

強遂行可能性の下での複数専門家の監視[†]

畑 田 将 範^{*}

概 要

本研究では，Azrieli [2021] のモデルに倣い，2 人の専門家から検証不可能なメッセージを受け取る状況を分析した。先行研究では，専門家達の高い努力水準と真実申告から成る戦略プロファイルが均衡となる契約のうち，プリンシパルの費用が最小となるものを導出した。しかし，この契約の下では，ねらいとする戦略プロファイル以外にも均衡が存在し，特に，低努力と虚偽申告から成る戦略プロファイルが専門家達にとって強バレート最適均衡となることがわかっている。そこで，本研究では，ねらいとする戦略プロファイルが弱バレート最適均衡となるような契約のうち，費用が最小となるものを導出した。この最適契約では，2 人の専門家の間で一致させたいメッセージを分かれさせる必要があり，(1) 報酬額が一致したメッセージの内容に応じて変わる，(2) メッセージが不一致でも報酬を支払う場合がある，という特徴を持つことが分かった。

キーワード：遂行可能性，最適契約，情報取得

I はじめに

現代社会において，専門家に調査や実験を依頼し，専門的なアドバイスを受け取る状況は数多く存在する。しかし，専門家に努力を促すような契約を雇用主が作成することは必ずしも容易ではない。というのも，専門家からのアドバイスの有益性が判明するまでには長い時間を要することも多く，この場合には情報の有益性が判明する前に依頼主が専門家へ報酬を支払わなければならないからである。例えば，コンサルタントに長期的な投資戦略について相談した場合，その投資戦略に従うことによって実際に得られる利益が判明する前に，彼に報酬を支払わなければならないかもしれない。このような状況では，専門家のパフォーマンスに依存した報酬契約を作成することは難しく，有益な情報を得るために努力するインセンティブを専門家に与えられない。したがって，雇用主は典型的なモラルハザードの問題に陥ってしまう。

この問題に取り組んだ代表的な研究が Azrieli [2021, 2022] である。これらの研究では，プリンシパルが専門家から正確性の検証ができないメッセージしか受け取れない状況であったとしても，複数の専門家を雇用することによって上記のモラルハザード問題を回避できることを示した。特に，Azrieli [2021] では，専門家たちの意見が一致した場合のみ全員に定額の報酬を支払うという契約を用意することで，各専門家たちに正確な情報を得るための努力を促せることを示した。

しかしながら，これらの研究は 1 つの問題を抱えている。それは，契約の遂行可能性の定義が緩

^{*} 京都大学大学院経済学研究科

[†] 本稿の執筆にあたっては，指導教員の関口格教授より，数多くの有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。

いことである。上に挙げた2つの研究では共通して、ある戦略プロファイルを遂行可能な契約を、「その戦略プロファイルが専門家間のゲームのなかで均衡の1つとなるような契約」と定義した。したがって、ある戦略プロファイルを遂行可能な契約の下で、該当する戦略プロファイル以外の均衡が存在する可能性を排除しておらず、その契約の下でねらいとする戦略プロファイルが実現する論理的な保証がない。

特に問題となるのは、専門家たちが努力する戦略プロファイルを遂行させる契約の下で、より少ない努力水準の均衡が存在し、その均衡が、当初の戦略プロファイルよりも専門家全員にとって望ましい結果になりうるという点である。実際、Azrieli [2021] で導出された契約では、自身も指摘している通り、これが最悪の形で実現している。先ほど紹介した契約の下では、専門家全員が努力することも均衡であることには違いないが、その一方で、一切の努力をせずに全員で口裏を合わせて同じメッセージを送るという戦略プロファイルが強パレート支配均衡となっている。すなわち、Azrieli [2021] が提案する契約の下では、専門家全員にとって、プリンシパルが想定している均衡よりも、一切努力をしない均衡の方が魅力的である。したがって、この契約の下で専門家が実際に努力する可能性は低く、この契約は現実にはそれほど有効ではない。

そこで、本稿では上の意味での専門家間の共謀に耐性のある契約を導出する。すなわち、プリンシパルにとって望ましい戦略プロファイルが、専門家間のゲームで均衡であり、なおかつその均衡がほかの均衡に強パレート支配されないような契約を特徴づける。以下では、本論に入る前に、分析の内容と得られた結果の概要を簡単に紹介しておく。

本研究では、Azrieli [2021] と概ね同様のプリンシパル・エージェントモデルを分析した。このモデルでは、不確実な状況に直面しているプリンシパルが、2人の専門家を雇用し、彼らからのメッセージに依存した報酬契約を提示する。不確実な状況に関するシグナルを受け取れる2人の専門家は、この契約の下で、正確なシグナルを得るための努力水準とプリンシパルへ送るメッセージを戦略とした同時手番ゲームをプレーする。我々のモデルとAzrieli [2021] のモデルの違いは、(1) 専門家の選択できる努力水準が連続ではなく2値、(2) 専門家の人数を n 人から2人に制限、(3) 状態の共通事前分布を一般のものから等確率に制限、という3点である。すなわち、最初の点を除けば、今回のモデルはAzrieli [2021] のモデルの特殊ケースに該当する。また、Azrieli [2021] は論文の後半にプリンシパルの受け取れるメッセージの空間を豊富に用意することで、サボって口裏を合わせる戦略が強パレート支配均衡でなくなる可能性を示唆したが、本研究ではプリンシパルにそのような複雑な契約を作成する能力がないことを仮定している。

加えて、共謀に耐性のある契約を導出するために、強遂行可能性の概念を新たに導入した。強遂行可能性とは、Azrieli [2021] の遂行可能性の条件を強めたもので、具体的には次のように定義する：ある契約 x によって定められたゲームにおいて、戦略プロファイル y が均衡であり、なおかつそのゲームにおいて y を強パレート支配するほかの均衡が存在しないとき、 x は y を強遂行可能であるという。この強遂行可能性を満たす契約の下では、ねらいとする戦略プロファイルは弱パレート最適均衡となっており、彼らがこの均衡を避ける強い理由はない。したがって、この契約は、上で説明したような専門家間の共謀にある程度の耐性を持ち、現実でねらい通り機能する可能性が高い。

この強遂行可能性の定義の下で、2人の専門家から努力を引き出す最適契約は、彼らの間で一致させたいメッセージが分かれるような性質を持つことが分かった。具体的にはこの最適契約は次の

2つの特徴を持つ。第一に、専門家のメッセージが一致したかどうかだけではなく、どのメッセージで一致したかに応じて報酬額を定める。すなわち、あるメッセージで2人の意見が一致した場合には、一方の専門家には比較的大きい報酬を与え、他方の専門家には比較的小さい報酬を与える。反対に、別のメッセージで2人の意見が一致した場合にはこれらの支払い方を逆にする。第二に、メッセージが不一致だとしても、各専門家に報酬を支払う場合がある。

