

Kauffman polynomial のある特殊化について

大阪市立大・理・宮澤康行 (Yasoyuki Miyazawa)

Kauffman によって導入された, oriented link に対する 2 変数 a の多項式不変量 Kauffman polynomial の特殊化について考える。

Kauffman polynomial の特殊化として, unoriented link の不変量である Q -polynomial や, skein polynomial の特殊化としても得られる Jones polynomial などがよく知られているが, このほか, ある意味で knot の対称性と Kauffman polynomial の関係について調べることを目標とした 1 つの特殊化について考える。

まず最初に Kauffman polynomial の定義を述べる。 Λ を次 $\alpha \neq 4$ の性質によつて決まる unoriented link diagram から $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ への function とする

(i) $\Lambda(\bigcirc) = 1$.

(ii) Λ は regular isotopy invariant

(可なりち, Reidemeister move II, III で不変)

$$(iii) \quad \Delta(\boxed{D}) = a \Delta(D), \quad \Delta(\overline{D}) = a^{-1} \Delta(D)$$

$$(iv) \quad \Delta(D_+) + \Delta(D_-) = z(\Delta(D_0) + \Delta(D_\infty)),$$

ここで, D_+, D_-, D_0, D_∞ は次の図の様に1ヶ所を除いて同じ link diagram を表わす。

$$\begin{array}{cccc} \diagup \diagdown & \diagdown \diagup &) (& \cup \\ D_+ & D_- & D_0 & D_\infty \end{array}$$

Oriented link L と L を表わす diagram D に対し
 $(z \quad F_L(a, z) = a^{-w(D)} \Delta(D) \quad \text{とおく。ここで,}$
 $w(D)$ は D の writhe である。このとき $F_L(a, z)$ は,
 oriented link a の不変量となり, これを Kauffman
 polynomial と定義する。

ここで考える特殊化は2つの変数 a と z のうち z に1
 を代入したものである。可なりち $F_L(a, 1)$ という a に関する
 polynomial である。

Theorem. k を amphicheiral knot である。deter-
 minant が3の倍数でない (i.e. $\Delta_k(-1) \not\equiv 0 \pmod{3}$)
 とある。このとき

$$(1) \deg_a F_K(a, z) \leq 6 \Rightarrow F_K(a, 1) = 1,$$

$$(2) \deg_a F_K(a, z) = 8$$

$$\Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}; F_K(a, 1) = 1 + p(a^4 + a^3 - a - 2 - a^{-1} + a^{-3} + a^{-4}),$$

∴ $\deg_a F_K(a, z)$ は $F_K(a, z)$ の a の最高次数から a の最低次数を引いた値である。

証明の前にいくつかの Lemma を用意する。

Lemma 1. L を link, $M_2(L)$ を L を branch

set とする S^3 の double branched cover とする。

このとき,

$$\text{rank } H_1(M_2(L); \mathbb{Z}_3) \neq 0 \Rightarrow F_L(a, 1) \neq 1.$$

proof. $F_L(a, 1) = 1$

$$\Rightarrow F_L(-1, 1) = 1 \Rightarrow F_L(1, -1) = 1$$

$$\Rightarrow (-3)^{\text{rank } H_1(M_2(L); \mathbb{Z}_3)} = 1$$

$$\Rightarrow \text{rank } H_1(M_2(L); \mathbb{Z}_3) = 0$$

□

Lemma 1 において $L = \text{knot}$ のとき.

$$\text{rank } H_1(M_2(L); \mathbb{Z}_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta_L(-1) \not\equiv 0 \pmod{3}$$

である a, z ,

Lemma 1'. K を knot とするとき

$$\Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow \bar{F}_K(a, 1) \neq 1.$$

が成り立つ。よ a と z から, K が amphicheiral knot である

$\bar{F}_K(a, z)$ の degree が 6 以下 である, z も $\bar{F}_K(a, 1) = 1$ になる z は 5 つしかないことがわかる。

Lemma 2. K を knot. $\bar{F}_K(a, z) \in K$ a Kauffman polynomial とする。

$$G_K(a) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}_K(a, 1) - 1$$

とすると,

$$G_K(a) = (a^3 - 1)(a^2 + 1)g_K(a), \quad g_K(a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$$

が成り立つ。

proof. K が knot ならば, $\bar{F}_K(a, -(a + a^{-1})) = 1$ である a, z . ω を 1 の原始 3 乗根として, $a = 1, \omega, \omega^2$ を代入すれば. $\bar{F}_K(a, 1) - 1 = (a^3 - 1)f_1(a)$, $f_1(a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$ を得る。また, K が knot ならば, $\bar{F}_K(\sqrt{-1}, z) = 1$ である a, z . $\bar{F}_K(-\sqrt{-1}, z) = 1$ も成り立ち。従って

$\bar{F}_K(a, 1) - 1 = (a^2 + 1)f_2(a)$, $f_2(a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$, が成り立つ。 $a^3 - 1$ と $a^2 + 1$ は共通因数をもたない a, z 。

$$G_K(a) = \bar{F}_K(a, 1) - 1 = (a^3 - 1)(a^2 + 1)g_K(a), \quad g_K(a) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$$

