

粘性解理論による強特異拡散方程式の数学解析

東京大学・大学院数理科学研究科 儀我 美保 (Mi-Ho Giga)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

東京大学・大学院数理科学研究科 儀我 美一 (Yoshikazu Giga)*
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

東京大学・大学院数理科学研究科
ノルベルト・ポジャール (Norbert Požár)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 はじめに

強特異拡散方程式は、結晶成長現象の記述にとどまらず、画像処理等に広く用いられている。しかし、方程式の解の定義すら不明の場合も多い。

非等方的曲率流方程式

$$V = M(\vec{n})(\kappa_\gamma + \sigma) \quad (\Gamma_t \text{上}) \quad (1.1)$$

を例として考える。ここで V は結晶表面 Γ_t (閉曲面とする) の外向き単位法ベクトル $\vec{n}$ 方向の成長速度, M は $\vec{n}$ のみによる正関数で既知, κ_γ は異方的平均曲率で (閉曲面 Γ の) 表面エネルギー

$$\int_{\Gamma} \gamma_0(\vec{n}) d\mathcal{H}^{n-1}$$

の第一変分, すなわち

$$\kappa_\gamma = -\operatorname{div}_\Gamma \nabla_p \gamma(\vec{n}) \quad (1.2)$$

を表す。ただし, γ_0 は表面エネルギー密度で $\vec{n}$ にのみよる正值既知関数で $\gamma(p) = |p|\gamma_0(p/|p|)$ としている。 $\operatorname{div}_\Gamma$ は表面での発散 (作用素) を表し, $\sigma = \sigma(x, t)$ は既知関数とする。 $d\mathcal{H}^{n-1}$ は面素を表す。また ∇_p は $p \in \mathbf{R}^n$ についての勾配 (作用素) を表す。ここで γ のフランク図形

$$\operatorname{Frank} \gamma = \{ p \in \mathbf{R}^n \mid \gamma(p) \leq 1 \}$$

*日本学術振興会 科学研究費補助金 基盤研究 (S) 21224001, 基盤研究 (A) 24234015 の補助による。

が凸であるが、「カド」がある場合が、非異方的曲率流方程式 (1.1) が強特異拡散方程式となる。

この方程式が強特異拡散方程式となる場合の解の概念は、大別すると次の3つに分類される。

- (i) クリスタライン法によるアプローチ： Γ_t が曲線の場合に解のクラスを多角形に制限し、(1.1) を常微分方程式に帰着して解概念を定義する。 Γ_t が多角形で σ が定数、また Frank γ が凸多角形のときうまくいく。いわゆるクリスタライン・アルゴリズムの考え方である。
- (ii) 変分学的アプローチ：方程式が勾配流として書かれているときうまくいく。この手法が適用できるのは、 Γ_t が関数のグラフとして与えられ $M(\bar{n})$ が特殊な場合に限られる。一方、Bellettini ら [BCCN] の距離関数を用いる方法は高次元の場合にも使えて強力であるが、現状では $\sigma = 0$, $M = \gamma$ の場合の解の一意性と、初期値が凸曲面の場合の解の存在が得られているだけである。
- (iii) 粘性解的アプローチ： Γ_t が曲線で σ が定数の場合は、2000 年前後に著者らにより解の存在、一意性、比較定理が構築されている [GG98], [GG01]。しかし σ が空間変数による場合 [GGR] や高次元の場合は、ようやく最近、 Γ_t が関数のグラフで与えられる場合に解の存在、一意性、比較定理が研究されるようになってきた。

本講では、主にこの粘性解的アプローチについて高次元問題や非定数 σ についての拡張などの、最近の進展 [GGP] も含めて、その基本的な考え方から述べる。

なおこれまでの進展や概要については、(i) のアプローチについては [I], (ii) のアプローチについては [Be], [GG04], [G04], [GG10], (iii) のアプローチについては [GG04], [G04] を参照するとよい。

2 典型的な問題と一意可解性に関する結果

まず非等方的曲率流方程式 (1.1) を Γ_t が関数 u のグラフで与えられる場合と、等高面で与えられる場合についての方程式の具体的表示を与える。これらは例えば [G06] の第1章に詳述されている。

2.1 曲面がグラフで与えられる場合

n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の領域 Ω で定義された関数 $u = u(x, t)$ のグラフで曲面 Γ_t が表されているとする. すなわち $\Gamma_t = \{(x, x_{n+1}) \mid x \in \Omega, x_{n+1} = u(x, t)\}$. このとき単位法ベクトルとして上向きのもを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n} = (-\nabla u, 1) / \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$$