これらの特徴は、全員のメッセージが一致している場合のみ全員に定額の報酬を与えるという、Azrieli [2021] の最適契約にはないものである。特に、2つ目の特徴は、専門家たちから努力するインセンティブを奪いかねないので直感的には不合理に見えるが、彼らが努力した際のシグナルの精度が十分高い場合には、ある契約の下で2人が努力する均衡が弱パレート最適となるために必要な条件である。また、強遂行可能性を課したことによって発生するプリンシパルの支払額の増加割合を計算し、それがおよそ3/2倍程度に収まるケースがあることを示した。

以下の構成は次のようになっている。第Ⅱ節では、モデルをセットアップする。第Ⅲ節では、Azrieli [2021] の遂行可能性の定義の問題点を改めて指摘したうえで、新たに強遂行可能性を定義する。第Ⅳ節では、最適契約を導出する。まず、ベンチマークケースとして、Azrieli [2021] での遂行可能性の定義の下で最適契約を導出し、その後、強遂行可能性の下での最適契約を導出する。第Ⅴ節では、前節で導出された最適契約の特徴をまとめる。

Ⅱ モデル

本節ではモデルを定義する。以下では、環境、契約、戦略、利得の順にモデルを定義し、最後にいくつか記法を導入する。なお、前節でも述べたように、ここでのモデルは、行動空間の違いを除けば Azrieli [2021] のモデルの特殊ケースに該当する。

1人のプリンシパルと2人の専門家（それぞれ専門家1及び2と呼ぶことにする）が共通のくじに直面している状況を考える。このくじにおける結果の集合を $\Omega = \{B, W\}$ とし、事前の段階ではそれぞれが実現する確率は等しいとする。

各専門家 i は努力コストを負い実験ないし調査を行うことによって、シグナルの集合 $\mathfrak{S}_i = \{b, w\}$ から1つのシグナルを私的に観測することができるとする。専門家 i が選択できる努力水準（あるいは調査の精度）の集合を $A_i = \{e^l, e^h\}$ で表し、 $A = A_1 \times A_2$ とする。専門家 i が努力水準 e_i を選んでいるときの努力コストを $c(e_i)$ で表し、 $0 \leq c(e^l) < c(e^h)$ とする。また、 $\Delta c = c(e^h) - c(e^l)$ とする。シグナルが発生する確率分布は専門家の努力水準に依存しているとし、努力水準 $e_i \in A_i$ を選んだ専門家 i が、状態 $\omega \in \Omega$ のときにシグナル $s_i \in \mathfrak{S}_i$ を観測する確率を $P_{e_i}(s_i|\omega)$ で表す。分析を簡単にするため、任意の専門家が観測するシグナルの分布は以下を満たすとする：

$$P_{e^h}(b|B) = P_{e^h}(w|W) = \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad (1)$$

$$P_{e^l}(b|B) = P_{e^l}(w|W) = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

さらに、各専門家が受け取るシグナルはそれぞれ状態に関して条件付独立であるとする。すなわち、状態 $\omega \in \Omega$ の下で2人の専門家が努力水準 $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ を選んでいるとき、彼らがシグナル

$(s_1, s_2) \in \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ を観測する条件付確率 $P_e(s_1, s_2|\omega)$ は、

$$P_e(s_1, s_2|\omega) = P_{e_1}(s_1|\omega)P_{e_2}(s_2|\omega)$$

である。したがって、2人の専門家が努力水準 $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ を選んでいるとき、彼らがシグナル $(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}$ を観測する確率 $P_e(s_1, s_2)$ は、

$$\begin{aligned} P_e(s_1, s_2) &= \frac{1}{2}P_e(s_1, s_2|\mathcal{B}) + \frac{1}{2}P_e(s_1, s_2|\mathcal{W}) \\ &= \frac{1}{2}P_{e_1}(s_1|\mathcal{B})P_{e_2}(s_2|\mathcal{B}) + \frac{1}{2}P_{e_1}(s_1|\mathcal{W})P_{e_2}(s_2|\mathcal{W}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2}P_{e_1}(s_1|\omega)P_{e_2}(s_2|\omega) \end{aligned} \quad (3)$$

である。例えば、2人がともに e^h を選んでいるときに、彼らがシグナル (b, w) を観測する確率 $P_{(e^h, e^h)}(b, w)$ は

$$\begin{aligned} P_{(e^h, e^h)}(b, w) &= \frac{1}{2}P_{e^h}(b|\mathcal{B})P_{e^h}(w|\mathcal{B}) + \frac{1}{2}P_{e^h}(b|\mathcal{W})P_{e^h}(w|\mathcal{W}) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\alpha \\ &= \alpha(1-\alpha) \end{aligned}$$

と計算することができる。

プリンシパル自身はくじに関するシグナルを取得できない一方で、彼女は2人の専門家からメッセージを受け取ることができ、さらに2人の専門家への非負の報酬契約を事前に定められるとする。ただし、報酬を支払う段階ではプリンシパルは実現した状態 $\omega \in \Omega$ の情報は取得できず、専門家からのメッセージのみに依存した契約しか作成できないとする。すなわち、プリンシパルが専門家 i へ提示できる報酬契約 x_i を、専門家1と2から受け取ることのできるメッセージの空間 M_1 と M_2 の直積 M に対し、 $x_i: M \rightarrow \mathbf{R}_+$ と定める。特に、あるプレーヤー i からのメッセージが $m_i \in M_i$ で、他方のプレーヤー j からのメッセージが $m_j \in M_j$ である場合の、彼らの報酬をそれぞれ $x_i(m_i, m_j)$ と $x_j(m_i, m_j)$ で表すことにする。特に誤解がないときは、 $x_i(m_i, m_j)$ とも書く。さらに、ここではプリンシパルは複雑な契約を作成することはできないと仮定し、専門家 i から受け取ることのできるメッセージの空間 M_i を $M_i = \mathfrak{S}_i$ で定義する。また、 $x = (x_1, x_2)$ とする。

プリンシパルが報酬契約 x を決めると、2人の専門家をプレーヤーとした部分ゲームが定まる。このゲームでは、2人の専門家は努力水準とプリンシパルへのメッセージの送り方をそれぞれ同時に決めるとする。専門家 i が送るメッセージの戦略を関数 $r_i: \mathfrak{S}_i \rightarrow M_i$ で定義し¹⁾、この関数の集合を R_i とすると、専門家 i の行動の集合は $Y_i \equiv A_i \times R_i$ である。また、 $Y = Y_1 \times Y_2$ とする。専門家 i は Y_i の要素を確率1で選択する戦略しかプレーできないとする。

次に各プレーヤーの利得を定義する。プレーヤーは全員リスク中立であると仮定する。実現した状態が $\omega \in \Omega$ 、契約が (x_1, x_2) 、各専門家が送ったメッセージが $m \in M$ 、彼らの選択した努力水準が

1) メッセージ戦略 r_i の定義域を $A_i \times \mathfrak{S}_i$ とする方法も考えられるが、ここでは Azrieli [2021] のモデルにおけるメッセージ戦略の定義を採用し、 r_i の定義域をあらかじめ $\mathfrak{S}_i$ に制限している。

