

Riemann ξ -関数の実部の零点の垂直線上の最隣接間隔分布

東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻 鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

ここでは研究集会の際に発表した [12] の主結果について、それに至るまでの経緯や関連した事柄などを交えて解説する。こういう舞台裏解説のような記事を毎回書くのは如何なものかと筆者自身は思っていたが、こういった記事を歓迎してくれている方々もいると耳にしたので、今回もそういったスタイルで書くこととした。

1. 起 - LAGARIAS と LI の結果

Riemann ξ -関数は、 $\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数、 $\Gamma(s)$ をガンマ関数として

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

で定義される整関数である。これに対し、実数 ω をパラメータに持つ整関数の族

$$A_\omega(s) := \frac{1}{2}(\xi(s+\omega) + \xi(s-\omega)), \quad B_\omega(s) := \frac{i}{2}(\xi(s+\omega) - \xi(s-\omega))$$

を考える。 $A_{-\omega}(s) = A_\omega(s)$, $B_{-\omega}(s) = -B_\omega(s)$ だから、 ω は非負の場合のみ考えれば十分なので、以下では ω は非負とする。定義により $A_0(s) = \xi(s)$ だから、十分小さな $\omega > 0$ に対して $A_\omega(s)$ の何らかの挙動が分かれば、それに対応した $\xi(s)$ に関する情報が得られると期待される。この記事での我々の関心は、 $\xi(s)$ の零点に関する情報である。

まず簡単に分かることとして、 $A_\omega(s)$ は $\omega \rightarrow 0$ のとき $\xi(s)$ に広義一様収束するので、十分小さなすべての $\omega > 0$ に対して $A_\omega(s)$ の零点がすべて臨界線 $\sigma = \Re(s) = 1/2$ 上にあれば、 $\xi(s)$ の零点もすべて臨界線上にある事 (Riemann 予想, RH) が結論される。逆に、Riemann 予想を仮定すれば、任意の $\omega \geq 0$ に対して $A_\omega(s)$ の零点はすべて臨界線上にある事が言える ($\omega \geq 1/2$ なら、Riemann 予想を仮定する必要はない)。

A_ω, B_ω に対するこのような事柄は Lagarias [10] において、より詳しい形で述べられているが、零点が臨界線上にあるか否かという点のみについては、1927 年の Tschakaloff [13] が最初なのではないかと思われる。この Tschakaloff の結果はあまり引用されていないようで、筆者は Dimitrov-Rusev [1, §6] で初めて知った。[1] は、Riemann 予想をひとつの動機として、整関数の零点の研究がどのように進展してきたかを扱った survey paper で、1900 年前後から 2006 年頃までの様々な興味深い結果が紹介されている。内容の充実度もさることながら、群像劇仕立ての構成も面白い。例えば §4 では “A knight of the classical analysis” という表題のもと、Titchmarsh の研究が紹介されている。

話を A_ω と B_ω に戻そう。これらの臨界線上での値は

$$A_\omega\left(\frac{1}{2} + it\right) = \operatorname{Re} \xi\left(\frac{1}{2} + \omega + it\right), \quad B_\omega\left(\frac{1}{2} + it\right) = -\operatorname{Im} \xi\left(\frac{1}{2} + \omega + it\right)$$

と表されるので、 A_ω と B_ω の臨界線上での零点は、Riemann ξ -関数の実部および虚部のある垂直線上の零点に対応している。 $\xi(\frac{1}{2} + \omega + it) = 0$ であることと、 $\operatorname{Re} \xi(\frac{1}{2} + \omega + it) = 0$ かつ $\operatorname{Im} \xi(\frac{1}{2} + \omega + it) = 0$ であることは同値だから、もしある $\omega > 0$ に対して A_ω と B_ω が臨界線上で共通の零点を持てば、 $\xi(s)$ は $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2} + \omega + it$ という臨界線の右側の垂直線上に零点を持つことになる。このように、 A_ω に加えて B_ω という関数を考えると、 $\xi(s)$ の臨界線の外での零点との直接の関係が生ずる。

さて, $0 \leq \omega < 1/2$ ならば Riemann 予想を仮定することにすれば, A_ω と B_ω の零点は臨界線上にしかない. しかも, Li [11] によれば, Riemann 予想を仮定せずとも, A_ω と B_ω の臨界線外にある零点は, 存在したとしてもその割合は 0 である. この意味で, A_ω と B_ω の水平方向の零点分布はよく分かっていると言える. そこで, 今度は A_ω と B_ω の垂直方向の零点分布に目を向けよう.