となる. ただし ∇u は $\mathbf{R}^n$ での勾配を表す. このとき $\vec{n}$ 方向の法速度 V は, 速度ベクトル $(0, u_t)$ の $\vec{n}$ 方向への直交射影であるので,

$$V = u_t / \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$$

となる. 問題は (1.2) の異方的曲率 κ_γ であるが, まず γ が正斉次 1 次の場合は, div_Γ は単に div としてよいことに注意する. また $\nabla_p \gamma$ は正斉次 0 次なので

$$\nabla_p \gamma(\vec{n}) = \nabla_p \gamma(-\nabla u, 1)$$

が従う. この量は x_{n+1} によらないので

$$\kappa_\gamma = -\text{div}((\nabla_p \gamma)(-\nabla u, 1))$$

が得られる. さらに

$$W(q) = \gamma(-q, 1), \quad q \in \mathbf{R}^n$$

とおくと

$$\kappa_\gamma = \text{div}((\nabla_q W)(\nabla u))$$

と表される. こうして (1.1) 式は u の方程式として

$$u_t = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} m(\nabla u) [\text{div}(\nabla_q W)(\nabla u) + \sigma] \quad (2.1)$$

と表される. ただし $m(q) = M((-q, 1) / \sqrt{1 + |q|^2})$ とおいた.

例えば γ_0 や M が定数 (= 1) であり, 駆動力項 σ がゼロの場合, $W(q) = \sqrt{1 + |q|^2}$ となり (2.1) は平均曲率流方程式

$$u_t = \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \text{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)$$

となる. 一方 $\gamma(p) = |q| + |p_{n+1}|$, $q = (p_1, \dots, p_n)$ の場合 Frank 図形は $p_{n+1} = 0$ に対して対称で $p_{n+1} > 0$ で直円錐となる. このとき $W(q) = |q| + 1$ となるので, (2.1) は

$$u_t = m(\nabla u) \sqrt{1 + |\nabla u|^2} (\text{div}(\nabla u / |\nabla u|) + \sigma) \quad (2.2)$$

という形になる．この方程式は $m(q)\sqrt{1+q^2}$ が正定数かつ $\sigma = 0$ の場合

$$u_t = \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|) \quad (2.3)$$

となり， $\nabla u = 0$ のところに特異性を持つ代表的な強特異拡散方程式である．またいわゆる発散型で， L^2 -勾配流とみなせる．したがってその初期値問題の一意可解性に対しては，いわゆる非線形半群論なる一般論によりよく知られている [ACM]．これに対して M が例えば定数の場合 (2.2) は

$$u_t = \sqrt{1+|\nabla u|^2} (\operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|) + \sigma) \quad (2.4)$$

となり，勾配系とはみなせず非線形半群論を適用することができない．そこで粘性解的なアプローチが重要になる．空間1次元で σ が定数の場合，初期値問題の可解性は一般的な W に対して10年以上前に解決されていた [GG98], [GG99] であるが， σ が空間変数に依存する場合は [GGR] で確立された．また，高次元の場合はごく最近，(2.3) に対して粘性解的手法が確立された [GGP], [GGN]．

2.2 等高面表示

曲面 Γ_t が $\mathbf{R}^{n+1}$ で定義された関数 $w(z, t)$ の0-等高面で与えられている場合の (1.1) を w を用いて表そう． Γ_t がある有界領域を囲む閉曲面とし，その内側で $w > 0$ ，外で $w < 0$ としよう．すると外向き単位法ベクトル $\vec{n}$ は $\vec{n} = -Dw/|Dw|$ と表される．ここで D は $\mathbf{R}^{n+1}$ での勾配を表す．すると $V = w_t/|Dw|$ となり，方程式 (1.1) は Γ_t 上で

$$w_t = |Dw| M(-Dw/|Dw|) [\operatorname{div}(\nabla_p \gamma)(-Dw/|Dw|) + \sigma] \quad (2.5)$$

となる．いわゆる等高面法はこの等高面方程式 (2.5) を Γ_t 上だけではなく $\mathbf{R}^n$ 全体で考えることが特徴である．この方程式の粘性解理論をもとに，標準的な理論として γ が凸で C^2 ， M が連続のとき，一般の初期値 Γ_0 について特異点を許す広義解がただ一つ存在することが知られている [G06]．ここでの関心は γ が C^1 でない場合である．等高面法の上述のような一意可解性の理論は γ が C^1 でない場合は， $n = 1$ の場合かつ σ が定数の場合 [GG01] を除いて確立されていない．

2.3 解の存在・一意性について — 粘性解的アプローチ

粘性解の概念を確立するためには，適切な試験関数を取り，しかもそれに対しては $\operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$ なる量を定義しなければならない．空間1次元で全変動流方程式 (2.3) を考

えよう。これは

$$u_t = (\operatorname{sgn} u_x)_x \quad (2.6)$$

となる。例えば $\alpha \in (0, 1)$ とし, $u_0(x) = \max(\min(\cos x, \alpha), -\alpha)$ なる初期値を考えよう。 u_0 のグラフには傾き 0 の平らな部分がある (これをファセットという)。この u_0 がどのように変形されるか直観的に考察しよう。