(e_1, e_2) であったときの専門家 i の事後の利得 u_i を

$$u_i(m, e_i; x_i) = x_i(m) - c(e_i)$$

で定める。ここで、 u_i は ω に依存しないことに注意せよ。ゆえに、契約が $x = (x_1, x_2)$ 、専門家の戦略プロファイルが $(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = ((e_1, e_2), (r_1, r_2))$ であったときの専門家 i の事前期待利得 Eu_i は、

$$Eu_i(\mathbf{e}, \mathbf{r}; x) = E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[x_i(m)] - c(e_i)$$

である。ただし、 $E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[\cdot]$ は専門家の戦略プロファイルが $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ の下での $\omega \in \Omega$ と $s \in \mathfrak{S}$ に関する期待値である。特に $E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[x_i(m)]$ は、プリンシパルから専門家 i へ支払われる期待報酬額であり、

$$\begin{aligned} E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[x_i(m)] &= \sum_{(s_i, s_j) \in \mathfrak{S}} P_{\mathbf{e}}(s_i, s_j) x_i(r_i(s_i), r_j(s_j)) \\ &= \sum_{(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} P_{e_i}(s_i|\omega) P_{e_j}(s_j|\omega) x_i(r_i(s_i), r_j(s_j)) \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、最後の等式は (3) 式より成立する。

プリンシパルは各専門家のメッセージが m であった時に、 $x_1(m) + x_2(m)$ を支払う。したがって、契約が $x = (x_1, x_2)$ 、専門家の戦略プロファイルが $(\mathbf{e}, \mathbf{r}) = ((e_1, e_2), (r_1, r_2))$ であったときのプリンシパルの期待支払額は、

$$\begin{aligned} E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[x_1(m) + x_2(m)] &= \sum_{i=1}^2 \sum_{(s_i, s_j) \in \mathfrak{S}} P_{\mathbf{e}}(s_i, s_j) x_i(r_i(s_i), r_j(s_j)) \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} P_{e_1}(s_1|\omega) P_{e_2}(s_2|\omega) x_i(r_i(s_i), r_j(s_j)) \end{aligned}$$

である。

次に、プリンシパルの目的の背景を説明する。ここではプリンシパルが情報を受け取った後に、 $\omega \in \Omega$ に依存して収益が定まる何らかの意思決定を行うと仮定する。さらに、 ω について正確な情報が得られれば、賢い選択を行うことができるので、この意思決定からの収益が上昇すると仮定する。よって、彼女は専門家たちから正確性の高い情報を受け取るインセンティブを持つ。

さらに、ここでは、2 人の専門家がともに e^k を選択し、さらに真実申告をするような戦略プロファイルの実現が、他の戦略プロファイルの実現と比べて、プリンシパルの次の意思決定において十分有益な情報をもたらすと仮定する。したがって、本稿におけるプリンシパルの目的は、2 人の専門家に、努力をしたうえで真実申告をする戦略プロファイルを選択させつつ、そのときの 2 人への期待報酬額 $E_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})}[x_1(m) + x_2(m)]$ を最小にすることである。

最後にいくつか記法を導入する。2 人の専門家が同じ努力水準 e^k を選ぶ努力水準のプロファイル (e^k, e^k) を $\mathbf{e}^k$ で表す。メッセージ戦略 r_i^T, r_i^F, r_i^t (ただし $t \in M_i$) をそれぞれ次のように定義する：

- r_i^T は任意の $s_i \in \mathfrak{S}_i$ に対し $r_i^T(s_i) = s_i$ を満たす。
- r_i^F は $r_i^F(b) = w$ かつ $r_i^F(w) = b$ を満たす。
- r_i^t は任意の $s_i \in \mathfrak{S}_i$ に対し $r_i^t(s_i) = t$ を満たす。

すなわち, r_i^T は観測したシグナルを正直に申告するメッセージ戦略, r_i^F は観測したシグナルと逆の申告をするメッセージ戦略, ある t に対し r_i^t は, 観測したシグナルに関わらず常に t を申告するメッセージ戦略である。2 人がともに同じメッセージ戦略 r_i^T, r_i^F, r_i^t を選ぶメッセージ戦略プロファイルをそれぞれ $\mathbf{r}^T, \mathbf{r}^F, \mathbf{r}^t$ で表す。

Ⅲ 強遂行可能性

本節では, 本稿と Azrieli [2021] との最大の相違点である契約の遂行可能性について定義する。以下では, Azrieli [2021] の遂行可能性の定義の問題点を改めて指摘したうえで, この定義にパレート効率性の基準を付加した強遂行可能性を新たに定義する。

まず, Azrieli [2021] における遂行可能性の定義は次のものである。

定義 1. 契約 x によって定められる 2 人の専門家の同時手番ゲームにおいて, ある戦略プロファイル $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ が均衡となると, x は $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ を遂行可能であるという。

仮に, この意味で $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ を遂行可能な任意の契約において, 専門家間のゲームの均衡が $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ で一意ならば, この定義に大きな問題はない。しかし, Azrieli [2021] でも指摘されているように, この遂行可能性の定義の下で導出される最適契約では, その専門家間のゲームに $(\mathbf{e}, \mathbf{r})$ 以外の均衡が一般に存在する。実際に今回考えているモデルにおいても次の補題が示せる。

補題 1. ある契約 x において戦略プロファイル $(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T)$ から任意のプレーヤー i が (e^l, r_i^b) および (e^l, r_i^w) へ逸脱するインセンティブがなければ, 以下が成り立つ。

1. 任意の i に対し $x_i(bb) > x_i(wb)$ かつ $x_i(ww) > x_i(bw)$ が成立する。
2. 任意の $t \in M$ に対し $(\mathbf{e}^l, \mathbf{r}^t)$ も均衡である。
3. 任意の i に対し

$$\max_{(\mathbf{e}, \mathbf{r})} Eu_i(\mathbf{e}, \mathbf{r}; x) = \max \{Eu_i(\mathbf{e}^l, \mathbf{r}^b; x), Eu_i(\mathbf{e}^l, \mathbf{r}^w; x)\} > Eu_i(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T; x)$$

が成立する。

証明. 最初に, ある契約 x において戦略プロファイル $(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T)$ から任意の専門家 i が (e^l, r_i^b) および (e^l, r_i^w) へ逸脱しないための条件を導出する。まず, 専門家 i が e^h を選んでいるとき, (1) 式より彼が正確なシグナルを得る確率が α で, 誤ったシグナルを得る確率が $1 - \alpha$ である。さらに, 任意の i, j と任意の (s_i, s_j) に対し, $x_i(r^T(s_i), r_j^T(s_j)) = x_i(s_i, s_j)$ となることに注意すると, $(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T)$ がプレーされているときの専門家 i の期待報酬額 $E_{(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T)}[x_i(m)]$ は,

$$\begin{aligned} E_{(\mathbf{e}^h, \mathbf{r}^T)}[x_i(m)] &= \sum_{(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} P_e(s_i|\omega) P_e(s_j|\omega) x_i(s_i, s_j) \\ &= \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_i(bb) + \alpha(1 - \alpha) x_i(bw) + \alpha(1 - \alpha) x_i(wb) \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_i(ww) \end{aligned} \tag{4}$$