よく知られているように, ξ -関数の垂直方向の零点分布は, GUE 型のランダム行列の固有値の分布と関係することが予想されている (GUE 予想). [10] のひとつの目的は, 垂直方向の零点分布という観点から, ξ -関数と A_ω , B_ω の関係を調べることであった.

ここで [10] の結果をかいつまんで説明しておく. 簡単のため, 話を A_ω に限定して, A_ω は臨界線上にしか零点を持たず, しかもそれらはすべて単純であると仮定する (この仮定は, $\omega \geq 1/2$ もしくは RH を仮定すれば満たされる). さらに, A_ω の虚部が正の零点を, 虚部が小さい方から順に番号付けして, $\rho_n = 1/2 + i\gamma_n$ などと表し, 正規化された虚部とその最隣接間隔を

$$\gamma_n^{(1)} := \frac{\gamma_n}{2\pi} \log \frac{\gamma_n}{2\pi e}, \quad \delta_n^{(1)} := \gamma_{n+1}^{(1)} - \gamma_n^{(1)}$$

により定める (勿論これらは ω に依存するが, 記号の煩雑さを避けるため省略した).

GUE 予想の一部として, ξ -関数 ($A_{\omega=0}$) の零点の虚部の最隣接間隔分布に対して,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Sigma(T)|} \sum_{0 < \gamma_n \leq T} \phi(\delta_n^{(1)}) = \int_0^\infty \phi(u) p_0(u) du$$

が成り立つことが予想されている. ここで, $\Sigma(T) = \{\delta_n^{(1)} : 0 < \gamma_n \leq T\}$, $\phi(u)$ は適当な試験関数, $p_0(u)$ はガウス分布に従う有限サイズのランダム Hermite 行列の固有値の正規化された最隣接間隔の分布の極限から得られる密度関数である.

これに対し, [10, 11] の結果から, 任意の $\omega > 0$ に対して

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_\omega(T)} \sum_{0 < \gamma_n \leq T} \phi(\delta_n^{(1)}) = \int_0^\infty \phi(u) \delta(u-1) du$$

が成り立つ事が分かる (しかも, [11] により, これは RH の仮定なしに成り立つ). ここで $N_\omega(T)$ は $0 < \gamma_n \leq T$ を満たす A_ω の零点の個数, $\phi(u)$ は適当な試験関数, $\delta(u)$ は原点に台を持つ Dirac δ -関数である.

このように, 最隣接間隔分布だけをとってみても, $\omega > 0$ に対する A_ω の零点分布は, $\omega = 0$ の場合に予想される分布と著しく異なることが観察される. 実際, $p_0(u)$ は

$$\frac{32}{\pi^2} u^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} u^2\right)$$

で良く近似されることが知られているが, これは $\delta(u)$ とは似ても似つかない. しかも, $\delta(u)$ は $p_0(u)$ と異なり, 数学のどんな場面にもよく現れる普遍的な関数の一つであるから, ξ -関数に特有の数論的性質を反映しているとはあまり考えられない.

こういった理由により, 筆者は [10, 11] の結果を知ってはいたが, 当時は自分で関連した研究をすることはなかった.

2. 承 - WENG ゼータ関数

ここで話を少し違った方向に移す. 一般の $\omega > 0$ に対しては A_ω や B_ω の特別な解釈は知られていないが, $\omega = 1/2$ に対しては, ξ -関数との関係とは別種の解釈が可能になる. それは Weng ゼータ関数との関係である. Weng ゼータ関数は, 一般には代数群 G と

その極大放物部分群 P の組に対して定義されるが、その中で特に定義体 F , $G = SL(r)$, $P = P_{n-1,1}$ に対応するゼータ関数 $\hat{\zeta}_{F,r}$ は高階ゼータ関数 (high rank zeta functions) と呼ばれ, Riemann ゼータ関数をはじめ, Dedekind ゼータ関数, 有限体上定義された非特異代数曲線のゼータ関数などを階数 1 の場合として含むものとなっている. F が有限体上定義された非特異代数曲線 C の関数体の場合には, $\hat{\zeta}_{C,r}$ とも表す. そして, B_ω と 2 階の Weng ゼータ関数には

$$s(2s-1)(2s-2)\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s) = B_{1/2}(2s-1/2)$$

という関係が成り立つ. より一般に, $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}(s)$ に適当な多項式を乗じたものは, $\xi(as+b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) たちの特殊な線形結合で表される (Weng [14, Appendix], [9, §4]). しかも, ある適当な仮定の下では, $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の零点は, 有限個の例外を除いて, すべて臨界線上にあることが分かる ([9, Theorem 1.1]. $r = 2 \sim 5$ なら例外はない.).

