 \lambda_1^2 + \dots + \lambda_4 \lambda_4^2| < 2$ ($|\lambda_i| \asymp E_\infty$) の形を用いる. (E_∞ のかわりに ε^{-1} の形を用いる).

$$\# \left\{ (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{N}^4 \quad \begin{array}{l} c_1^{-1} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p < x_i \leq c_2^{-1} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p, \\ |\lambda_1 \lambda_1^2 + \dots + \lambda_4 \lambda_4^2| < 2 \end{array} \right\}$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 \pi x}{\pi \alpha} \right)^2 \prod_{i=1}^4 \left(\sum_{x_i} e\left(\frac{1}{2} \alpha \lambda_i x_i^2\right) \right) \cdot d\alpha$$

at. $c_1^{-1} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p < x_i \leq c_2^{-1} |\lambda_1|^{-\frac{1}{2}} p$

τ あり. 積分変数 α について $|\alpha| \ll p^{-1}$ の部分は. 右辺に
 τ あり contribution $\gg |\lambda_1 \dots \lambda_4|^{-\frac{1}{2}} p^2$ となる. 他の方について
 は τ あり contribution $= o(|\lambda_1 \dots \lambda_4|^{-\frac{1}{2}} p^2)$ と示す (2.2).

また (1) (2) を利用して L^1 上の α の近似係数を (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11) (12) (13) (14) (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) (26) (27) (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) (35) (36) (37) (38) (39) (40) (41) (42) (43) (44) (45) (46) (47) (48) (49) (50) (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) (58) (59) (60) (61) (62) (63) (64) (65) (66) (67) (68) (69) (70) (71) (72) (73) (74) (75) (76) (77) (78) (79) (80) (81) (82) (83) (84) (85) (86) (87) (88) (89) (90) (91) (92) (93) (94) (95) (96) (97) (98) (99) (100) (101) (102) (103) (104) (105) (106) (107) (108) (109) (110) (111) (112) (113) (114) (115) (116) (117) (118) (119) (120) (121) (122) (123) (124) (125) (126) (127) (128) (129) (130) (131) (132) (133) (134) (135) (136) (137) (138) (139) (140) (141) (142) (143) (144) (145) (146) (147) (148) (149) (150) (151) (152) (153) (154) (155) (156) (157) (158) (159) (160) (161) (162) (163) (164) (165) (166) (167) (168) (169) (170) (171) (172) (173) (174) (175) (176) (177) (178) (179) (180) (181) (182) (183) (184) (185) (186) (187) (188) (189) (190) (191) (192) (193) (194) (195) (196) (197) (198) (199) (200) (201) (202) (203) (204) (205) (206) (207) (208) (209) (210) (211) (212) (213) (214) (215) (216) (217) (218) (219) (220) (221) (222) (223) (224) (225) (226) (227) (228) (229) (230) (231) (232) (233) (234) (235) (236) (237) (238) (239) (240) (241) (242) (243) (244) (245) (246) (247) (248) (249) (250) (251) (252) (253) (254) (255) (256) (257) (258) (259) (260) (261) (262) (263) (264) (265) (266) (267) (268) (269) (270) (271) (272) (273) (274) (275) (276) (277) (278) (279) (280) (281) (282) (283) (284) (285) (286) (287) (288) (289) (290) (291) (292) (293) (294) (295) (296) (297) (298) (299) (300) (301) (302) (303) (304) (305) (306) (307) (308) (309) (310) (311) (312) (313) (314) (315) (316) (317) (318) (319) (320) (321) (322) (323) (324) (325) (326) (327) (328) (329) (330) (331) (332) (333) (334) (335) (336) (337) (338) (339) (340) (341) (342) (343) (344) (345) (346) (347) (348) (349) (350) (351) (352) (353) (354) (355) (356) (357) (358) (359) (360) (361) (362) (363) (364) (365) (366) (367) (368) (369) (370) (371) (372) (373) (374) (375) (376) (377) (378) (379) (380) (381) (382) (383) (384) (385) (386) (387) (388) (389) (390) (391) (392) (393) (394) (395) (396) (397) (398) (399) (400) (401) (402) (403) (404) (405) (406) (407) (408) (409) (410) (411) (412) (413) (414) (415) (416) (417) (418) (419) (420) (421) (422) (423) (424) (425) (426) (427) (428) (429) (430) (431) (432) (433) (434) (435) (436) (437) (438) (439) (440) (441) (442) (443) (444) (445) (446) (447) (448) (449