であることがわかる。さらに、このときの専門家 i の努力コストは $c(e^h)$ なので、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ がプレーされているときの専門家 i の期待利得は、

$$\frac{1}{2}\{\alpha^2 + (1-\alpha)^2\}x_i(bb) + \alpha(1-\alpha)x_i(bw) + \alpha(1-\alpha)x_i(wb) + \frac{1}{2}\{\alpha^2 + (1-\alpha)^2\}x_i(ww) - c(e^h) \quad (5)$$

である。次に、専門家 i だけがこの戦略プロファイルから $(e^l, \mathbf{r}_i^b)$ へ逸脱した場合の彼の利得を計算する。任意の i と $s_i \in \mathfrak{S}_i$ と $\omega \in \Omega$ に対し、 $P_{e^l}(s_i|\omega) = 1/2$ なので、

$$P'(s_i, s_j) \equiv P_{(e^l, e^h)}(s_i, s_j) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{2} P_{e^l}(s_i|\omega) P_{e^h}(s_j|\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{4} P_{e^h}(s_j|\omega) = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}(1-\alpha) = \frac{1}{4}$$

が成立する。さらに、任意の i, j と任意の (s_i, s_j) に対し、 $x_i(\mathbf{r}^b(s_i), \mathbf{r}_j^T(s_j)) = x_i(b, s_j)$ となることに注意すると、専門家 i のみが $(e^l, \mathbf{r}_i^b)$ へ逸脱した場合の彼の期待報酬額 $E_{((e^l, e^h), (\mathbf{r}_i^b, \mathbf{r}_j^T))}[x_i(m)]$ は

$$\begin{aligned} E_{((e^l, e^h), (\mathbf{r}_i^b, \mathbf{r}_j^T))}[x_i(m)] &= \sum_{(s_1, s_2) \in \mathfrak{S}} P_{(e^l, e^h)}(s_i, s_j) x_i(\mathbf{r}^b(s_i), \mathbf{r}_j(s_j)) \\ &= P'(b, b)x_i(bb) + P'(b, w)x_i(bw) + P'(w, b)x_i(bb) + P'(w, w)x_i(bw) \\ &= \frac{1}{2}x_i(bb) + \frac{1}{2}x_i(bw) \end{aligned}$$

であることがわかる。ゆえに、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ から専門家 i のみが $(e^l, \mathbf{r}_i^b)$ へ逸脱した時の彼の利得は

$$\frac{1}{2}x_i(bb) + \frac{1}{2}x_i(bw) - c(e^l) \quad (6)$$

である。したがって、(5) 式および (6) 式より、ある契約 x において戦略プロファイル $(e^h, \mathbf{r}^T)$ から任意の専門家 i が $(e^l, \mathbf{r}_i^b)$ へ逸脱しないための条件は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\{\alpha^2 + (1-\alpha)^2\}x_i(bb) + \alpha(1-\alpha)x_i(bw) + (1-\alpha)\alpha x_i(wb) + \frac{1}{2}\{\alpha^2 + (1-\alpha)^2\}x_i(ww) - c(e^h) \\ &\geq \frac{1}{2}x_i(bb) + \frac{1}{2}x_i(bw) - c(e^l) \end{aligned}$$

であり、これを整理すると、

$$\frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2} \{x_i(ww) - x_i(bw)\} - \alpha(1-\alpha) \{x_i(bb) - x_i(wb)\} \geq \Delta c \quad (7)$$

を得る。同様に計算すると、ある契約 x において戦略プロファイル $(e^h, \mathbf{r}^T)$ から任意の専門家 i が $(e^l, \mathbf{r}_i^w)$ へと逸脱しないための条件は

$$\frac{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2} \{x_i(bb) - x_i(wb)\} - \alpha(1-\alpha) \{x_i(ww) - x_i(bw)\} \geq \Delta c \quad (8)$$

であることがわかる。

次に、(7) 式および (8) 式が成立していれば、主張 1 が成立することを示す。(7) 式を $\alpha(1-\alpha)$ 倍し、(8) 式を $(2\alpha^2 - 2\alpha + 1)/2$ 倍して、これらの不等式の辺々を足して整理すれば、

$$x_i(bb) - x_i(wb) \geq \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2}$$

を得る。右辺は厳密に正なので、 $x_i(bb) > x_i(wb)$ である。同様に、 $x_i(ww) > x_i(bw)$ も示すことができる。

次に、主張3を示す。このゲームにおいて、ある専門家 i が負いうるコストの最小値が $c(e^l)$ であり、主張1より受け取りうる報酬額の最大値が $\max\{x_i(bb), x_i(ww)\}$ である。ところで、 (e^l, r^l) がプレーされているときのある専門家 i の利得は $x_i(tt) - c(e^l)$ であるから、 (e^l, r^w) か (e^l, r^b) の少なくともどちらかが専門家 i にこのゲームにおける最大利得を与える戦略プロファイルである。したがって、主張3の最初の等式が成立する。加えて、 (e^h, r^T) がプレーされているときには各専門家 i は少なくともコスト $c(e^h)$ を負うことになるので、この均衡利得が最大利得よりも厳密に小さいこともわかる。

最後に主張2を示す。 (e^l, r^w) がプレーされているときのある専門家 i の利得は $x_i(ww) - c(e^l)$ である。このとき、専門家 i だけが別の戦略に逸脱したとすると、受け取る報酬の期待値は $x_i(ww)$ と $x_i(bw)$ の凸結合になるが、主張1より、これは $x_i(ww)$ より小さい。さらに、努力コストも $c(e^l)$ 以上であるから、任意の専門家 i は (e^l, r^w) から逸脱しても、利得を増やすことができない。したがって、 (e^l, r^w) は均衡である。 (e^l, r^b) が均衡であることも同様に示すことができる。■

ある契約 x において (e^h, r^T) から任意の専門家 i が (e^l, r_i^w) および (e^l, r_i^b) へ逸脱するインセンティブがないということは、 x において (e^h, r^T) が均衡となるための必要条件である。ゆえに、契約 x のもとで (e^h, r^T) が均衡である限り、上の補題は常に成立する。

比較的正确な情報を得る（すなわち e^h を選ぶ）インセンティブを各プレーヤーに与えるためには、2人の意見が一致した場合にある程度大きな報酬を支払う必要がある。ところが、意見が一致した時の報酬を大きくすると、 e^l を選んでシグナルにかかわらず2人で同じ報告をするという戦略が専門家達にとって魅力的となり、これらの戦略プロファイルが常に均衡となってしまう。さらに、各専門家に対して、これらの戦略プロファイルのどちらかが、このゲームにおける最大利得を与える。したがって、杜撰な契約を提示すれば、ある t に対し (e^l, r^t) が、2人ともにこのゲームの最大利得を与える均衡戦略プロファイルになりかねない。実際、次節で詳しく見るように、Azrieli [2021] と同じく本稿のモデルでも、上の遂行可能性の定義から導出された最適契約のもとでは、均衡 (e^h, r^T) は、任意の t について均衡 (e^l, r^t) に強パレート支配されている。

