

ある種の非線型差分微分方程式 の解の漸近的性質について

山梨大 工 栗原 光 信

§0. 序

差分微分方程式

$$(0.1) \quad u'(t) + A u(t) + B u(t-w) = f(t, u(t))$$

について考察する。但し、

$$(0.2) \quad \begin{cases} u(t) \text{ は } N \text{ 次元ベクトル,} \\ A \text{ と } B \text{ は } N \times N \text{ の定数行列} \\ f(t, u) \text{ は } N \text{ 次元ベクトル値関数} \end{cases}$$

方程式 (0.1) に対応する同次線型方程式を

$$(0.3) \quad u'(t) + A u(t) + B u(t-w) = 0$$

とする。方程式 (0.3) は $u(t) = e^{\lambda t} C$ (C は N -ベクトル) の形の解をもつ。ここで、 λ は

$$(0.4) \quad \det H(\lambda) = 0, \quad H(\lambda) \equiv \lambda I + A + e^{-\lambda w} B$$

の根である。(0.4) を特性方程式、(0.4) の根を特性根とよぶことにする。

特性根入に対して、方程式(0, 1)の非同次項 $f(t, u)$ が何らかの意味で十分小さければ、方程式(0, 1)が $e^{\lambda t}C$ にある意味で十分近い解 $u(t)$ をもつことが期待される。実際我々は、以下に述べる2つの定理(定理1と定理2)の証明を行うことにする。

この種の漸近的外質を調べる研究は、一般の線型差分微分方程式の解に関して、E. M. Wright [4], Bellman R. & K. L. Cooke [1] があり、関数微分方程式の解に関して、J. K. Hale [2] がある。

定理 1. $f(t, u) = A(t)u$ の場合。 $A(t) = (A_{ij}(t))$ は $N \times N$ 行列で、各成分 $A_{ij}(t)$ は $t \geq T$ で連続かつ

$$(0.5) \quad A_{ij}(t) = o(1) \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

を満すとする。特性根入を単根とする。 $\operatorname{Re} \lambda = \mu$ とおくと、実数部が μ となる特性根が λ 以外に存在しないと仮定する。

このとき、十分大きな $t_0 \geq T$ をとれば、方程式(0, 1)は、 $t \geq t_0$ において、次の漸近的外質をみたす解 $u(t) = (u_j(t))$ を有する。

$$(0.6) \quad \log \max_{1 \leq j \leq N} |u_j(t)| = \mu t + o(t) \text{ as } t \rightarrow \infty$$

定理 2. $f(t, u) = (f_j(t, u))$

$$f_j(t, u) \equiv \sum_{|k| \geq 1} A_k^{(j)}(t) u^k \quad (j=1, \dots, N) \text{ の場合.}$$

但し, $k = (k_1, \dots, k_N)$ ($k_i \geq 0$), $u = (u_1, \dots, u_N)$

に対し, $|k| = \sum_{i=1}^N k_i$, $u^k = u_1^{k_1} \dots u_N^{k_N}$.

また, $A_k^{(j)}(t)$ はすべて, $t \geq T$ で連続かつ

$$(0.7) \quad \begin{cases} A_k^{(j)}(t) = o(1) \text{ as } t \rightarrow \infty & \text{for } |k|=1 \\ |A_k^{(j)}(t)| \leq M & \text{for } |k| \geq 2, \end{cases}$$

$\sum_{|k| \geq 1} A_k^{(j)}(t) u^k$ は $t \geq T$, $\max_{1 \leq j \leq N} |u_j| \leq R$ で一様収束.

さらに, 特性根 λ は単根とし, $\operatorname{Re} \lambda = \mu < 0$ かつ実数部が μ に等しい特性根が λ 以外に存在しないと仮定する.

このとき, 十分大きな $t_0 \geq T$ をとれば, 方程式 (0.1)

は, $t \geq t_0$ において, 次の漸近的性質をみたす解

$u(t) = (u_j(t))$ を有する.

$$(0.8) \quad \log \max_{1 \leq j \leq N} |u_j(t)| = \mu t + o(t) \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

§1. 積分方程式への変形

N -ベクトル $u = (u_j)$ と $N \times N$ 行列 $A = (A_{ij})$ に対し,

$$\|u\| = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j|, \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |A_{ij}|$$

なるノルムを導入する.