) (450) (451) (452) (453) (454) (455) (456) (457) (458) (459) (460) (461) (462) (463) (464) (465) (466) (467) (468) (469) (470) (471) (472) (473) (474) (475) (476) (477) (478) (479) (480) (481) (482) (483) (484) (485) (486) (487) (488) (489) (490) (491) (492) (493) (494) (495) (496) (497) (498) (499) (500) (501) (502) (503) (504) (505) (506) (507) (508) (509) (510) (511) (512) (513) (514) (515) (516) (517) (518) (519) (520) (521) (522) (523) (524) (525) (526) (527) (528) (529) (530) (531) (532) (533) (534) (535) (536) (537) (538) (539) (540) (541) (542) (543) (544) (545) (546) (547) (548) (549) (550) (551) (552) (553) (554) (555) (556) (557) (558) (559) (560) (561) (562) (563) (564) (565) (566) (567) (568) (569) (570) (571) (572) (573) (574) (575) (576) (577) (578) (579) (580) (581) (582) (583) (584) (585) (586) (587) (588) (589) (590) (591) (592) (593) (594) (595) (596) (597) (598) (599) (600) (601) (602) (603) (604) (605) (606) (607) (608) (609) (610) (611) (612) (613) (614) (615) (616) (617) (618) (619) (620) (621) (622) (623) (624) (625) (626) (627) (628) (629) (630) (631) (632) (633) (634) (635) (636) (637) (638) (639) (640) (641) (642) (643) (644) (645) (646) (647) (648) (649) (650) (651) (652) (653) (654) (655) (656) (657) (658) (659) (660) (661) (662) (663) (664) (665) (666) (667) (668) (669) (670) (671) (672) (673) (674) (675) (676) (677) (678) (679) (680) (681) (682) (683) (684) (685) (686) (687) (688) (689) (690) (691) (692) (693) (694) (695) (696) (697) (698) (699) (700) (701) (702) (703) (704) (705) (706) (707) (708) (709) (710) (711) (712) (713) (714) (715) (716) (717) (718) (719) (720) (721) (722) (723) (724) (725) (726) (727) (728) (729) (730) (731) (732) (733) (734) (735) (736) (737) (738) (739) (740) (741) (742) (743) (744) (745) (746) (747) (748) (749) (750) (751) (752) (753) (754) (755) (756) (757) (758) (759) (760) (761) (762) (763) (764) (765) (766) (767) (768) (769) (770) (771) (772) (773) (774) (775) (776) (777) (778) (779) (780) (781) (782) (783) (784) (785) (786) (787) (788) (789) (790) (791) (792) (793) (794) (795) (796) (797) (798) (799) (800) (801) (802) (803) (804) (805) (806) (807) (808) (809) (810) (811) (812) (813) (814) (815) (816) (817) (818) (819) (820) (821) (822) (823) (824) (825) (826) (827) (828) (829) (830) (831) (832) (833) (834) (835) (836) (837) (838) (839) (840) (841) (842) (843) (844) (845) (846) (847) (848) (849) (850) (851) (852) (853) (854) (855) (856) (857) (858) (859) (860) (861) (862) (863) (864) (865) (866) (867) (868) (869) (870) (871) (872) (873) (874) (875) (876) (877) (878) (879) (880) (881) (882) (883) (884) (885) (886) (887) (888) (889) (890) (891) (892) (893) (894) (895) (896) (897) (898) (899) (900) (901) (902) (903) (904) (905) (906) (907) (908) (909) (910) (911) (912) (913) (914) (915) (916) (917) (918) (919) (920) (921) (922) (923) (924) (925) (926) (927) (928) (929) (930) (931) (932) (933) (934) (935) (936) (937) (938) (939) (940) (941) (942) (943) (944) (945) (946) (947) (948) (949) (950) (951) (952) (953) (954) (955) (956) (957) (958) (959) (960) (961) (962) (963) (964) (965) (966) (967) (968) (969) (970) (971) (972) (973) (974) (975) (976) (977) (978) (979) (980) (981) (982) (983) (984) (985) (986) (987) (988) (989) (990) (991) (992) (993) (994) (995) (996) (997) (998) (999) (1000) (1001) (1002) (1003) (1004) (1005) (1006) (1007) (1008) (1009) (1010) (1011) (1012) (1013) (1014) (1015) (1016) (1017) (1018) (1019) (1020) (1021) (1022) (1023) (1024) (1025) (1026) (1027) (1028) (1029) (1030) (1031) (1032) (1033) (1034) (1035) (1036) (1037) (1038) (1039) (1040) (1041) (1042) (1043) (1044) (1045) (1046) (1047