以上のことから、ある契約の下で高い努力水準を含む戦略プロファイルが均衡であるということだけでは、現実にこの戦略プロファイルが実現するための条件としては不十分であることがわかる。そこで、本研究では、 (e^h, r^T) をよりもっともらしい均衡とするために、上の遂行可能性の定義にパレート効率性の基準を課したより強い意味での遂行可能性を定義する。

定義2. 契約 x によって定められる2人の専門家の同時手番ゲームにおいて、戦略プロファイル (e, r) が均衡であり、なおかつそのゲームにおいて (e, r) を強パレート支配するほかの均衡が存在しないとき、 x は (e, r) を強遂行可能であるという。

x が (e, r) を強遂行可能であるためには、 x の下で (e, r) が均衡であることに加えて、この戦略プロファイルが x の下でのすべての均衡のなかで弱パレート最適であることを要請している。以下では、ここで定義した強遂行可能性と対比する意味で、Azrieli [2021] で定義された遂行可能性を弱遂

行可能性と呼ぶことにする。

Ⅳ 最適契約

本節では、2つの分析を行う。第1副節では、ベンチマークケースとして、Azrieli [2021] の遂行可能性の定義、すなわち弱遂行可能性の下での最適契約を導出する。続く第2副節では、強遂行可能性の定義の下での最適契約を導出する。

1 弱遂行可能性の下での最適契約

この節では、ベンチマークとして、 (e^h, r^T) が弱遂行可能となるような契約のうち、プリンシパルの期待支払額が最小となるものを導出する。戦略プロファイル (e^h, r^T) を弱遂行可能な契約の集合を D で書くことにすれば、解くべき問題は、

$$\min_{x \in D} \sum_{i=1}^2 \left[\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \right) \{x_i(bb) + x_i(ww)\} + \alpha(1 - \alpha) \{x_i(bw) + x_i(wb)\} \right]$$

である。目的関数は (e^h, r^T) が実現した時のプリンシパルの期待支払額であり、これは (4) 式より得られる。以下では、この問題を弱遂行最適契約問題と呼び、この問題の解を弱遂行最適契約と呼ぶことにする。

まず、検討すべき戦略の数を減らすために、次の補題を導入する。

補題 2. 任意の契約 x によって定められるゲームにおいて、以下が成立する：

1. 任意の i と $t \in M_i$ に対し、戦略 (e^h, r_i^t) は戦略 (e^l, r_i^t) に強く支配される。
2. 任意の i と j と $(e_j, r_j) \in Y_j$ に対し、

$$\begin{aligned} Eu_i((e^l, e_j), (r_i^F, r_j)) &= Eu_i((e^l, e_j), (r_i^T, r_j)) \\ Eu_j((e^l, e_j), (r_i^F, r_j)) &= Eu_j((e^l, e_j), (r_i^T, r_j)) \end{aligned}$$

が成立する。

証明. 任意の t に対し、ある専門家 i がメッセージ戦略 r_i^t をプレーしているとき、彼の期待報酬額は自身の努力水準 e_i に依存しない。一方で、 $c(e^l) < c(e^h)$ なので、1 の主張がいえる。

また、ある専門家が e^l を選んでいるとき、彼が各シグナルを観測する確率は等確率である。ゆえに、ある専門家 j の戦略を任意に固定すれば、ある専門家 i が (e^l, r_i^F) を選んでいるときと (e^l, r_i^T) を選んでいるときのメッセージペアの実現確率は等しい。したがって、主張 2 の等式が成立する。■

補題 2 より、最適契約を求めるうえで、任意の専門家 i の戦略の集合 Y_i から (e^h, r_i^t) と (e^l, r_i^F) を排除しても一般性は失われないことがわかる。したがって、以下では、任意の専門家 i に対し Y_i^* を

$$Y_i^* = \{(e^h, r_i^T), (e^h, r_i^F), (e^l, r_i^T), (e^l, r_i^b), (e^l, r_i^w)\}$$

で定義し、 Y_i ではなく、 Y_i^* を戦略の集合だと想定して分析を進める。

戦略の集合を Y_i^* と想定することでいくらか戦略の個数は減るものの、それでもなお (e^h, r^T) から逸脱可能な戦略の数は多い。それゆえ弱遂行可能となる契約が満たすべき条件は煩雑なものになりそうに見えるが、実際には、以下の命題が示すように、 $x \in D$ は簡単な不等式条件で表すことができる。なお、以降の命題の証明はすべて付録にまとめて記載する。

命題 1. $x \in D$ であることと、 x が任意の i に対し、(7)、(8) 式と $x_i(m) \geq 0$ を満たすことは同値である。

(7) 式と (8) 式は、 (e^h, r^T) から専門家 i だけが戦略を (e^l, r_i^l) に逸脱しても利得が増えないことを意味しており、これは契約 x の下で (e^h, r^T) が均衡となるための必要条件であった。命題 1 は、任意の i と t に対し (e^l, r_i^l) への逸脱を防ぐ契約の下では、任意の専門家 i は他の戦略へ逸脱するインセンティブも持たず、したがって (e^h, r^T) が均衡となることを示している。命題 1 より、弱遂行最適契約問題の制約条件を不等式条件で書き下すことができるため、これを解くと、次の命題を得る。

命題 2. 弱遂行最適契約は次の $x^W = (x_1^W, x_2^W)$ で一意である：任意の i に対し、

$$x_i^W(bb) = x_i^W(ww) = \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2},$$

$$x_i^W(wb) = x_i^W(bw) = 0.$$

Azrieli [2021] のモデルと本稿のモデルには行動空間の違いはあるものの、弱遂行可能性の下で導出される最適契約の特徴は概ね同じである。ただし、Azrieli [2021] で導出された最適契約では、一意性の保証はないが、今回のモデルでは、最適契約は x^W で一意である。この最適契約では、各専門家への報酬額は彼らのメッセージが一致したかどうかのみに依存し、一致した場合の報酬額は、努力コストの差に関して増加し、正確なシグナルを得る確率 α に関して減少する。

また、補題 1 の 2 より、契約 x^W の下では任意の t に関し (e^l, r^t) も均衡である。さらに任意の i に対し、 $Eu_i(e^l, r^b; x^W) = Eu_i(e^l, r^w; x^W)$ が成立するので、補題 1 の 3 より、任意の t に関し (e^l, r^t) は、2 人の専門家にとって強パレート最適均衡である。したがって、前節で述べたように、彼らが複数均衡のうち自分たちにとって一番都合の良い均衡を選ぶのであれば、契約 x^W のもとで (e^h, r^T) は実現しない。さらにこの最適契約は一意であるので、今考えている環境では、プリンシパルの期待支払額を x^W のときのものと等しくしたまま、 (e^h, r^T) が強パレート支配されないような契約を作成することは不可能である。

2 強遂行可能性の下での最適契約

この節では、 (e^h, r^T) が強遂行可能となるような契約のうちプリンシパルの支払額が最小になるものを導出する。目的関数は前節と変わらないので、戦略プロファイル (e^h, r^T) を強遂行可能な契