ファセット以外の部分は $\operatorname{sgn} u_x$ は定数なので $u_t = 0$ であろう。原点を含むファセットに対応する区間を $[-a, a]$ とし, (2.6) の両辺をこの区間の近傍で積分してみよう。すると十分小さい $\delta > 0$ に対して

$$\int_{-a-\delta}^{a+\delta} u_t dx = \int_{-a-\delta}^{a+\delta} (\operatorname{sgn} u_x)_x dx = -1 - (+1) = -2$$

となる。もしファセットがその形を保つとすると u_t は $[-a, a]$ 上定数となる。このときの u_t は

$$u_t = -2/2a$$

となる。つまりスピードは $-2/(\text{ファセット長})$ となる。1次元の問題では次節で紹介する非線形半群論の解のスピードと一致する。しかし、高次元になると (2.3) 式であってもファセットの形によっては、スピード u_t はファセット上では定数とはならない [BNP99]。1次元の問題であっても $\operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) = (\operatorname{sgn} u_x)_x$ に対応する量はファセットの長さによるため無限小量ではなく非局所的な量である。しかし、(σ が定数であれば) ファセット上で一定であるということは、それでもまだ扱いやすく、いわゆるクリスタライン法 [AG], [T] が可能である理由でもある。

まず空間 1 次元のグラフ表示の場合の可解性の結果を述べよう。方程式は (2.1) を一般化して

$$u_t + F(u_x, \Lambda(u)) = 0, \quad \Lambda(u) = (W'(u_x))_x \quad (2.7)$$

を考える。 F については

(F0) (連続性) $F: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は連続

(F1) (単調性) $\xi \leq \eta$ ならば $F(q, \eta) \leq F(q, \xi)$ がすべての q に対して成立

を仮定する。また Λ はあくまで形式的な表示である。 W に対しては

(W0) (凸性) W は $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ の凸関数である。

(W1) (特異集合) $\mathbf{R}$ 内の有限集合 P があって W は P の外で C^2 級かつ P で W' が不連続である。

(W2) (2階微分の局所有限性) 任意のコンパクト集合に対し, $\sup_{K \setminus P} W'' < \infty$ である.

最後の仮定は技術的と思われる. 方程式 (2.1) がこの仮定を満たすためには, m が非負連続, σ が定数で W が (W0)–(W2) を満たせばよい. (F1) と (W0) により方程式 (2.7) は形式的には (退化) 放物型である. 方程式 (2.7) の初期値問題を周期境界値条件のもとで考えよう. つまり $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ で考える. 試験関数とそれに対する非局所的な量 Λ を適切に定義することにより以下のような性質を持つ都合のよい粘性解の概念が作れる. Λ がファセット上一定とみなせる場合の結果をまず述べよう. 以下の定理では, いつも (F0), (F1), (W0), (W1), (W2) を仮定する.

定理 2.1 (比較原理) [GG98] 上半連続関数 $u: Q \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ が (2.7) の粘性劣解とし, 下半連続関数 $v: Q \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が (2.7) の粘性優解とする. ただし $Q = \mathbf{T} \times [0, T)$ とする. このとき, もし $u \leq v$ が $t = 0$ で成立するならば Q 上 $u \leq v$ となる.

定理 2.2 (可解性) [GG98] 与えられた $u_0 \in C(\mathbf{T})$ を初期値に持つ (2.7) の粘性解 $u \in C(\mathbf{T} \times [0, \infty))$ が (ただ一つ) 存在する.

存在定理で得られる解は実は (2.7) の W を滑らかなもので近似した方程式解の極限としても得られる [GG99] ので, きわめて自然な定理である. 空間 1 次元であっても σ が x 変数による場合は, 問題はかなり難しくなる. まず Λ のかわりに W の項と σ の項をまとめて考える必要が出てくる. すなわち

$$\Lambda^\sigma(u) = W'(u_x)_x + \sigma$$

なる量を考える. その上で (2.7) のかわりに

$$u_t + F(u_x, \Lambda^\sigma(u)) = 0 \tag{2.8}$$

を考える. F については第 2 変数についてリプシッツ性

(F2) ある定数 L が存在し, $|F(q, \xi) - F(q, \eta)| \leq L|\xi - \eta|$ がすべての $X, Y, q \in \mathbf{R}$ について成立する

を課すと比較原理がいえる. しかし, その結果が発表されたのは 2011 年であった. これは Λ^σ がファセットの上で定数とは限らないためである [GG98a].

定理 2.3 [GGR] (F0), (F1), (W0), (W1), (W2) に加えて (F2) を仮定する. また $\sigma, \sigma_x \in C(\mathbf{T} \times [0, \infty))$ とする. このとき方程式 (2.8) について比較原理が成立する.