) (1048) (1049) (1050) (1051) (1052) (1053) (1054) (1055) (1056) (1057) (1058) (1059) (1060) (1061) (1062) (1063) (1064) (1065) (1066) (1067) (1068) (1069) (1070) (1071) (1072) (1073) (1074) (1075) (1076) (1077) (1078) (1079) (1080) (1081) (1082) (1083) (1084) (1085) (1086) (1087) (1088) (1089) (1090) (1091) (1092) (1093) (1094) (1095) (1096) (1097) (1098) (1099) (1100) (1101) (1102) (1103) (1104) (1105) (1106) (1107) (1108) (1109) (1110) (1111) (1112) (1113) (1114) (1115) (1116) (1117) (1118) (1119) (1120) (1121) (1122) (1123) (1124) (1125) (1126) (1127) (1128) (1129) (1130) (1131) (1132) (1133) (1134) (1135) (1136) (1137) (1138) (1139) (1140) (1141) (1142) (1143) (1144) (1145) (1146) (1147) (1148) (1149) (1150) (1151) (1152) (1153) (1154) (1155) (1156) (1157) (1158) (1159) (1160) (1161) (1162) (1163) (1164) (1165) (1166) (1167) (1168) (1169) (1170) (1171) (1172) (1173) (1174) (1175) (1176) (1177) (1178) (1179) (1180) (1181) (1182) (1183) (1184) (1185) (1186) (1187) (1188) (1189) (1190) (1191) (1192) (1193) (1194) (1195) (1196) (1197) (1198) (1199) (1200) (1201) (1202) (1203) (1204) (1205) (1206) (1207) (1208) (1209) (1210) (1211) (1212) (1213) (1214) (1215) (1216) (1217) (1218) (1219) (1220) (1221) (1222) (1223) (1224) (1225) (1226) (1227) (1228) (1229) (1230) (1231) (1232) (1233) (1234) (1235) (1236) (1237) (1238) (1239) (1240) (1241) (1242) (1243) (1244) (1245) (1246) (1247) (1248) (1249) (1250) (1251) (1252) (1253) (1254) (1255) (1256) (1257) (1258) (1259) (1260) (1261) (1262) (1263) (1264) (1265) (1266) (1267) (1268) (1269) (1270) (1271) (1272) (1273) (1274) (1275) (1276) (1277) (1278) (1279) (1280) (1281) (1282) (1283) (1284) (1285) (1286) (1287) (1288) (1289) (1290) (1291) (1292) (1293) (1294) (1295) (1296) (1297) (1298) (1299) (1300) (1301) (1302) (1303) (1304) (1305) (1306) (1307) (1308) (1309) (1310) (1311) (1312) (1313) (1314) (1315) (1316) (1317) (1318) (1319) (1320) (1321) (1322) (1323) (1324) (1325) (1326) (1327) (1328) (1329) (1330) (1331) (1332) (1333) (1334) (1335) (1336) (1337) (1338) (1339) (1340) (1341) (1342) (1343) (1344) (1345) (1346) (1347) (1348) (1349) (1350) (1351) (1352) (1353) (1354) (1355) (1356) (1357) (1358) (1359) (1360) (1361) (1362) (1363) (1364) (1365) (1366) (1367) (1368) (1369) (1370) (1371) (1372) (1373) (1374) (1375) (1376) (1377) (1378) (1379) (1380) (1381) (1382) (1383) (1384) (1385) (1386) (1387) (1388) (1389) (1390) (1391) (1392) (1393) (1394) (1395) (1396) (1397) (1398) (1399) (1400) (1401) (1402) (1403) (1404) (1405) (1406) (1407) (1408) (1409) (1410) (1411) (1412) (1413) (1414) (1415) (1416) (1417) (1418) (1419) (1420) (1421) (1422) (1423) (1424) (1425) (1426) (1427) (1428) (1429) (1430) (1431) (1432) (1433) (1434) (1435) (1436) (1437) (1438) (1439) (1440) (1441) (1442) (1443) (1444) (1445) (1446) (1447) (1448) (1449) (1450) (1451) (1452) (1453) (1454) (1455) (1456) (1457) (1458) (1459) (1460) (1461) (1462) (1463) (1464) (1465) (1466) (1467) (1468) (1469) (1470) (1471) (1472) (1473) (1474) (1475) (1476) (1477) (1478) (1479) (1480) (1481) (1482) (1483) (1484) (1485) (1486) (1487) (1488) (1489) (1490) (1491) (1492) (1493) (1494) (1495) (1496) (1497) (1498) (1499) (1500) (1501) (1502) (1503) (1504) (1505) (1506) (1507) (1508) (1509) (1510) (1511) (1512) (1513) (1514) (1515) (1516) (1517) (1518) (1519) (1520) (1521) (1522) (1523) (1524) (1525) (1526) (1527) (1528) (1529) (1530) (1531) (1532) (1533) (1534) (1535) (1536) (1537) (1538) (1539) (1540) (1541) (1542) (1543) (1544) (1545) (1546) (1547) (1548) (1549) (1550) (1551) (1552) (1553) (1554) (1555) (1556) (1557) (1558) (1559) (1560) (1561) (1562) (1563) (1564) (1565) (1566) (