方程式 (0.1) に対して, $t_0 - \omega \leq t \leq t_0$ における $u(t)$ の値と

$f(t, u(t))$ の値が既知であるとする。 $(0, 1)$ のすべての連続な解 $u(t)$ は次のように表示される。

$$(1.1) \quad u(t) = K(t-t_0)u(t_0) - \int_{t_0-\omega}^{t_0} K(t-\tau-\omega)Bu(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t K(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau.$$

但し、 $K(t)$ は次の性質(i)~(iv)を満たす一意的な行列値関数である。

- (i) $K(t) = 0$ for $t < 0$, (ii) $K(0) = I$ (単位行列)
- (iii) $K(t)$ は $t \geq 0$ で連続, $K(t)$ は $t \geq \omega$ で連続.
- (iv) $t > 0$ で $K'(t) + AK(t) + BK(t-\omega) = 0$ を満す.

さらに、 $K(t)$ は次のように展開される。

$$K(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} P_n(t).$$

ただし、 $\{\lambda_n; n=1, 2, \dots\}$ はすべての特性根を実数部の大きい順に番号を付したものであり、 $P_n(t)$ は対応する特性根 λ_n の重複度より小さい次数の t の多項式である。

そこで、いま特性根 λ をとり、これが単根であり、かつ λ の実数部 μ と等しい特性根が λ 以外に存在しないと仮定する。

このとき、 $K(t)$ を次のように分解する。

$$(1.2) \quad \begin{cases} K(t) = e^{\lambda t} C_0 + K_1(t) + K_2(t) \\ \text{但し } \|C_0\| = C_0, \operatorname{Re} \lambda = \mu, \kappa < \mu < \nu \\ K_1(t) \text{ は } t \geq 0 \text{ で連続, } \|K_1(t)\| \leq c_1 e^{\kappa t} \\ K_2(t) \text{ は } t \leq 0 \text{ で連続, } \|K_2(t)\| \leq c_2 e^{\nu t} \end{cases}$$

(1.1)において、 $t_0 - \omega \leq t \leq t_0$ で $u(t) \equiv 0$ とすると、

$$(1.3) \quad u(t) = \int_{t_0}^t K(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

一方、 $t_1 \geq t_0$ として、

$$e^{\lambda t} u_1 \quad \text{と} \quad - \int_{t_0}^{t_1} e^{\lambda(t-\tau)} C_0 f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

は、同次方程式(0.3)の解である。また、積分

$$\int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

が収束しているならば、これも(0.3)の解である。これら

を(1.3)の右辺に加えると、(1.2)の式より、

$$(1.4) \quad u(t) = e^{\lambda t} u_1 + e^{\lambda t} C_0 \int_{t_1}^t e^{-\lambda \tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ + \int_{t_0}^t K_1(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ - \int_t^{\infty} K_2(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

この場合、 $t_0 - \omega \leq t \leq t_0$ における $u(t)$ は $\text{for } t \geq t_0,$

$$(1.5) \quad u(t) = e^{\lambda t} u_1 - e^{\lambda t} C_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda \tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ - \int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

$\text{for } t_0 - \omega \leq t \leq t_0$

(1.4)と(1.5)をみたす解 $u(t)$ は $t > t_0$ において、差分微分方程式(0.1)の解になっている。そして、 $t_0 - \omega \leq t \leq t_0$ における $u(t)$ の値はその初期関数となっている。

(1.4)と(1.5)をまとめて、一つの積分方程式と考えて、その解を求めることにしよう。

§ 2. 基本となる定理

次の積分方程式を考える。但し、 $t_1 \geq t_0$ とする。

$$(2.1) \quad u(t) = e^{\lambda t} u_1 + (K_\lambda u)(t)$$

但し、

$$(K_\lambda u)(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} C_0 \int_{t_1}^t e^{-\lambda \tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t K_1(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ \quad - \int_t^\infty K_2(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau & \text{for } t \geq t_0 \\ -e^{\lambda t} C_0 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\lambda \tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^t K_2(t-\tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau & \text{for } t_0 - \omega \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

定理 3. 方程式(2.1)に対し、(1.2)を仮定する。

さらに、次の条件(i)~(v)を満たす定数 $\alpha \geq 0$, $\delta > 0$, $t_0 \geq T$ と $[t_0, \infty)$ で連続な関数 $\phi(t)$ と領域 $\Omega \subset [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ が存在すると仮定する。