こういった事柄と [10] の結果を合わせて考えると, $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の垂直方向の零点分布はどうなっているのかという疑問が自然にわく. そういった動機により, 2006 年頃には $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ ($r = 2 \sim 5$) に対して Weng さんともやりとりしながらそのような問題を考えていたが, 理論的または数値実験的に, [10] のような $\delta(u)$ を密度関数とする分布しか現れないことが観察されたことで興味を失い, 特に論文にすることもなく時間が過ぎていった.

3. 転 - 有限体上の WENG ゼータ関数に対する SATO-TATE 予想

そんな状況の中, 2014 年の 4 月初旬, Weng さんから一通のメールが添付ファイルの文書 [15] と共に届いた. そこでは次のような予想が述べられていた. いま $\mathbb{Q}$ 上の高階ゼータ関数 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の虚部が正の零点を, (対応する Riemann 予想のもとで) 虚部が小さい順に番号付けして $1/2 + i\gamma_n$ と書き,

$$\Delta_n := \left(\frac{r}{2\pi}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \frac{1}{\log n} \right) \left(\log \frac{r}{2\pi} \gamma_n - \log \frac{n}{\log n} \right) \cdot \begin{cases} \log n \cdot \log \log n, & r = 2, \\ (\log n)^2, & r \geq 3 \end{cases}$$

という量を考える. このとき, Δ_n の分布と Riemann ゼータに対する $\delta_n^{(1)} = \gamma_{n+1}^{(1)} - \gamma_n^{(1)}$ (即ち, $\omega = 0$ の場合) の分布には何か密接な関係があるのではないか, というのが [15, §2] で述べられていた予想だった (この Δ_n の定義は [16] では若干修正されている).

定義だけを見ると, 何故 Δ_n のような量を考えるに至ったのかは明らかではないが, [15] とメールの文章によれば, これは有限体上定義された楕円曲線 E の高階ゼータ関数 $\zeta_{E,r}$ の零点に関する研究から類推したものだという事だった. 当時, Weng さんは Zagier さんとの共同研究 [18] で $\zeta_{E,r}$ に対する Riemann 予想を証明しており, その延長線上で $\zeta_{E,r}$ の零点分布を調べていた. $\zeta_{E,1}$ は通常の E のゼータ関数と一致するので, E の定義体の位数を動かしたとき, $\zeta_{E,1}$ の零点分布は Sato-Tate 測度により記述される. そこで $r = 2, 3$ の場合を調べてみると, 有理数体上の高階ゼータ関数の時と同様に, Sato-Tate 測度とは似ても似つかない分布が現れてしまう.

ところが, Weng さんは $\zeta_{E,r}$ の零点分布には“第二主要項”というべきものが考えられ, その“第二主要項”は Sato-Tate 測度と関係しそうだという事を見出した. この発見に基づいて, 代数体の高階ゼータ関数と有限体上の高階ゼータ関数の類似から, Weng さんは上記の Δ_n の定義と予想に至ったということである.

こういった由来を眺めると, Δ_n という量には実際に何か面白い性質があるかもしれないと思えたので, 以前 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の零点分布の数値計算に用いたデータやプログラムやらを引っ張りだしてきて, とりあえず $r = 2, 3$ の場合に Δ_n の分布をグラフにしてみる

ことにした。そうすると、何と Riemann ゼータ関数の零点の虚部の正規化された最隣接間隔 $\delta_n^{(1)}$ ($\omega = 0$) の分布と見た目には非常に似たグラフが得られたのである!

次ページにある Figure 1 は Katz-Sarnak の本にある Riemann ゼータ関数の零点の正規化された虚部の最隣接間隔の分布と密度関数 $p_0(u)$ の比較, Figure 2 は $\mathbb{Q}$ 上の 2 階のゼータ関数 $\xi_{\mathbb{Q},2}(s) := s(2s-1)(2s-2)\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}(s) = B_{1/2}(2s-\frac{1}{2})$ について, Δ_n ($r=2$) に関する分布をグラフにしたものである (筆者が最初に作成したものより多くの数値データに基づいて作成されたグラフが [17] にあるので, それを拝借した).