1567) (1568) (1569) (1570) (1571) (1572) (1573) (1574) (1575) (1576) (1577) (1578) (1579) (1580) (1581) (1582) (1583) (1584) (1585) (1586) (1587) (1588) (1589) (1590) (1591) (1592) (1593) (1594) (1595) (1596) (1597) (1598) (1599) (1600) (1601) (1602) (1603) (1604) (1605) (1606) (1607) (1608) (1609) (1610) (1611) (1612) (1613) (1614) (1615) (1616) (1617) (1618) (1619) (1620) (1621) (1622) (1623) (1624) (1625) (1626) (1627) (1628) (1629) (1630) (1631) (1632) (1633) (1634) (1635) (1636) (1637) (1638) (1639) (1640) (1641) (1642) (1643) (1644) (1645) (1646) (1647) (1648) (1649) (1650) (1651) (1652) (1653) (1654) (1655) (1656) (1657) (1658) (1659) (1660) (1661) (1662) (1663) (1664) (1665) (1666) (1667) (1668) (1669) (1670) (1671) (1672) (1673) (1674) (1675) (1676) (1677) (1678) (1679) (1680) (1681) (1682) (1683) (1684) (1685) (1686) (1687) (1688) (1689) (1690) (1691) (1692) (1693) (1694) (1695) (1696) (1697) (1698) (1699) (1700) (1701) (1702) (1703) (1704) (1705) (1706) (1707) (1708) (1709) (1710) (1711) (1712) (1713) (1714) (1715) (1716) (1717) (1718) (1719) (1720) (1721) (1722) (1723) (1724) (1725) (1726) (1727) (1728) (1729) (1730) (1731) (1732) (1733) (1734) (1735) (1736) (1737) (1738) (1739) (1740) (1741) (1742) (1743) (1744) (1745) (1746) (1747) (1748) (1749) (1750) (1751) (1752) (1753) (1754) (1755) (1756) (1757) (1758) (1759) (1760) (1761) (1762) (1763) (1764) (1765) (1766) (1767) (1768) (1769) (1770) (1771) (1772) (1773) (1774) (1775) (1776) (1777) (1778) (1779) (1780) (1781) (1782) (1783) (1784) (1785) (1786) (1787) (1788) (1789) (1790) (1791) (1792) (1793) (1794) (1795) (1796) (1797) (1798) (1799) (1800) (1801) (1802) (1803) (1804) (1805) (1806) (1807) (1808) (1809) (1810) (1811) (1812) (1813) (1814) (1815) (1816) (1817) (1818) (1819) (1820) (1821) (1822) (1823) (1824) (1825) (1826) (1827) (1828) (1829) (1830) (1831) (1832) (1833) (1834) (1835) (1836) (1837) (1838) (1839) (1840) (1841) (1842) (1843) (1844) (1845) (1846) (1847) (1848) (1849) (1850) (1851) (1852) (1853) (1854) (1855) (1856) (1857) (1858) (1859) (1860) (1861) (1862) (1863) (1864) (1865) (1866) (1867) (1868) (1869) (1870) (1871) (1872) (1873) (1874) (1875) (1876) (1877) (1878) (1879) (1880) (1881) (1882) (1883) (1884) (1885) (1886) (1887) (1888) (1889) (1890) (1891) (1892) (1893) (1894) (1895) (1896) (1897) (1898) (1899) (1900) (1901) (1902) (1903) (1904) (1905) (1906) (1907) (1908) (1909) (1910) (1911) (1912) (1913) (1914) (1915) (1916) (1917) (1918) (1919) (1920) (1921) (1922) (1923) (1924) (1925) (1926) (1927) (1928) (1929) (1930) (1931) (1932) (1933) (1934) (1935) (1936) (1937) (1938) (1939) (1940) (1941) (1942) (1943) (1944) (1945) (1946) (1947) (1948) (1949) (1950) (1951) (1952) (1953) (1954) (1955) (1956) (1957) (1958) (1959) (1960) (1961) (1962) (1963) (1964) (1965) (1966) (1967) (1968) (1969) (1970) (1971) (1972) (1973) (1974) (1975) (1976) (1977) (1978) (1979) (1980) (1981) (1982) (1983) (1984) (1985) (1986) (1987) (1988) (1989) (1990) (1991) (1992) (1993) (1994) (1995) (1996) (1997) (1998) (1999) (2000) (2001) (2002) (2003) (2004) (2005) (2006) (2007) (2008) (2009) (2010) (2011) (2012) (2013) (2014) (2015) (2016) (2017) (2018) (2019) (2020) (2021) (2022) (2023) (2024) (2025) (2026) (2027) (2028) (2029) (2030) (2031) (2032) (2033) (2034) (2035) (2036) (2037) (2038) (2039) (2040) (2041) (2042) (2043) (2044) (2045) (2046) (2047) (2048) (2049) (2050) (2051) (2052) (2053) (2054) (2055) (2056) (2057) (2058) (2059) (2060) (2061) (2062) (2063) (2064) (2065) (2066) (2067) (2068) (2069) (2070) (2071) (2072) (2073) (2074) (2075) (2076) (2077) (2078) (2079) (2080) (2081) (2082) (2083) (2084) (2085) (2