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \|u_1\| \leq \alpha \\ (ii) \quad \|f(t, u)\| \leq \phi(t) \|u\| \quad \text{for } (t, u) \in \Omega \\ (iii) \quad \phi(t) \leq \delta \min\{\mu - \kappa, \nu - \mu\} \quad \text{for } t \geq t_0 \\ (iv) \quad 2(C_0 + C_1 + C_2)\delta < 1 \\ (v) \quad \{(t, u) \mid t \geq t_0, \|u - e^{\lambda t} u_1\| \leq \alpha e^{\mu t} \gamma(t, t_1)\} \subset \Omega \end{array} \right.$$

このとき、方程式(2.1)は $t \geq t_0 - \omega$ において解 $u(t)$ を有し、この $u(t)$ は次の不等式を満たす。

$$(2.2) \quad \|u(t) - e^{\lambda t} u_1\| \leq \alpha e^{\mu t} \gamma(t, t_1) \quad \text{for } t \geq t_0$$

但し、

$$\gamma(t, t_1) = \exp \left[\delta^{-1} \left| \int_{t_1}^t \phi(\tau) d\tau \right| \right]$$

定理3の証明の概略を述べよう。まず、 $t \geq t_0 - \omega$ で連続な関数全体の集合 $C[t_0 - \omega, \infty)$ において、関数族

$$\mathcal{F} = \left\{ u(t) \mid \begin{array}{l} u(t) \in C[t_0 - \omega, \infty) \\ \|u(t) - e^{\lambda t} u_1\| \leq \alpha e^{\mu t} \gamma(t, t_1) \text{ for } t \geq t_0 \end{array} \right\}$$

を考え、 $\mathcal{F}$ に属する任意の関数 $u(t)$ に対して

$$\bar{u}(t) \equiv (Tu)(t) \equiv e^{\lambda t} u_1 + (K_\lambda u)(t)$$

で定義される作用素 T を考える。これが実際に定義され得ることは、 $\mathcal{F}$ に属する任意の関数 $u(t)$ に対して、不等式

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \| \bar{u}(t) - e^{\lambda t} u_1 \| &= \| (K_\lambda u)(t) \| \\ &\leq 2(C_0 + C_1 + C_2) \delta \alpha e^{\mu t} \gamma(t, t_1) \text{ for } t \geq t_0 \end{aligned}$$

と、

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \| \bar{u}(t) - e^{\lambda t} u_1 \| &= \| (K_\lambda u)(t) \| \\ &\leq 2(C_0 + C_2) \delta \alpha e^{\mu t} \gamma(t_0, t_1) \text{ for } t_0 - \omega \leq t \leq t_0 \end{aligned}$$

が、仮定の(i), (ii), (iii)を用いて導き得ることからわかる。さらに、仮定の(iv)より、 $T\{\mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$ となることが示される。

T は $C[t_0 - \omega, \infty)$ における広義一様収束の位相で連続であり、 $T\{\mathcal{F}\}$ は $[t_0 - \omega, \infty)$ に含まれる任意の有界閉区間で一様有界かつ同程度連続である。従って、福原氏[3]によって証明された一つの不動点定理より、 $T\{u(t)\} = u(t)$ をみたす関数 $u(t) \in \mathcal{F}$ が存在する。この $u(t)$ が求めるべき方程式(2.1)の解である。

系 1. 定理3と同じ仮定をつける。ただし、(ii)の代りに、

$$(ii') \quad \|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \phi(t) \|u - v\| \quad \text{for } (t, u), (t, v) \in \Omega$$

とする。さらに、方程式(2.1)の解 $u(t)$, $v(t)$ が存在して、

$$\|u(t) - e^{\lambda t} u_1\| \leq \alpha_1 e^{\mu t} \delta(t, t_1) \quad \text{for } t \geq t_0$$

$$\|v(t) - e^{\lambda t} u_1\| \leq \alpha_2 e^{\mu t} \delta(t, t_1) \quad \text{for } t \geq t_0$$

を満すとする。このとき、任意の $t \geq t_0 - \omega$ に対して

$$u(t) \equiv v(t) \quad \text{for } t \geq t_0 - \omega$$

となる。

系2. 定理3と同じ仮定をつける。ただし、(i)の代りに、

$$(i') \quad \|u_1\| = \alpha$$

とする。従って、定理3によって(2.1)の解 $u(t)$ で、

(2.2)を満すものが存在する。このとき、不等式

$$(2.5) \quad \|u(t)\| \leq \frac{2}{1 - (C_1 + C_2)\delta} \frac{\|u(t_1)\|}{e^{\mu t_1}} e^{\mu t} \delta(t, t_1) \quad \text{for } t \geq t_0$$