約の集合を D^* で書くことにすれば、解くべき問題は、

$$\min \sum_{i=1}^2 \left[\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \right) \{x_i(bb) + x_i(ww)\} + \alpha(1 - \alpha) \{x_i(bw) + x_i(wb)\} \right]$$

$$x \in D^*$$

である。以下では、この問題を強遂行最適契約問題と呼び、この問題の解を強遂行最適契約と呼ぶことにする。補題 2 より、一般性を失うことなく、任意の専門家 i の戦略の集合を Y_i^* とする。前節と同様に、 $x \in D^*$ と同値な不等式条件を導出すると、次の命題を得る。

命題 3. $x \in D^*$ であることと x が以下の条件をすべて満たすことは同値である：

- 任意の i に対し、(7)，(8) 式と $x_i(m) \geq 0$ が成立する。
- ある i に対し、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_i(bb) + \alpha(1 - \alpha) x_i(bw) + \alpha(1 - \alpha) x_i(wb) + \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_i(ww) - c(e^h) \\ & \geq x_i(bb) - c(e^l) \end{aligned} \quad (9)$$

が成立し、ある $j \neq i$ に対し、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_j(bb) + \alpha(1 - \alpha) x_j(bw) + \alpha(1 - \alpha) x_j(wb) + \frac{1}{2} \{ \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 \} x_j(ww) - c(e^h) \\ & \geq x_j(ww) - c(e^l) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立する。

同値条件の最初の項目は、命題 1 のものと同じであり、これらは $(e^h, \mathbf{r}^T)$ が均衡となるための必要十分条件であった。(9) 式と (10) 式は、左辺は $(e^h, \mathbf{r}^T)$ がプレーされた時の専門家 i と j それぞれの利得であり、右辺はそれぞれ $(e^l, \mathbf{r}^b)$ がプレーされた時の専門家 i の利得と、 $(e^l, \mathbf{r}^w)$ がプレーされた時の専門家 j の利得である。補題 1 の 2 より、任意の t に対し $(e^l, \mathbf{r}^t)$ は均衡となるので、強遂行可能性の定義より、これらが強パレート最適となるのを防がなければならない。すなわち、これらの各均衡について、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ をそれより弱く好む専門家が存在しなければならない。しかし、同じ専門家が $(e^h, \mathbf{r}^T)$ を各均衡より弱く好むと、補題 1 の 3 に矛盾する。よって、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ を $(e^l, \mathbf{r}^b)$ よりも弱く好む専門家と、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ を $(e^l, \mathbf{r}^b)$ よりも弱く好む専門家は別人でなければならない。このことを要請するのが (9) 式と (10) 式である。

以上の議論より、これらの不等式条件が $x \in D^*$ となるための必要条件であることは明らかであるが、命題 3 はこれらの条件が十分条件でもあることを主張している。したがって、強遂行最適契約問題の制約条件 $x \in D^*$ をこれらの不等式条件に書き換えてよく、その問題を解くと次の命題を得る。なお、この契約の特徴については次節で整理する。

命題 4. 強遂行最適契約の 1 つは、次の $x^S = (x_1^S, x_2^S)$ である：ある i に対しては、

$$\begin{aligned} x_i^S(ww) &= \frac{4\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \\ x_i^S(bb) &= x_i^S(bw) = \frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \\ x_i^S(wb) &= 0 \end{aligned}$$

であり、他方の $j \neq i$ に対しては、

$$\begin{aligned} x_j^S(bb) &= \frac{4\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \\ x_j^S(ww) &= x_j^S(bw) = \frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \\ x_j^S(wb) &= 0 \end{aligned}$$

である。

V 強遂行最適契約の特徴

本節では、弱遂行最適契約との比較を通して、強遂行最適契約の性質をまとめる。強遂行最適契約は表 1 のようにまとめることができる。表 1 は、専門家のメッセージペアと報酬額の対応を示している。各セルの 1 つ目の要素が、そのメッセージペアが実現した時の専門家 i への報酬額であり、2 つ目の要素がそのメッセージペアが実現した時の専門家 j への報酬額である。

表 1 強遂行最適契約

		j	
		w	b
i	w	$\frac{4\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}$	$0, 0$
	b	$\frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}$	$\frac{2\Delta c}{(2\alpha-1)^2}, \frac{4\Delta c}{(2\alpha-1)^2}$

強遂行最適契約の最も重要なアイデアは、 (e^h, r^T) が (e^l, r^b) ないし (e^l, r^w) に強パレート支配されないように、彼らの間で一致させたいメッセージが分かれるように調整するというものである。そのため、それぞれの専門家に異なった契約を用意する必要があり、さらに、それぞれの契約は次のような特徴を持つ。

1 各専門家への報酬額が一致したメッセージの内容に応じて変わる

弱遂行最適契約問題と強遂行最適契約問題のいずれの状況でも、各専門家から高い努力水準と真実申告を引き出すために、2 人の意見が一致した際に正の報酬を与える必要がある。弱遂行最適契約問題ではこの事情だけを考慮すればよかったので、報酬額はメッセージが一致しているかどうかのみに依存させればよい。しかし、補題 1 の 2 と 3 で示したように、メッセージが (b, b) で一致した時と (w, w) で一致した時の報酬額が等しければ、すべての t に対し (e^l, r^t) が 2 人の専門家に最

大利得を与える均衡となってしまう。したがって、このような契約は強遂行最適契約問題では通用しない。

そこで、強遂行最適契約では、メッセージが一致したかどうかのみではなく、どのメッセージで一致したかに応じて報酬額を変える。具体的には、メッセージが (w, w) で一致した場合には、一方の専門家 i には比較的大きな報酬額を支払うが、他方の専門家 j には比較的小さな報酬額しか支払わず、反対にメッセージが (b, b) で一致した場合には、報酬の支払い方を逆にする。この契約の下では、専門家 i は (e^l, r^w) が実現すれば、弱遂行最適契約で実現する最大利得以上の期待利得を得られるが、この均衡は専門家 j にとってはそれほどありがたくない。このように、2 人の専門家のメッセージの好みを分けることによって、利害が対立する構造を作り、 (e^l, r^b) および (e^h, r^w) が強パレート支配均衡となることを防いでいる。

2 メッセージが一致しなくとも報酬を支払う場合がある

第 1 副節で議論したように、各専門家 i について $x_i(ww)$ と $x_i(bb)$ の金額に差をつけなければいけない。しかし、例えば $x_i(ww)$ の値を $x_i(bb)$ と比べて十分大きくしたとすると、専門家 j が (e^h, r_j^T) を選んでいるときの専門家 i の最適反応戦略が (e^l, r_i^w) で一意になりかねない。これでは、 (e^h, r^T) がナッシュ均衡とならないので、この逸脱のインセンティブを奪う必要がある。