が成り立つ。 $\square$

Lemma 3. K は amphicheiral knot とし, $g_K(a)$ は Lemma 2 で得られた polynomial

$$(i.e. \quad g_K(a) = \frac{F_K(a, 1) - 1}{(a^3 - 1)(a^2 + 1)}) \quad \text{とす。} \quad \therefore a \neq 1$$

$$g_K(a) = \sum_{\substack{i > j \\ i+j = -5}} P_i (a^i - a^j) \quad \text{が成り立つ。} \quad \text{さらに,}$$

$$\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow \sum P_i (-1)^i = 0.$$

proof. K は amphicheiral knot として,

$$F_K(a, z) = F_K(a^{-1}, z). \quad \text{ゆえに} \quad F_K(a, 1) = F_K(a^{-1}, 1).$$

従って $g_K(a) = g_K(a^{-1})$ が成り立つ。 $\therefore$ Lemma 2より

$$g_K(a) = (a^3 - 1)(a^2 + 1) g_K(a),$$

$$g_K(a^{-1}) = -a^{-5} (a^3 - 1)(a^2 + 1) g_K(a^{-1}) \quad \text{が成り立つ。}$$

$$g_K(a) = -a^{-5} g_K(a^{-1}).$$

$$g_K(a) = \sum_{l=1}^m P_{k_l} a^{k_l}, \quad k_1 < k_2 < \dots < k_{m-1} < k_m, \quad \text{と仮定する。}$$

$$\begin{cases} k_l + k_{m+1-l} = -5 \\ P_{k_l} + P_{k_{m+1-l}} = 0 \end{cases}$$

を得る。従って,

$$g_k(a) = \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} p_i (a^i - a^j) \quad \text{と仮定}.$$

$$\begin{aligned} \text{また, } G_k(-1) &= -4 g_k(-1). \quad \text{一方, } G_k(a) \text{ の定義から} \\ G_k(-1) &= F_k(-1, 1) - 1 = F_k(1, -1) - 1 \\ &= (-3)^{\text{rank } H_1(M_2(k); \mathbb{Z}_3)} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } g_k(-1) = -\frac{1}{4} \left((-3)^{\text{rank } H_1(M_2(k); \mathbb{Z}_3)} - 1 \right)$$

$$\Delta_k(-1) \not\equiv 0 \pmod{3} \Leftrightarrow \text{rank } H_1(M_2(k); \mathbb{Z}_3) = 0 \quad \text{より}$$

$$\Delta_k(-1) \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ ならば } g_k(-1) = 0. \quad \text{よって}$$

$$g_k(-1) = \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} p_i ((-1)^i - (-1)^j) = 2 \sum_{\substack{i>j \\ i+j=-5}} p_i (-1)^i \quad \text{だから}$$

$$\sum p_i (-1)^i = \frac{1}{2} g_k(-1) = 0. \quad \square$$

Proof of Theorem. (1) 対偶を示す。

$$F_k(a, 1) \neq 1 \Rightarrow G_k(a) \neq 0 \Rightarrow g_k(a) \neq 0.$$

$$\text{Lemma 3 より } \deg_a g_k(a) \geq 1.$$

$$\deg_a g_k(a) = 1 \text{ と仮定すると, Lemma 3 より } \exists p \neq 0:$$

$$g_k(a) = p(a^{-2} - a^{-3}). \quad \Delta_k(-1) \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ だから}$$

$$\text{Lemma 3 の後半部分の結果より } p = 0. \quad \text{これは矛盾。よ}$$

$$\text{って } \deg_a g_k(a) \geq 2.$$

$$\deg_a g_k(a) \geq 2 \Rightarrow \deg_a G_k(a) \geq 7$$

$$\Rightarrow \deg_a \bar{F}_K(a, 1) \geq 8 \quad \because \bar{F}_K(a, 1) = \bar{F}_K(a^{-1}, 1)$$

$$\Rightarrow \deg_a \bar{F}_K(a, z) \geq 8$$

$$\text{以上より} \quad \deg_a \bar{F}_K(a, z) \leq 6 \Rightarrow \bar{F}_K(a, 1) = 1$$

$$(2) \quad \deg_a \bar{F}_K(a, z) = 8 \quad z \text{ "あるから", } \deg_a \bar{F}_K(a, 1) \leq 8.$$

Lemma 3 によつて, $\exists p, q \in \mathbb{Z};$

$$g_K(a) = p(a^{-2} - a^{-3}) + q(a^{-1} - a^{-4})$$

が成り立つ。また $\Delta_K(-1) \not\equiv 0 \pmod{3}$ より Lemma

3 から $p - q = 0 \quad \therefore p = q$ を得る。ゆえに,

$$g_K(a) = p(a^{-1} + a^{-2} - a^{-3} - a^{-4}). \quad \text{従つて}$$

$$\bar{F}_K(a, 1) = 1 + (a^3 - 1)(a^2 + 1) \times p(a^{-1} + a^{-2} - a^{-3} - a^{-4})$$

$$= 1 + p(a^4 + a^3 - a - 2 - a^{-1} + a^{-3} + a^{-4}) \quad \square$$

$\bar{F}_K(a, z)$ が a に関する degree が 10 以上の場合も,

Lemma 3 によつて, その形が決定されるが, 煩雑になる

のでここでは述べないことにする。