グラフの横軸はそれぞれ $\delta_n^{(1)}$, Δ_n の値だが, Figure 1 の縦軸は $\delta_n^{(1)}$ がその値をとる頻度, Figure 2 の縦軸は Δ_n がその値をとる零点の個数になっているという違いはあるし, 横軸の値にも並行移動分のズレがあるといった違いにも注意する必要があるが, グラフの概形がよく似ていることはこれで十分見てとれると思う。

4. 結 - ζ'/ζ の値分布との関係

こうした観察によって, 筆者にも Riemann ゼータ関数の零点分布と Δ_n という量には, 何らかの関係がありそうだと思えたので, 今度は少し理論的に考察してみることにした。実際, Δ_n が Riemann ゼータ関数の零点分布と関係しそうだとは言っても, それが具体的にどういった関係なのかは, 最初の時点では全く不明だった。

とはいえ, いきなり一般の $r \geq 2$ に対して $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の零点分布を扱うのは困難に思えたので, $r=2$ の場合を想定して, A_ω , B_ω に対して, Δ_n の類似を考えることにした。

以下, $\omega > 0$ を固定して考える。また, $0 < \omega < 1/2$ ならば RH を仮定し, X_ω で A_ω または B_ω を表す。このとき, X_ω の零点はすべて臨界線上にあり, しかも単純である (後に述べる主結果では RH を仮定する必要はないのだが, 説明を簡略化するために RH を仮定している)。虚部が $[0, T]$ の間にある X_ω の零点の個数を $N_\omega(T)$ とすると, 標準的な手法により

$$N_\omega(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + S_\omega(T) + \frac{7+2\omega}{8} + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad (T \geq 2)$$

が成り立つことが分かる。ここで,

$$S_\omega(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + \omega + it\right) = O(\log t).$$

$N_\omega(T)$ の表示と零点の単純性から,

$$\delta_n^{(1)} = 1 - \left(S_\omega(\gamma_{n+1}) - S_\omega(\gamma_n)\right) + O\left(\frac{1}{\gamma_n}\right).$$

したがって, $T \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n^{(1)}$ の分布の密度関数が 0 に台を持つデルタ関数に収束するという事は, $S_\omega(\gamma_{n+1}) - S_\omega(\gamma_n)$ の寄与が 1 に比べて小さいことを意味する。

$r=2$ のとき, Δ_n の定義にある

$$\left(\frac{r}{2\pi}(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \frac{1}{\log n}\right) \left(\log \frac{r}{2\pi} \gamma_n - \log \frac{n}{\log n}\right)$$

という項は, 本質的に $\delta_n^{(1)} - 1$ ($\omega = 1/2$) と見なせるので, Δ_n は $S_\omega(\gamma_{n+1}) - S_\omega(\gamma_n)$ の寄与を見ていることになる。ここで

$$S(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} S_\omega(t)$$

が Riemann ゼータ関数の零点の微妙な挙動と深く関連している事を思い出せば, Δ_n の

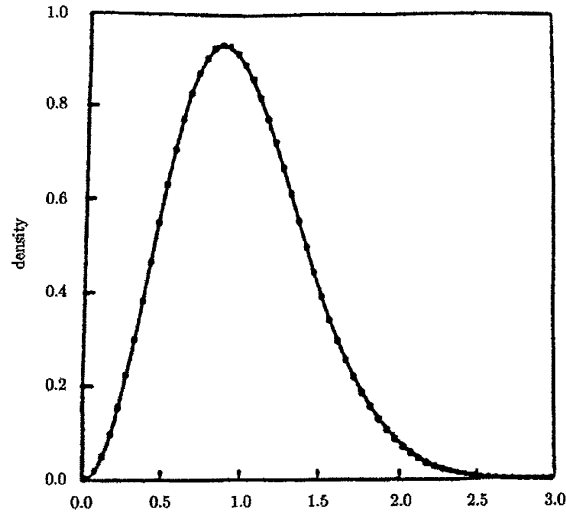


FIGURE 1. Nearest neighbor spacing among 70 million zeros beyond the 10^{20} th zero of $\zeta(s)$ compared to the GUE. (Katz–Sarnak, 1999)