定理 2.4 [GGN] 定理 2.3 の仮定のもと、与えられた $u_0 \in C(\mathbf{T})$ を初期値に持つ (2.8) の粘性解 $u \in C(\mathbf{T} \times [0, \infty))$ が (ただ一つ) 存在する。

これらの解の存在はペロン–石井の方法による ([G06] 参照)。

高次元の場合は σ が定数, $W(q) = |q|$ の場合, ごく最近になって比較原理, 可解性になりつつ適切な粘性解の概念を確立することに成功した。そこで扱われている方程式は

$$u_t + F(\nabla u, \Lambda(u)) = 0, \quad \Lambda(u) = \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) \quad (2.9)$$

で (F0), (F1) を仮定する。(ただし, この第 1 変数は n 変数と読み替える。) 例えば (2.4) はこの仮定を満たす典型的な例である。なお境界条件は周期境界条件とする。すなわち n 次元トーラス上 $\mathbf{T}^n$ で考える。

定理 2.5 [GGP] $n \geq 1$ とする。また (F1), (F2) を仮定する。このとき方程式 (2.9) について比較原理が成立する。

定理 2.6 [GGP] 定理 2.5 の仮定のもと、与えられた $u_0 \in C(\mathbf{T}^n)$ を初期値に持つ (2.9) の粘性解 $u_0 \in C(\mathbf{T}^n \times [0, \infty))$ がただ一つ存在する。

ここで確立した手法は柔軟なため, 今後さまざまな拡張が期待されている。本稿ではその基本的な考え方を以下に紹介していきたい。

等高面方程式 (2.5) についての比較原理, 存在定理は $n = 1$ で σ が定数の場合のみ Frank γ にカドのある場合知られている [GG01]。その場合には, いわゆる等高面法 [G06] が確立されている。また表面エネルギー γ_0 を滑らかな γ_0^ε で近似した場合, 解も近似されるといふ, 近似定理も得られている [GG01], [GG99]。

3 非線形半群論と非局所的曲率

ファセット面での $\Lambda = \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)$ を定義するために全変動曲率流方程式の解を考えることが有益である。まず極大単調作用素論に基づく劣微分方程式の一般論を述べる。

3.1 劣微分方程式

まず H を $\langle, \rangle$ を内積とする実ヒルベルト空間として E を H 上で定義された $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ 値の下半連続な凸関数とし, $E \not\equiv \infty$ とする。この E に対して微分係数を一般化した概念である劣微分 $\partial E(u)$ ($u \in H$) を

$$\partial E(u) = \{f \in H \mid E(u+h) - E(u) \geq \langle f, h \rangle \text{ がすべての } h \in H \text{ で成立}\}$$

により定義する. $\partial E(u)$ は H 内の凸閉集合であり, 空集合にもなりうる. $\partial E(u) \neq \emptyset$ なる u の元全体を ∂E の定義域といい $D(\partial E)$ で表す. ∂E は極大単調作用素である. E の勾配流方程式として

$$\frac{du}{dt} \in -\partial E(u), \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (3.1)$$

を考える. 等号のかわり $\in$ となっているのは ∂E が多価関数であることによる. このとき高村 [Ko] の研究に始まり, Brezis[B] らの手によって発展した非線形半群論によると, 任意の $u_0 \in H$ に対して (3.1) をほとんど至るところで満たす H 値の連続関数で任意の区間 $[\delta, T], (T > \delta > 0)$ で絶対連続な u がただ一つ存在することが知られている. さらに u は時間変数 t について右微分可能で, その右導関数

$$\frac{d^+u}{dt} = -\partial^0 E(u)$$

をすべての $t > 0$ で満たしている. ここで $\partial^0 E$ は E の標準制限である. すなわち, $\partial E(u)$ の中でノルムを最小とする元である. すなわち,

$$\partial^0 E(u) = \arg \min \{ \|f\| \mid f \in \partial E(u) \}$$

と定義する. このような元は $\partial E(u)$ が閉凸なので $\partial E(u)$ が空でなければただ一つ存在する. この一意存在定理の驚くべき点は, 方程式 (3.1) はあいまいさがあるようにみえるが解は一意であるということである.

3.2 標準制限のレゾルベントによる近似

解の構成法にもかかわるが, 極大単調作用素の性質として

$$u + a\partial E(u) \ni f$$

は任意の $f \in H$ と $a > 0$ に対してただ一つの解を持つことがわかる. この解を $f_a = (I + a\partial E)^{-1}f$ と書くことにし, f のレゾルベント近似と呼ぶ. f_a は f に $a \downarrow 0$ で H のノルム収束するが, より強いことがいえる.