この問題に対応するために、強遂行最適契約では、 $x_i^S(bw)$ と $x_j^S(bw)$ で正の報酬を与えている。例えば、 $x_i^S(bw)$ は、 (e^h, r^T) が実現していれば正の確率で得られる報酬だが、専門家 i だけが (e^l, r_i^w) へ逸脱すれば、メッセージプロファイル (b, w) は決して実現せず、代わりに $x_i^S(bw) = 0$ の実現確率が上がる。したがって、 $x_i^S(bw)$ の値が正であるおかげで、専門家 i が (e^h, r^T) から (e^l, r_i^w) へ逸脱することを防いでいる。さらに、 $x_i^S(bw)$ は均衡 (e^l, r^w) でも実現しない報酬額なので、 (e^h, r^T) が弱パレート最適均衡となるための一助にもなっている。

最後に、弱遂行最適契約と強遂行最適契約のプリンシパルの期待支払額についてまとめる。それぞれの最適契約を目的関数に代入すると、次の系を得る。

系 1. 弱遂行最適契約におけるプリンシパルの期待支払額は、

$$\sum_{i=1}^2 E_{(e^h, r^T)} [x_i^W(m)] = \frac{8\alpha^2 - 8\alpha + 4}{(2\alpha - 1)^2} \Delta c = \left\{ 2 + \frac{2}{(2\alpha - 1)^2} \right\} \Delta c$$

であり、強遂行最適契約におけるプリンシパルの期待支払額は、

$$\sum_{i=1}^2 E_{(e^h, r^T)} [x_i^S(m)] = \frac{8\alpha^2 - 8\alpha + 6}{(2\alpha - 1)^2} \Delta c = \left\{ 2 + \frac{4}{(2\alpha - 1)^2} \right\} \Delta c$$

である。また、これらの期待支払額の比は、

$$\frac{E_{(e^h, r^T)} [x^S(m)]}{E_{(e^h, r^T)} [x^W(m)]} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha(1 - \alpha)}{\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}}$$

である。

弱遂行最適契約問題よりも強遂行最適契約問題のほうが厳しい条件の下での最適化問題なので、後者のほうがプリンシパルの期待支払額も大きくなるのは当然である。系の最後の方程式が示すよ

うに、その増加割合は (e^h, r^T) が実現しているときにメッセージが一致する確率と一致しない確率の比によって定まる。 (e^h, r^T) の下で、2人のメッセージが一致する確率の増加、すなわち α の増加に応じて、期待支払額の比は小さくなる。したがって、この割合は、 $\alpha \approx 1/2$ のとき最大値 2 をとり、 $\alpha \approx 1$ のとき最小値 $3/2$ をとる。

VI 結論

本稿では、Azrieli [2021] の遂行概念の課題を上げ、それを克服する新たな遂行概念を導出した。この遂行概念の下で導出された最適契約では、先行研究の最適契約とは異なり、ねらいとする戦略プロファイルが弱パレート最適均衡となる。また、この契約では、2人の専門家間で一致させたいメッセージを分かれさせる必要があり、(1) 各専門家への報酬額が一致したメッセージの内容に応じて変わる、(2) メッセージが不一致でも各専門家に報酬を支払う場合がある、という特徴を持つことが分かった。

最後に、本研究の今後の課題を2点挙げる。1点目は、さらなる一般化モデルでの最適契約の導出である。本研究のモデルは、Azrieli [2021] のモデルと比較して、専門家の人数と事前の分布においてやや制限がある。また、行動空間も2値しか用意していない。これらの制限を外した一般的なモデルにおいて、強遂行可能性を満たす最適契約がどのような特徴を持つのかは自明ではなく、導出する価値があると思われる。

2点目は、より強い遂行可能性の下での最適契約の導出である。本稿で導出した強遂行最適契約は、専門家間で金銭のやり取りがあるような共謀には対抗できない。実際、専門家 i が (e^l, r^w) で受け取る報酬のうちいくらかを他方の専門家 j に渡すことが可能であれば、 (e^l, r^w) が強パレート最適均衡となってしまう。このような金銭的なやり取りを伴う共謀が起こる可能性は十分に考えられるので、この意味での共謀に耐性のある契約を導出することは重要だろう。

一方で、今回考えたモデルでは、補題1の3より、この意味での共謀を防ぐような契約は存在しない。ゆえに、この環境で上記の共謀を防ぐためには、報酬契約の内容ではなく、外生的な仕組みによって彼らの金銭的なやり取りを防ぐ必要がある。例えば、このような金銭のやり取りは法律では強制されず、信頼関係のある人物の間でしか行われ不得という点に注目し、あえて違う地方から2人の専門家を雇用するという方法が考えられる。また、雇用する専門家の人数やねらいとする均衡を変更すれば、この意味での共謀に耐性のある契約を作成できる可能性もある。したがって、専門家間の金銭的なやり取りに耐性のある契約が作成できる条件と、その契約を特徴づけることが今後の課題である。

付録

付録1. 命題1の証明

命題の不等式条件が、 $x \in D$ の必要条件となることは明らかである。ゆえに、以下では十分性を示すために、不等式条件さえ満たしていれば、 (e^h, r^T) が均衡であることを示す。(7) 式および (8) 式から、任意の専門家 i が (e^l, r_i^b) および (e^l, r_i^w) へ逸脱しないことは明らかである。

次に、これらの不等式条件が成立していれば、任意の専門家 i が戦略 (e^h, r_i^f) に逸脱するインセ

ンティブを持たないことを示す。他方の専門家 j が (e^h, r_j^T) を選択していることを所与として、専門家 i が戦略 (e^h, r_i^T) から (e^h, r_i^F) に選びなおせば、当初の戦略と比べて $x_i(bb)$ と $x_i(ww)$ が実現する確率が下がり、 $x_i(bw)$ と $x_i(wb)$ が実現する確率が上がる。しかし、補題 1 の 1 より、これは彼の期待報酬額が減ることを意味する。したがって、(7) 式と (8) 式のもとでは任意の専門家 i が戦略を (e^h, r_i^F) に逸脱するインセンティブを持たない。

最後に、不等式条件のもとでは任意の専門家 i が戦略 (e^l, r_i^T) に逸脱しないことを示す。任意の専門家 i のみが戦略 (e^l, r_i^T) を選びなおすと、彼の利得は

$$Eu_i((e^l, e^h), \mathbf{r}^T; x) = \frac{1}{4} \{x_i(bb) + x_i(wb) + x_i(ww) + x_i(bw)\} - c(e^l)$$

である。ゆえに、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ から専門家 i が (e^l, r_i^T) へ逸脱しないための条件は

$$Eu_i(e^h, \mathbf{r}^T; x) - Eu_i((e^l, e^h), \mathbf{r}^T; x) = \frac{(2\alpha - 1)^2}{4} \{x_i(bb) - x_i(wb) + x_i(ww) - x_i(bw)\} - \Delta c \geq 0$$

であるが、最後の不等式は (7) 式と (8) 式を加えることで得られるので、この条件は常に成立する。ゆえに、任意の専門家 i は (e^h, r_i^F) に逸脱するインセンティブを持たないこともわかる。以上より、不等式条件がすべて満たされていれば、 $(e^h, \mathbf{r}^T)$ は均衡である。