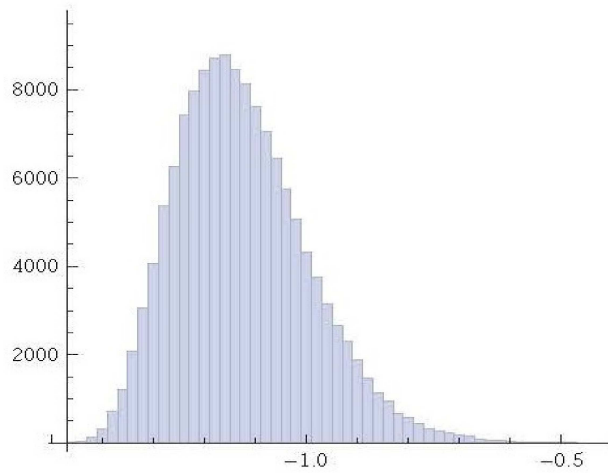


FIGURE 2. The second nearest neighbor spacings Δ_n among 138,000 zeros of the function $\xi_{Q,2}(s) = B_{1/2}(2s - \frac{1}{2})$. (Katayama–Suzuki–Weng, 2014)

分布が $\delta_n^{(1)}$ ($\omega = 0$) の分布と似ているのはもっともらしく思えてくるし、数論的にも意味のある量なのではないかと思える。

その一方で、 $S(t)$ の挙動に関して具体的に何かを証明するのは非常に難しいので、数値実験で観察された Δ_n の分布を理論的に説明するのは困難なのではないかという懸念もわく。この懸念は、微積分の講義の準備をしていて、

$$S_\omega(\gamma_{n+1}) - S_\omega(\gamma_n) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta} \left(\frac{1}{2} + \omega + i\xi_n \right) \cdot (\gamma_{n+1} - \gamma_n), \quad \exists \xi_n \in (\gamma_n, \gamma_{n+1})$$

という単純な式に気付いたことによりあっさり払拭された。我々が知りたいのは Δ_n の統計的な性質であるから、ある種の平均的な挙動さえ分かればよい。この右辺の形は、そういった考えと、いくつかの既知の結果を筆者に思い起こさせるものであった。その様な既知の結果を実際に用いることができるように試行錯誤した結果、最終的に次のような定式化をすると具合が良いという結論に至った。

まず、 $\gamma_n^{(1)}$ から主要項 n を取り除き、若干大きさを調整した

$$\gamma_n^{(2)} := (\gamma_n^{(1)} - n) \cdot \varrho_\omega^{-1/2} \cdot \frac{1}{2\pi} \log \frac{\gamma_n}{2\pi e}$$

という量を考える。ここで

$$\varrho_\omega := \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)^2}{n^{1+2\omega}}, \quad \Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{if } n = p^k, k \geq 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これを用いて、

$$\delta_n^{(2)} = \gamma_{n+1}^{(2)} - \gamma_n^{(2)}$$

と定義する。この $\delta_n^{(2)}$ は $\omega = 1/2$ のとき Δ_n ($r = 2$) と本質的に同様の量であるが、 $\log(\gamma_n/(2\pi e))$ の部分で若干オーダーが異なっている。また、我々の $\gamma_n^{(2)}$ の定義では、平均的に $|\delta_n^{(2)}|$ が 1 となるように正規化している。さらに、誤差項の差を除いて、

$$\delta_n^{(2)} = (\delta_n^{(1)} - 1) \cdot \varrho_\omega^{-1/2} \cdot \frac{1}{2\pi} \log \frac{\gamma_n}{2\pi e}$$

であることにも注意して欲しい。

さて、このように定義すると、 $\delta_n^{(2)}$ の分布は、密度関数が具体的に書き下せるという意味でよく分かる。それを述べるために、 $\zeta'/\zeta(s)$ の値分布に関する結果を引用する。

定理 1 (Kampen–Wintner [6], Kershner–Wintner [7], Guo [2], Ihara [3], Ihara–Matsumoto [5]). 任意に与えられた $\sigma > 1/2$ に対して、具体的に書き下すことのできる C^∞ 級関数 $M_\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $\int_{\mathbb{C}} M_\sigma(z) dz = 2\pi$ を満たすものが存在し、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Phi(z) M_\sigma(z) dz$$