補題 3.1 $f \in D(\partial E)$ とする. このとき

$$\lim_{a \downarrow 0} \|(f_a - f)/a + \partial^0 E(f)\| = 0$$

が成立する.

これは極大単調作用素の一般論としてよく知られている。例えば [A, Theorem 3.56 参照]。このレゾルベント近似は (3.1) についての陰的 Euler スキーム

$$u^{m+1} - u^m \in -a\partial E(u^{m+1}), \quad m \geq 0, \quad u^0 = u_0$$

(a は時間刻み幅) と考えられるので, 補題 3.1 が成立することは極めて自然である。

3.3 全変動流方程式

次に Ω を $\mathbf{R}^n$ の滑らかな有界領域とし, $H = L^2(\Omega)$ とする。この上で全変動汎関数

$$E_1(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|, & u \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ \infty, & u \in L^2(\Omega) \setminus BV(\Omega) \end{cases}$$

を考える。ここで $BV(\Omega)$ は Ω 上の実数値有界変動関数全体を表す。これは凸かつ下半連続なので $E = E_1, H = L^2(\Omega)$ として 3.1 節, 3.2 節の理論がそのまま適用できる。ただし $L^2(\Omega)$ の内積は

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dx$$

で定義する。方程式 (3.1) は, 形式的には

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) & (\text{於 } \Omega \times (0, \infty)) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\partial\Omega}} = 0 & (\text{於 } \partial\Omega \times (0, \infty)), \quad u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

なるノイマン問題を表している。この E_1 の劣微分はよく知られていて [ACM, Lemma 2.4]

$$\partial E_1(u) = \{w = -\operatorname{div} z \in L^2(\Omega) \mid \Omega \text{ のほとんどすべての } x \text{ に対して}$$

$$z(x) \in \partial M(\nabla u(x)) \text{ かつ } \partial\Omega \text{ 上 } z \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0\}$$

と表される。ここで $\nu_{\partial\Omega}$ は Ω の外向き単位法ベクトルで $M(p) = |p|$, $p \in \mathbf{R}^n$ とする。(最後の $z \cdot \nu_{\partial\Omega}$ は $H^{-1/2}$ の元としての等式である。) ここで M は $\mathbf{R}^n$ の凸関数であり $\mathbf{R}^n$ を標準内積・に関するヒルベルト空間とみた場合

$$\partial M(p) = \begin{cases} \overline{B_1(0)}, & p = 0 \\ \{p/|p|\}, & p \neq 0 \end{cases}$$

となる。ここで $B_R(x)$ は x 中心半径 R の開球を表す。この z を **Cahn-Hoffman** ベクトル場ということがある。

3.4 ファセット上での標準制限の値

標準制限の値は計算しにくいですが、少なくともファセット上での値は、ファセット上だけの問題に帰着できる。このことを直観的に理解するために簡単な $\psi \in D(\partial E)$ に対して、標準制限のファセット上の値を調べてみよう。いま ψ が $\overline{\Omega_-}$ で最大値 0 をとり、 $\overline{\Omega_-} \subset \Omega$ で $\overline{\Omega_-}$ の外で負の値をとるとする。ただし Ω_- は境界が滑らかな開集合とする。 $\overline{\Omega_-}$ の外では Cahn-Hoffman ベクトル場 z は $z = \nabla \psi(x) / |\nabla \psi(x)|$ となっているとする。 ψ が Ω_- で最大値をとるので、形式的には $z \cdot \nu_{\partial \Omega_-} = -1$ となる。したがって標準制限 $-\partial^0 E(\psi)$ は

$$-\partial^0 E(\psi) = \begin{cases} \operatorname{div} z_0 & \text{in } \Omega_- \\ \operatorname{div} (\nabla \psi / |\nabla \psi|) & \text{in } \Omega \setminus \overline{\Omega_-} \end{cases}$$

で表現できる。(実際 ψ が滑らかで $\partial \psi / \partial \nu_{\partial \Omega} = 0$ ならば $\psi \in D(\partial E)$ となる。) ここで $\operatorname{div} z_0$ は次の汎関数

$$\int_{\Omega_-} |\operatorname{div} z|^2 dx$$

を付帯条件

$$(\text{境界条件}) \quad z \cdot \nu_{\partial \Omega_-} = -1 \quad (\partial \Omega \text{ 上})$$

$$(\text{拘束条件}) \quad |z| \leq 1 \quad (\Omega \text{ のほとんどすべての点で})$$

のもとで最小にする。 z_0 には任意性がある (一意でない) が、 $\operatorname{div} z_0$ はただ一つとなる。これは凸の変分問題であるが拘束条件があるために $n \geq 2$ では解を求めることが難しい。拘束条件がなければ、オイラー・ラグランジェ方程式は $\nabla \operatorname{div} z_0 = 0$ となり、 $\operatorname{div} z_0$ は定数である。 Ω_- が 1 次元の区間の場合は、これを満たす z_0 は 1 次関数で拘束条件は明らかに満たされる。したがって (2.6) 式を $E = E_1$ とした (3.1) なる劣微分方程式として解釈した場合のスピードがファセット上一定となり、ファセットが維持されるという仮定が正当であることがわかる。しかし高次元では Ω_- が凸集合としても最小元 $\Lambda = \operatorname{div} z_0$ は定数とは限らない [BNP99]。それどころか一般には不連続で Λ は BV に入ることがわかるだけである [BNP01a], [BNP01b]。