($A > A'$, いずれも $\in \mathcal{G}_3''$) および $|\lambda_1 \alpha|^{-1}$ の相対的近似
 分数 A_1^{**}/B_1^{**} , A_2^*/B_2^* , A_3^*/B_3^* ($A_1^{**} > A_2^* > A_3^*$, いずれも
 $\in \mathcal{G}_3''$), (θ は適当に調整する E_{100} 等 $\propto$ depend する定数)
 について

$$\varepsilon = AB' - DA' \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

を用いて、各々について

$$(A_1^{**}/B_1^{**}, A_2^*/B_2^*) \quad \text{または} \quad (A_2^*/B_2^*, A_3^*/B_3^*)$$

のうち $A_1^{**}B_2^* - B_1^{**}A_2^* = \varepsilon$ または $A_2^*B_3^* - B_2^*A_3^* = \varepsilon$
 を満たす方を採用して改めて $(A_2/B_2, A_3/B_3)$ と表せば、

$$\left[B/A, B'/A', V_2/O_2 \right] \quad \text{から} \quad A_2/B_2 \quad \text{が表せる}$$

ことがわかる. ((4.4.12), ((4.4.14)). 正確には $B/A, B'/A'$ の
 の θ の ε はなく、少くとも θ を除いた $B/\bar{A}$ 等 (ii) 等) を使う。

(A)' 及び逆に相等する, ((4.4.19)); (A) の表 (i) に残核的
 に作る A_2/B_2 等 ε を θ の α は

$$\textcircled{1} \quad A_2/B_2, A_3/B_3 \quad \text{は} \quad |\lambda_1 \alpha|^{-1} \quad \text{の相対的近似分数}$$

かつ

$$\textcircled{2} \quad \text{(B)} \quad \text{で} \quad (4.4.1-4.7)) \quad \text{既に処理してあるの}$$

となる。

(A) 従って残る $\mathcal{D}$ について, (E), (ii), (iv) をほい. この α 違
 い結局は $\text{contribution} = o(\dots)$ が示せる. この最後の段階で
 [系] の $Q^{0.03}$, $P^{0.03}$, (A) の「互に素」, 素数 p の存在

は強い仮定が必要になる。(A) の所より. (A) にあらず
 なる Prop. が使える程度の仮定があればいい。

A. Oppenheim : Ann. of Math., (2) 32 (1931), 271-298.

B. J. Birch - H. Davenport : Mathematika, 5 (1958), 8-12.

H. Davenport - J. Ridout : Proc. London Math. Soc., (3) 9 (1959), 544-555.

H. Davenport - H. Heilbronn : J. London Math. Soc., 21 (1946), 185-193.
 以上三者は H. Davenport 全集(四巻目)に入る。

H. D. Kloosterman : Acta Math., 19 (1926), 407-464.

G. L. Watson : J. London Math. Soc., 28 (1953), 293-292.

H. Iwaniec : Acta Arith., 33 (1977), 209-229.

N. V. Kuznetsov : Math. of USSR-Sbornik, 39 (1981), 299-342.

Y. N. Nakai : "On Diophantine inequalities of real indefinite
 quadratic forms of additive type in four variables",
 9170 原稿[N].

(5-6 頁目の [系] は今春の広島大学での研究会の資料)
 (会でのアタリと同一内容 (P. の位置書き込み))

(補) 2 頁目の Davenport-Heilbronn の Diophantine 同時近似の考え。

(A) の (4.3.9) で使う。

以上。