が成り立つ。ただし、 Φ は $\mathbb{C}$ 上の有界連続関数、または $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合の特性関数、もしくは補集合が $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合となるような $\mathbb{C}$ の部分集合の特性関数とする。

Ihara [3] に従って、定理 1 に現れる密度関数 M_σ を M -関数と呼ぶことにする。 M -関数の具体的な定義については [3, 5] を参照して欲しい。この M -関数を用いて、 $\sigma > 1/2$ に対する m -関数 m_σ を

$$m_\sigma(u) = \int_{-\infty}^{\infty} M_\sigma(u + iv) dv$$

により定義する. $M_\sigma(z)$ は $|z| \rightarrow \infty$ のとき急減少することが知られているので, m_σ は well-defined である. この m_σ を用いると, $\delta_n^{(2)}$ の分布が次のように記述される.

定理 2 (Theorem 1 of [12]). $\omega > 0$ とする. A_ω または B_ω の零点に対して, $\delta_n^{(2)}$ を上記の通り定義すると,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N_\omega(T)} \sum_{0 < \gamma_n \leq T} \phi(\delta_n^{(2)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \varrho_\omega^{1/2} m_{\frac{1}{2}+\omega}(\pi \varrho_\omega^{1/2} u) \phi(u) du$$

が成り立つ. ただし, ϕ は $\mathbb{R}$ 上有界な C^1 級関数で

$$\phi'(x) \ll 1 \quad \text{for } |x| \leq 1, \quad \phi'(x) \ll x^{-2} \quad \text{for } |x| \geq 1,$$

$$\left(u \mapsto \frac{d}{du} \phi\left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'}{\zeta}\left(\frac{1}{2} + \omega + iu\right)\right) \right) \ll 1 \quad \text{on } \mathbb{R}$$

を満たすものとする.

すでに述べたように, $\delta_n^{(2)}$ は $S_\omega(t)$ の挙動と直接的に関係しているので, $\omega > 0$ が小さいときの $\delta_n^{(2)}$ の分布は, 何らかの形で Riemann ゼータ関数の正規化された虚部の最隣接間隔分布に関する GUE 予想 ($\omega = 0$ の場合の $\delta_n^{(1)}$ の分布) と関連していると期待される. 実際, [4] の結果を用いると, 定理 2 の密度関数に対して

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\omega \searrow 0} \pi \varrho_\omega^{1/2} \cdot m_{\frac{1}{2}+\omega}(\pi \varrho_\omega^{1/2} \cdot u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

が成り立つことが示されるが ([12, Theorem 2]), これを $p_0(u)$ の近似式と比較してみると, 密度関数 $\pi \varrho_\omega^{1/2} \cdot m_{\frac{1}{2}+\omega}(\pi \varrho_\omega^{1/2} \cdot u)$ が少なくとも部分的には $p_0(u)$ を捉えていることを示唆しているように思える.

こういった事柄を踏まえると, $\delta_n^{(2)}$ については任意の $\omega > 0$ に対して, 何の仮定もなしに定理 2 のような結果が得られるというのは, 若干驚くべきことのように思われる.

5. これからの課題

以上で述べたような紆余曲折を経て, A_ω , B_ω や, その特殊化としての $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},2}$ の零点分布に関して一応の結果が得られた訳であるが, 依然として解決していない問題に加え, 新たに生じた問題もある. 最後にそういった問題を課題として挙げておく.

まず, 今回の結果に至るきっかけとなった高階ゼータ関数 $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ の零点分布に関連した量 Δ_n については, $r \geq 3$ の場合にはまだ何も結果が得られていない. 技術的な困難として, A_ω , B_ω の場合には ζ'/ζ の値分布に関する結果を利用できたのに対し, $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ ($r \geq 3$) の場合ではその代用となる結果がないことが大きい. いまの所, 有効な解決策が思い浮かばないのが現状である. $\hat{\zeta}_{\mathbb{Q},r}$ ($2 \leq r \leq 5$) の零点に対する数値計算のデータが Weng さんのホームページ [17] に置いてあるので, 興味がある人は眺めてみて欲しい.