以上の考察で、少なくとも直観的には Ω_- での $\partial^0 E(\psi)$ の値は ψ が Ω_- で最大値をとる限り Ω のとり方にはよらない。そこで以後周期境界条件を考えるので $\Omega = \mathbf{R}^n$ として E_1 を考えることにする。

3.5 非局所的平均曲率

前節では凸の形状の結晶面に求められるファセットに対して $\Lambda = \operatorname{div} (\nabla u / |\nabla u|)$ の値を導いた。より一般の形状の結晶を考える必要がある。そこで Ω_- より一般のファセットを

考える.

定義 3.2 開集合 $\Omega_+, \Omega_- \subset \mathbf{T}^n$ が C^2 境界を持ち, かつ $\Omega_+ \subset \Omega_-$ ($\Omega_+ \neq \Omega_-$), $\text{dist}(\partial\Omega_-, \partial\Omega_+) > 0$ を満たすとき (Ω_-, Ω_+) を滑らかな対という. また $\psi \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n)$ が

$$\psi(x) = \begin{cases} > 0 & (\text{於 } \Omega_+) \\ = 0 & (D = \overline{\Omega_-} \setminus \Omega_+ \text{ 上}) \\ < 0 & (\text{於 } \Omega_-) \end{cases}$$

を満たすとき ψ を (Ω_-, Ω_+) の台関数 (support function) という.

この $D = \overline{\Omega_-} \setminus \Omega_+$ がより一般のファセットである. 次に境界条件, 拘束条件を満たすベクトル場を正確に定義する.

定義 3.3 ベクトル場 $z \in L^\infty(D, \mathbf{R}^n)$ が $\text{div } z \in L^2(D)$ を満たしかつ

(拘束条件) $|z| \leq 1$ (D のほとんどすべての点で)

(境界条件) $z \cdot \nu_{\partial\Omega_-} = -1$ ($\partial\Omega_-$ 上), $z \cdot (-\nu_{\partial\Omega_+}) = 1$ ($\partial\Omega_+$ 上)

を満たすとき, z を **Cahn-Hoffman** ベクトル場という. ($\text{div } z \in L^2$ なのでトレース $z \cdot \nu$ は $H^{-1/2}$ の元として定義されている [ACM], [FM].)

次に 3.4 節と同様に

$$w_0 = \arg \min \left\{ \int_D |w|^2 dt \mid w = \text{div } z, z \text{ は Cahn-Hoffman ベクトル場} \right\}$$

とする. (このような w_0 はただ一つである.)

定義 3.4 滑らかな対 (Ω_-, Ω_+) に対して w_0 を非局所的曲率といい $\Lambda(\Omega_-, \Omega_+)$ で表す.

もちろんこの値を定義するためには少なくとも一つは Cahn-Hoffmann ベクトル場が存在する必要がある. 実は滑らかな対に対しては次が示せる.

命題 3.5 滑らかな対 (Ω_-, Ω_+) に対しては台関数 ψ で $D(\partial E_1)$ の元であるものが存在し, D 上はほとんど至るところ $w_0(x) = -\partial^0 E(\psi)(x)$ となる. D 上での w_0 の値は台関数 $\psi \in D(\partial E_1)$ のとり方によらない. (ここで E_1 は $\mathbf{T}^n$ 上の全変動汎関数を表す.)

直観的には ψ として D の外の $\partial\Omega_+$ の近くで $-d_{\Omega_+}$, D 上 0, $\partial\Omega_-$ の近くで $-d_{\Omega_-}$ となるように定めればよい. ただし d_E は符号付距離関数で

$$d_E(x) = \text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, E^c)$$

となる.

一般に $\Lambda(\Omega_-, \Omega_+)$ を計算することは難しい. Ω_+ が空でない場合は, 1次元の場合以外研究されていない. もし $w_0 = \operatorname{div} z_0$ が定数 λ であれば, その値はガウスの発散定理から容易にわかる. 実際

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n(D)\lambda &= \int_D \operatorname{div} z_0 \, dx = \int_{\partial\Omega_-} z_0 \cdot \nu_{\partial\Omega_-} d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\Omega_+} z_0 \cdot \nu_{\partial\Omega_-} (-\nu_{\partial\Omega_+}) d\mathcal{H}^{n-1} \\ &= -\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_-) + \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_+)\end{aligned}$$

となるので

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}^n(D)} (\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_+) - \mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega_-))$$

となる. ここで $\mathcal{H}^d$ は d 次元ハウスドルフ測度で $\mathcal{H}^n$ はルベーグ測度に一致する.

