

非有界作用素の正規拡大について

九州芸工大 太田昇一 (Schôichi Ôta)

1. 非有界作用素の正規拡大については、微分作用素の研究から、Kilpi (1953年) や Davis (1955年) が同じ空間上への正規拡大について考察している。Coddington (1960年前後) も同じ立場から、Neumannの対称作用素の自己共役拡大の方法を用いて、同じ空間への拡張問題を考えている。一方、Bargmannは、creation operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$ in $L^2(\mathbb{R})$ が、空間の外への正規拡大をもつことを示した (1961年)。近年では、非有界な Toeplitz 作用素や非有界な weighted shift に関連して、非有界な正規拡大問題が研究されている。

2. T をヒルベルト空間 H 上稠密な定義域を持つ線形作用素とする。このとき、

$$(1) T \text{ が formally normal } \iff \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$$

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x \in \mathcal{D}(T));$$

$$(2) T \text{ が normal } \iff T \text{ が formally normal で } \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T^*);$$

$$(3) T \text{ が subnormal } \iff \exists \text{ 閉部分空間 } K \text{ として含む適当なヒルベルト空間 } K \text{ と、} K \text{ 上の normal な作用素 } N \text{ が存在}$$

して、

$$\textcircled{*} \dots \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H},$$

かつ、 $T\eta = N\eta \quad (\eta \in \mathcal{D}(T))$ を満たす：

のように定義する。

この定義に関連して、McDonald and Sundberg (1986年) は、*Subnormal* の定義において、 $\textcircled{*}$ ではなくもっと強い条件：

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H} \quad \dots \dots \dots \textcircled{*} \textcircled{*}$$

のもとで、有界作用素における Putnam の結果を非有界 *subnormal* に拡張している。(注： $\textcircled{*} \textcircled{*}$ を満たす *subnormal* は必ず *closed*)

1940年代に、Naimark は対称作用素の拡大問題 (空間の外への拡大も含めて) を第1種、2種、3種に分類して論じている。閉対称作用素は、 $\textcircled{*} \textcircled{*}$ を満たすような自己共役拡大をもつ (即ち、Naimark の言葉で言うと、第2種の拡大をもつ)。

それでは、「一般に *closed* な *subnormal* 作用素は、第2種の拡大をもつのか？」という問 (Stochel and Szatraniec (1989)) が自然に出るが、「第2種の *normal* 拡大を持たない *closed subnormal* 作用素が存在する」ことは、講究録 (903巻, pp.138-141) で述べた。この例は、一方で、同じ空間上への *unique* な *normal* 拡大をもつが、それ自身 *normal* でない *closed* 作用素になっている。 *closed* 対称作用素が *unique* な自己共役拡大と同じ空間にあれば、それ自身が自己共役になっていることに注意しておく。

3. 作用素 T に対して、 $T = T_1 + iT_2$ ただし、 T_1, T_2 は
 対称作用素で $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2)$ を T の Cartesian 分解という。
 自己共役作用素 A, B に対して、 A と B のそれぞれの spectral
 projection が互いに可換な時、 A と B は強可換と言い、 A と B
 と書くことにする。

定理 1 formally normal 作用素 $T = T_1 + iT_2$ (Cartesian 分解)
 において、 T_1 と T_2 は essentially 自己共役とする。このとき、
 次は同値：

1. T が subnormal ;
 2. $\overline{T_1} \subset \overline{T_2}$;
 3. T が同じ空間上への一意的な normal 拡大をもつ。
- 上のとき、一意的な normal 拡大は $\overline{T_1} + i\overline{T_2}$ で与えられる。

第 2 種の normal 拡大を持たない subnormal 作用素は、上の形
 で、 $\overline{T_1 + iT_2} \subsetneq \overline{T_1} + i\overline{T_2}$ の例でもある。

ここで、等号が成り立つ場合の特徴づけは、次で与えられる。

命題 2 定理 1 の仮定のもとに、 T が subnormal とすると、

$\overline{T} = \overline{T_1} + i\overline{T_2}$ なるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} C^s(T_2)' \mathcal{D}(\overline{T}) &\subset \mathcal{D}(\overline{T}) \\ (\Leftrightarrow) C^s(T_1)' \mathcal{D}(\overline{T}) &\subset \mathcal{D}(\overline{T}) \end{aligned}$$

である。ここに $C^s(T_2) = \{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : BT \subset TB \}$, で

$C^*(T_2)'$ は $B(\mathcal{H})$ における $C^*(T_2)$ の通常の可換子である。

4. 同じ空間 $\mathcal{H}$ の unique な normal 拡大をもつ作用素を考える際、定理 1 で特に T_2 が有界な場合と最初を考えてみる。すなわち、 $T = A + Bi$ ($A \in A^*$, $B = B^* \in B(\mathcal{H})$) において、

補題 3 T が $\mathcal{H}$ へ normal 拡大をもつならば、 $B \in C^w(A)$ 。

ここに $C^w(A) = \{X \in B(\mathcal{H}) : XA \subset A^*X\}$ 。

(注: $B \in C^w(A)$ でも $A + Bi$ は一般に normal 拡大を持たない例は存在する)。

命題 4 $B \in C^w(A)$ が B が cyclic ベクトルをもつならば、 T は $\mathcal{H}$ 上 unique な normal 拡大をもつ。

もっと一般に、次の定理が成り立つ:

定理 5 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の稠密な定義域をもつ作用素 T が $\mathcal{H}$ に normal 拡大 N をもち、その imaginary part $\text{Im } N$ の closure B_0 が simple spectrum を持つならば、 T は $\mathcal{H}$ 上 unique な normal 拡大 $A_0 + iB_0$ をもつ:

ただし、 $\mathcal{D}(A_0) \equiv \left\{ \sum A_i \xi_i : A_i \in C^*(B_0)', \xi_i \in \mathcal{D}(A) \right\}$

$$A_0 \left(\sum A_i \xi_i \right) \equiv \sum A_i A \xi_i.$$