が成立する。

系1と系2の証明は省略する。

§3. 主要定理(定理1, 定理2)の証明

定理1の証明の概略を述べよう。 $f(t, u) \equiv A(t)u$ の場合。

定理3を適用するために、その仮定をすべて調べる。まず、仮定(1, 2)は満たされている。従って、定数 C_0, C_1, C_2, μ, K ν が与えられるから、(iv)を満たすように十分小さい δ を選ぶことができる。 $\phi(t) = \|A(t)\|$ とおくと、(0, 5)より $\phi(t) = o(1)$ 。従って、 $t_0 \geq T$ を十分大きく選べば、(iii)を満たすようにできる。このとき、(ii)は $\Omega = [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ として成立している。(v)も同時に成り立つ。故に、(i)を満たす α を任意にとれば、定理3により、方程式(2, 1)即ち(1, 4)と(1, 5)は $t \geq t_0 - \omega$ において解 $u(t)$ を有し、この $u(t)$ は(2, 2)を満たしている。この場合、 t_1 は $t_0 \leq t_1 < \infty$ として固定する。また、この $u(t)$ は、無限積分 $-\int_{t_0}^{\infty} K_2(t-\tau)f(\tau, u(\tau))d\tau$ を収束させているから、差分微分方程式(0, 1)の解でもある。次に、 $t_0 \leq t_2 < \infty$ なる t_2 を任意にとり、

$$(3.1) \quad u_2 = u_1 + C_0 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda\tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

とおくと、 $u(t)$ は明らかに、(2, 1)と同じ型の積分方程式

$$(3.2) \quad u(t) = e^{\lambda t} u_2 + (K_t u)(t)$$

の解である。然るに、 $\|u_2\| = \alpha_2$ とすれば、定理3により、

(3.2)も不等式

$$(3.3) \quad \|v(t) - e^{\lambda t} u_2\| \leq \alpha_2 e^{\mu t} \delta(t, t_2)$$

を満たす解 $v(t)$ をもつ。一方 $u(t)$ は (2, 2) より不等式

$$\|u(t) - e^{\lambda t} u_2\| \leq \|u(t)\| + \|e^{\lambda t} u_2\|$$

$$\leq 2(1+C_0)\alpha e^{\mu t} \gamma(t, t_1)$$

$$= \alpha_1 e^{\mu t} \gamma(t, t_2), \quad (\alpha_1 = 2(1+C_0)\alpha \gamma(t_2, t_1))$$

を満している。従って、系1より (ii) は成立しているから

$$u(t) \equiv v(t) \quad \text{for } t \geq t_0 - \omega$$

と得る。然るに、系2より、 $\|u_2\| = \alpha_2$ とすれば、(3.3) を満す解 $v(t)$ は不等式 (2.5) 即ち

$$\|v(t)\| \leq \frac{2}{1-(C_1+C_2)\delta} \frac{\|v(t_2)\|}{e^{\mu t_2}} e^{\mu t} \gamma(t, t_2)$$

を満している。この不等式^(式)において、 $v(t) = u(t)$ とし、 $t = t_1$ かつ、(t_2 は任意の値をとり得たから) $t_2 = t$ とおくと、

$$(3.4) \quad \|u(t)\| \geq \beta e^{\mu t} \gamma(t, t_1) \quad (\beta \text{ は定数})$$

を得る。(2.2) と (3.4) は (0, 6) が成立することを示している。これで定理1が示された。

次に、定理2の証明の概略を述べよう。まず、 $\operatorname{Re} \lambda = \mu < 0$ であるから、 $\mu < \mu' < 0$ をみたすある μ' をとり、 $t \geq t_0'$ で $\operatorname{Re} \mu' t < R$ となるように $t_0' \geq T$ を選ぶ。定理2の仮定から、 $f_j(t, u) = \sum_{|k| \geq 1} A_k^{(j)}(t) u^k$ が $t \geq T$, $\|u\| \leq R$ で一様収束であるから、 $f_j(t, u)$ の級数のうち、 u_1 を含む項をまとめ、次に u_2 を含む項をまとめるという具合に部分和を作っていくと、

$$f_j(t, u) = \sum_{i=1}^N G_i^{(j)}(t, u) u_i$$

の形に表わすことができる。ここで、 $G_i^{(j)}(t, u)$ は、 $t \geq t_0'$ 、

$\|u\| \leq Re^{\mu t}$ で一様収束であり、 $|G_i^{(j)}(t, u)| = o(1)$ をみたすことがわかる。従って、定理3を適用するために、(iv)をみたすように $\delta > 0$ を定め、次に $t_0'' \geq t_0$ を、関数