例 1. $\Omega_- = B_R(0), R > 0, \Omega_+ = \emptyset$ のとき, $z = x/R$ は Cahn-Hoffman ベクトル場で $w_0 = n/R$ (定数) となる.

例 2. $\Omega_{\pm} = B_{R_{\pm}}(0), 0 < R_+ < R_-$ このとき w_0 は定数である.

この例は例 1 より難しいが, $z = \nabla\varphi$, φ がポアソン方程式

$$\Delta\varphi = \lambda \text{ (於 } D), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \pm 1 \text{ (}|x| = R_{\pm} \text{ 上)}$$

の解とすれば Cahn-Hoffman ベクトル場が構成でき, $\operatorname{div} z = \lambda$ すなわち定数となる.

3.6 非曲面的曲率の単調性

开区間 I で定義された 2 つの C^2 級の関数 f_1, f_2 が I で $f_1 \leq f_2$ かつ $f_1(\hat{x}) = f_2(\hat{x})$ であるとき $f_1''(\hat{x}) \leq f_2''(\hat{x})$ となることは最大値原理としてよく知られている. これに対応することがファセットに対してもいえる.

定理 3.6 (単調性) 滑らかな対 (Ω_-^i, Ω_+^i) を $i = 1, 2$ に対して考える. $\Lambda^i = \Lambda(\Omega_-^i, \Omega_+^i)$ とする, もし $\Omega_-^1 \subset \Omega_-^2$ かつ $\Omega_+^1 \subset \Omega_+^2$ ならば $D^1 \cap D^2$ 上はほとんど至るところ $\Lambda^1 \leq \Lambda^2$ となる.

同様な結果が [GGM] にて, 非線形半群の解公式を用いて示されている. ここでは補題 3.1 のレゾルベント近似を用いて証明する. レゾルベント方程式は順序を保つ (楕円型方程式の比較原理より従う [CC3]) なので $f_1 \leq f_2$ ならば $f_a^1 \leq f_a^2$ (a.e. $\mathbf{T}^n$) となることに注意しておく.

証明の概略 まず $f^i \in D(\partial E)$ となる (Ω_-^i, Ω_+^i) の台関数をとる. とり方を工夫すれば $f^1 \leq f^2$ ($\mathbf{T}^n$ 上) となる. 定義より $f^1 = f^2 = 0$ (於 $D^1 \cap D^2$) となる.

補題 3.1 によると

$$(f_a^i - f^i)/a \rightarrow -\partial^0 E(f^i) \quad (L^2 \text{収束})$$

がわかる. したがって部分列 $a_k \rightarrow 0$ をとれば $k \rightarrow \infty$ のとき

$$(f_{a_k}^i - f^i)/a_k \rightarrow -\partial^0 E(f^i) \quad (\mathbf{T}^n \text{上ほとんど至るところ})$$

となる. 一方レゾルベント方程式の順序保存性より $f^1 \leq f^2$ より $f_{a_k}^1 \leq f_{a_k}^2$ となる. また $D^1 \cap D^2$ 上 $f_{a_k}^i - f^i = f_{a_k}^i$ となる. よって $D^1 \cap D^2$ 上ほとんどすべての点で

$$\Lambda^1 = -\partial^0 E(f^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{a_k}^1/a_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f_{a_k}^2/a_k = -\partial^0 E(f^2) = \Lambda^2$$

□

4 粘性解の定義と比較定理

本節で方程式 (2.8) についての粘性劣解, 優解の定義を与える. そのうえで比較定理 2.5 の証明の鍵となる考え方を述べる.

4.1 粘性解の定義

まず試験関数の族を考えるため, 一点 $\hat{x}$ の近くでそのグラフが定数になるようなファセット化された関数を考える.

定義 4.1

- (i) $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbf{T}^n \times (0, \infty)$ に対して, $n+1$ 変数関数 φ が (ファセット化された) 許容試験関数であるとは $\hat{x} \in \Omega_- \setminus \overline{\Omega_+}$ となる滑らかな対 (Ω_-, Ω_+) の台関数 $f \in \text{Lip}(\mathbf{T}^n)$ と $\hat{t}$ のある近傍 $[\hat{t} - \delta, \hat{t} + \delta]$ ($\delta > 0$) で定義された C^1 級関数 g を用いて

$$\varphi(x, t) = f(x) + g(t)$$

と表されるときをいう.