次に, 新たに生じた問題として, 定理 2 をより一般のゼータ関数, L 関数に一般化する問題がある. 自己双対な関数等式を持つ L 関数 $L(s, f)$ に対しては, A_ω , B_ω の類似物 $A_\omega(s, f)$, $B_\omega(s, f)$ が自然に考えられる. $L(s, f)$ が Dirichlet 級数表示や $\mathbb{C}$ への有理型解析接続, 関数等式といった標準的な解析的性質に加え, 一般化された Riemann 予想や Ramanujan–Petersson 予想を満たす事を仮定すれば, $A_\omega(s, f)$, $B_\omega(s, f)$ の零点に対して [10, 11] のような結果を示すのは難しくないと思われるから, それにより $\gamma_n^{(2)}$ や $\delta_n^{(2)}$ のような量も自然に考えられる. ところが, $L(s, f)$ に対応する M -関数がどのようなものになるかは, $L(s, f)$ が 2 次以上の Euler 積を持つ場合は, 殆ど何も分かっていな

い. つまり, $\sigma > 1/2$ を固定して t を動かしたときの $L'(\sigma + it, f)/L(\sigma + it, f)$ の値分布を記述するような密度関数 M_σ は未知である. したがって, このような場合に定理 2 を一般化するには, まず M -関数を見つける必要がある. 2 次以上の Euler 積を持つ L 関数について M -関数を見つけることは, それ自身で興味ある問題と思われる.

さて, 少し穿った見方をすれば, 定理 2 は既知の結果を体よく組み合わせただけで, 何も新しい事を言っていないと言うこともできるだろう. 実際, 定理 2 は Riemann ゼータ関数自身の零点分布について直接何かを言っている訳ではないから, 少なくとも Riemann ゼータ関数の零点分布について, 新しい事実を明らかにしたとは言えない. であるから, 最も重要な今後の課題は, 定理 2 が数論的にどういった意味を持っているのかを解明してゆくことだろう.

REFERENCES

- [1] D. K. Dimitrov, P.K. Rusev, Zeros of entire Fourier transforms, *East J. Approx.* **17** (2011), no.1, 1–110.
- [2] C. R. Guo, The distribution of the logarithmic derivative of the Riemann zeta function, *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 1–27.
- [3] Y. Ihara, On “ M -functions” closely related to the distribution of L'/L -values, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **44** (2008), no. 3, 893–954.
- [4] Y. Ihara, On certain arithmetic functions $\tilde{M}(s; z_1, z_2)$ associated with global fields: Analytic properties, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **47** (2011), no. 1, 257–305.
- [5] Y. Ihara, K. Matsumoto, On the value-distribution of logarithmic derivatives of Dirichlet L -functions, *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions* (2014), 79–91.
- [6] E. R. van Kampen, A. Wintner, Convolutions of Distributions on Convex Curves and the Riemann Zeta Function, *Amer. J. Math.* **59** (1937), No. 1, 175–204.
- [7] R. Kershner, A. Wintner, On the asymptotic distribution of $\zeta'/\zeta(s)$ in the critical strip, *Amer. J. Math.* **59** (1937), No. 1, 673–678.
- [8] N. Katz, P. Sarnak, Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 45, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [9] H. Ki, Y. Komori, M. Suzuki, On the zeros of Weng zeta functions for Chevalley groups, to appear in *Manuscripta Mathematica*, <http://arxiv.org/abs/1011.4583>.
- [10] J. C. Lagarias, Zero spacing distributions for differenced L -functions, *Acta Arith.* **120** (2005), no.2, 159–184.
- [11] X. Li Variation of the argument of the Riemann ξ function on vertical line, *Acta Arith.* **137** (2009), no.3, 277–284.
- [12] M. Suzuki, Nearest neighbor spacing distributions for zeros of the real or imaginary part of the Riemann xi-function on vertical lines, to appear in *Acta Arithmetica*, <http://arxiv.org/abs/1409.5394>
- [13] L. Tschakaloff, On a class of entire functions, *Journal Acad. Bulgare Sci.* **36** (1927), 51–92.
- [14] L. Weng, Symmetries and the Riemann hypothesis, Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007), *Adv. Stud. Pure Math.*, vol. 58, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010, 173–223.
- [15] ———, Distributions of Zeros of Zeta Functions, preprint, 2012.
- [16] ———, Distributions of Zeros for Non-Abelian Zeta Functions, preprint, 2014, <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/zetazeros.pdf>
- [17] ———, Data on Zeta Zeros, web page, <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/zetas.html>
- [18] L. Weng, D. Zagier, Higher Rank Zeta Functions and Riemann Hypothesis for Elliptic Curves, preprint, 2014, <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~weng/ECRH.pdf>