$$\phi(t) = \max_{1 \leq i \leq N} |G_i^{(j)}(t, u)|$$

が $\Omega'' = \{(t, u) \mid t \geq t_0'', \|u\| \leq Re^{\mu t}\}$ において (iii) をみたすように選ぶ。このとき (ii) も同時に成立している。さらに、系1を適用できるようにするため、

$$f_j(t, u) - f_j(t, v) = \sum_{i=1}^N D_i^{(j)}(t, u, v)(u_i - v_i)$$

の形に変形し、 $D_i^{(j)}(t, u, v)$ が $t \geq t_0'', \|u\| \leq Re^{\mu t}, \|v\| \leq Re^{\mu t}$ で一様収束しているようにできるから、同様の議論により、 $\Omega'' = \{(t, u) \mid t \geq t_0'', \|u\| \leq Re^{\mu t}\}$ において、系1の仮定(ii')が成立するように、 $t_0'' \geq t_0$ をえらぶことができる。また、定理3の仮定(v)をみたすためには、

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \|u(t)\| &\leq \|u(t) - e^{\lambda t} u_1\| + \|e^{\lambda t} u_1\| \\ &\leq 2\alpha e^{\mu t} \delta(t, t_1) \leq Re^{\mu t} \end{aligned}$$

すなわち、 $2\alpha/R \leq e^{(\mu' - \mu)t} / \delta(t, t_1)$ が $t \geq t_0$

においてみたされるように、 $t_0 \geq t_0''$ が選べればよい。これは、 $\mu' > \mu$ であるから可能である。 α は例えば、 $\|u_1\| = \alpha$ とおけばよい。よって、定理3により、 $t_1 \geq t_0$ を固定すれば、方程式(2.1)即ち(1.4)と(1.5)が(2.2)を満す解 $u(t)$ を有する。これは差分微分方程式(0.1)の解にもなる。

そこで、任意の $t_2 \geq t_0$ をとり、次の積分方程式を考える。

$$(3.6) \quad u(t) = e^{\lambda t} u_2 + (K_{t_2} u)(t)$$

但し、 $u_2 = u_1 + C_0 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda \tau} f(\tau, u(\tau)) d\tau$ とおく。

今求めた解 $u(t)$ は明らかに、(3.6) の解であり、かつ

$$(3.7) \quad \|u_2\| \leq \|u_1\| + C_0 \|u_1\| \delta(t_2, t_1)$$

であるから、次の不等式を満たしている。

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{\lambda t} u_2\| &\leq \|u(t)\| + \|u_2\| e^{\mu t} \\ &\leq \alpha_1 e^{\mu t} \delta(t, t_2) \quad (\alpha_1 = (3 + C_0) \|u_1\| \delta(t_2, t_1)) \end{aligned}$$

一方、(3.6) にあらためて定理3を適用するために、(3.5) の不等式に対応する不等式

$$2 \|u_2\| e^{\mu t} \delta(t, t_2) \leq R e^{\mu t},$$

即ち、(3.7) より、不等式

$$2(1 + C_0) \|u_1\| / R \leq e^{(\mu' - \mu)t} / [\delta(t_2, t_1) \delta(t, t_2)]$$

が $t \geq t_2$ で成立するように、十分大きな $t_2 \geq t_0$ を選べばよい。この t_2 に対して、方程式(3.6)は解 $v(t)$ を有し、

$$\|v(t) - e^{\lambda t} u_2\| \leq \alpha_2 e^{\mu t} \delta(t, t_2) \quad (\alpha_2 = \|u_2\|)$$

を満たすような解 $v(t)$ を有することが、定理3により導かれる。

しかも、系1より、 $t \geq t_0 - \omega$ で $u(t) \equiv v(t)$ である。然るに、系2より、(3.6)の解 $u(t)$ として、(2.5)に対応する不等式が成立するから、定理1の証明の場合と同様にして、(3.4)の形の不等式が導かれる。これで、定理2が証明された。

参考文献

- [1] Bellman R. & K.L. Cooke; Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations, Mem. Amer. Math. Soc. No. 35 (1959)
- [2] Hale J. K. ; Linear asymptotically autonomous functional differential equations, Rend. Circ. Math. Palermo,
- [3] Hukuhara M. ; Sur les points singuliers des équation différentielles linéaires : Domaine réel, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 2, Vol. 2 (1934)
- [4] Wright E. M. ; The linear difference-differential equation with asymptotically constant coefficients, Amer. J. Math., Vol. 70, (1948).