付録 2. 命題 2 の証明

補題 1 の証明で示したように、(7) 式および (8) 式より、任意の i に対し、

$$x_i(bb) - x_i(wb) \geq \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2} \quad (11)$$

$$x_i(ww) - x_i(bw) \geq \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2} \quad (12)$$

が得られる。これは、契約 x が (7) 式および (8) 式を満たすための必要条件である。そこで、(7) 式と (8) 式の代わりに、(11) 式と (12) 式を満たす契約のうち目的関数を最小にするものを導出し、なおかつそれが (7)、(8) 式を満たすことを示す。まず、仮にある i について $x_i(wb) > 0$ を満たす契約が最適だとすると、 $x_i(wb) = 0$ とすることで、制約式を満たしたまま目的関数の値を下げるので、矛盾である。したがって、任意の i に対し $x_i^W(wb) = 0$ である。同様に、任意の i に対し $x_i^W(bw) = 0$ も示せる。次に、仮にある i について (11)、(12) 式の少なくともいずれか一方を強不等式で満たすような契約が最適であるとする、やはり $x_i(bb)$ ないし $x_i(ww)$ をバインドするまで減らすことで、制約式を満たしたまま目的関数の値を下げるので、矛盾である。ゆえに、

$$x_i^W(bb) = \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2}$$

$$x_i^W(ww) = \frac{2\Delta c}{(2\alpha - 1)^2}$$

である。さらに、これらの $x_i^W(m)$ は元の制約式 (7) と (8) も満たす。したがって、この契約が最適契約であり、また、それ以外の最適契約は存在しない。

付録 3. 命題 3 の証明

これらの不等式条件が $x \in D^*$ の必要条件であることは本論にてすでに証明した。また、命題 1 より、命題 3 の最初の項目が成立することと契約 x のもとで (e^h, r^T) が均衡となることは同値である。したがって、以下では、命題 3 の不等式条件が成立していれば、 (e^h, r^T) が弱パレート最適となることを示す。

まず、 (e^h, r_i^T) を 1 つでも含む任意の戦略プロファイルは (e^h, r^T) を強パレート支配することはない。というのも、命題 1 より (e^h, r^T) は均衡であるから、少なくとも 1 人の専門家が (e^h, r_i^T) を選んでいる限り、もう一方の専門家の利得は高々 (e^h, r^T) がプレーされているときのものと等しいからである。

さらに、任意の t に対し (e^l, r_i^t) を 1 つでも含む任意の戦略プロファイルも (e^h, r^T) を強パレート支配することはない。補題 1 の 2 で示したように、あるプレーヤーが (e^l, r_i^t) をプレーしているときの他方のプレーヤーの最適反応は (e^l, r_i^t) で一意であり、 (e^l, r_i^t) を含む均衡戦略プロファイルは (e^l, r^t) のみである。(11) 式と (12) 式でこれらの均衡が (e^h, r^T) を強パレート支配しないことを保証しているので、上の主張が成立する。

したがって残るは (e^l, r_i^T) と (e^h, r_i^F) のみからなる戦略プロファイルである。ある専門家 i が戦略 (e^l, r_i^T) を選択しているとき、他方のプレーヤー j の最適反応戦略が e^h を含むことはない。というのも、専門家 j の任意の努力水準 e_j と任意のシグナル (s_i, s_j) に対し、

$$P_{(e^l, e_j)}(s_i, s_j) = \frac{1}{4}$$

が成立するので、専門家 j はコストを負ってまで正確なシグナルを得るインセンティブを持たないからである。ゆえに、検討すべき戦略プロファイルは、 (e^l, r^T) と (e^h, r^F) の 2 つである。前者の戦略プロファイルが実現した場合の専門家 i の期待利得は

$$\frac{1}{4}(x_i(bb) + x_i(wb) + x_i(ww) + x_i(bw)) - c(e^l)$$

であるが、これよりも (e^h, r^T) における期待利得の方が大きくなることは命題 1 ではすでに示した。また、後者の戦略プロファイルが実現しているときの専門家 i の期待利得は、 (e^h, r^T) を選んでいるときと等しくなるので、この戦略プロファイルも (e^h, r^T) を強パレート支配しない。

付録 4. 命題 4 の証明

強遂行最適契約問題の目的関数は、 $x_1(m)$ の多項式と $x_2(m)$ の多項式の和で表される。さらに、 $x_1(m)$ を含む任意の制約式には $x_2(m)$ は含まれず、またその逆も真である。したがって、専門家 1 の契約に関する最適化問題と専門家 2 の契約に関する最適化問題に分けて解くことができる。

以下では、 i に関する最適化問題を解く。命題 3 より解くべき問題は、

$$\begin{aligned} \min & \left[\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \right) \{x_i(bb) + x_i(ww)\} + \alpha(1 - \alpha) \{x_i(bw) + x_i(wb)\} \right] \\ & \alpha(1 - \alpha) \{x_i(wb) - x_i(bb)\} + \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \right) \{x_i(ww) - x_i(bw)\} \geq \Delta c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha(1-\alpha)\{x_i(bw) - x_i(ww)\} + \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)\{x_i(bb) - x_i(wb)\} \geq \Delta c \\
& \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)x_i(bb) + \alpha(1-\alpha)(x_i(bw) + x_i(wb)) + \left(\alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2}\right)x_i(ww) \geq \Delta c \\
& x_i(m) \geq 0
\end{aligned}$$

である。ここで、命題 4 の $x_i^S(m)$ はこの問題の制約条件をすべて満たしていることに注意する。一方で、この最適化問題の双対問題は

$$\begin{aligned}
& \max \Delta c(y_1 + y_2 + y_3) \\
& -\alpha(1-\alpha)y_1 + \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)y_2 + \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)y_3 \leq \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \\
& \alpha(1-\alpha)y_1 - \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)y_2 + \alpha(1-\alpha)y_3 \leq \alpha(1-\alpha) \\
& -\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)y_1 + \alpha(1-\alpha)y_2 + \alpha(1-\alpha)y_3 \leq \alpha(1-\alpha) \\
& \left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)y_1 - \alpha(1-\alpha)y_2 + \left(\alpha^2 - \alpha - \frac{1}{2}\right)y_3 \leq \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2} \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
y_1^* &= \frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 2}{(2\alpha - 1)^2} \\
y_2^* &= \frac{4\alpha(1-\alpha)}{(2\alpha - 1)^2} \\
y_3^* &= 1
\end{aligned}$$

を考えると、 y_k^* は双対問題の制約条件をすべて満たし、さらに

$$\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{2}\right)(x_i^*(b, b) + x_i^*(w, w)) + \alpha(1-\alpha)(x_i^*(b, w) + x_i^*(w, b)) = \Delta c(y_1^* + y_2^* + y_3^*)$$

が成立するので、双対定理より命題 2 の契約が最適である。もう 1 人の専門家 j への契約 $x_j^S(m)$ についても同様に求めることができる。

参考文献

Azrieli, Yaron. [2021] “Monitoring experts”, *Theoretical Economics*, 16.4: 1313–1350.

——— [2022] “Delegated expertise: Implementability with peer-monitoring,” *Games and Economic Behavior*, 132: 240–254.