- (ii) u を $\mathbf{T}^n \times [0, \infty)$ で定義された上半連続関数とする. $(\hat{x}, \hat{t})$ に対して許容試験関数 φ が u に対して半径 $\eta > 0$ の一般的な配置であるとは, φ が $(\hat{x} + h, \hat{t})$ での許容試験関数でありかつ

$$u(x - h, t) - \varphi(x, t) \leq u(\hat{x}, \hat{t}) - \varphi(\hat{x}, \hat{t})$$

がすべての $x \in \mathbf{T}^n$, $t \in [\hat{t} - \eta, \hat{t} + \eta]$ また $|h| \leq \eta$ を満たす $h \in \mathbf{R}^n$ についていえる
ときをいう。(このような η が存在するとき単に一般的配置という.)

比較原理を導くだけであれば, 粘性解を定義するのであれば (ii) の不等式は $h = 0$ のとき
だけ要求すればよいが, 存在性を示すのに用いた安定性を示すためには, h だけずらして
も (ii) の不等式が成立する余裕があるとよい. 幸いこのように試験関数と u との関係をよ
り限定的にしても比較原理を示すのには支障はない.

定義 4.2 (粘性劣解) u を $\mathbf{T}^n \times [0, T]$ で定義された上半連続関数で各点で $+\infty$ をとらない
とする. 以下の (i), (ii) が成立するとき u を $\mathbf{T}^n \times (0, T)$ での (2.9) の粘性劣解という.

(i) $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbf{T}^n \times (0, T)$ で φ が u に対して半径 η の一般的配置とするととき,

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{t}) + F\left(0, \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(\hat{x})} \Lambda(\Omega_-, \Omega_+)\right) \leq 0$$

がある $\delta \in (0, \eta)$ に対して成立する. ここで (Ω_-, Ω_+) はファセット化された $\varphi(\cdot, \hat{t})$
に対応する滑らかな対を表す.

(ii) $(\hat{x}, \hat{t}) \in \mathbf{T}^n \times (0, T)$ に対してその近傍 U で滑らかな φ があって

$$u(x, t) - \varphi(x, t) \leq u(\hat{x}, \hat{t}) - \varphi(\hat{x}, \hat{t})$$

が U で成立し, かつ $\nabla \varphi(\hat{x}, \hat{t}) \neq 0$ のとき

$$\varphi_t(\hat{x}, \hat{t}) + F(\nabla \varphi(\hat{x}, \hat{t}), \operatorname{div}(\nabla \varphi / |\nabla \varphi|)(\hat{x}, \hat{t})) \leq 0$$

が成立する.

通常と同じように粘性優解を定義するには上の不等式をすべて逆向きにし, かつ $-\varphi$ が
 $-u$ に対して半径 η の一般的配置とすればよい. 粘性劣解かつ優解のとき粘性解という.

4.2 比較定理の証明の考え方

Λ の非局所的性質のため定理 2.5 の証明はかなりこみいつている. ここでは, その概略
を述べるにとどめる. 通常どおり背理法を用いる. u, v を (2.9) の粘性劣解, 粘性優解と
し, $t = 0$ で $u \leq v$ であるにもかかわらず $t \in (0, T)$ で $u > v$ となる空間の点があるとす

る．変数倍加法 [G06] を用いるが，ここでさらに小さいパラメータ $\zeta \in \mathbf{R}^n$ を導入する．すなわち

$$\Phi_\zeta(x, t, y, s) := u(x, t) - v(y, s) - \Psi_\zeta(x, t, y, s)$$

$$\Psi_\zeta(x, t, y, s) := |x - y - \zeta|^2 / 2\varepsilon + S(t, s)$$

$$S(t, s) := |t - s|^2 / 2\varepsilon' + \gamma / (T - t) + \gamma / (T - s)$$

とおく． $\varepsilon, \varepsilon', \gamma$ は小さいパラメータとする．これらを小さくすると Φ_ζ の最大点は $t = 0, s = 0$ から離れ，また Φ_ζ の最大値も正となる． ε' や ε が小さいと最大点は $x - y - \zeta \sim 0, t - s \sim 0$ とならざるを得ない．そのような $\varepsilon, \varepsilon', \gamma$ を固定しておく． ζ を導入することにより，通常の理論を使える場合を除外すると， Φ_0 の最大点 $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{y}, \hat{s})$ (u も v もそこでは試験関数の空間微分はゼロとなる) 付近での u や v の形状を平らにすることができる．実際，次が示せる．

補題 4.3 [GGP] 十分小さい ζ に対して Φ_ζ の最大点 $(x_\zeta, t_\zeta, y_\zeta, s_\zeta)$ 上 Ψ_ζ の空間微分はいつもゼロとする． $\hat{x} = x_0, \hat{t} = t_0, \hat{s} = s_0$ とおく．($y_0 = x_0$ となる．) $\mathbf{T}^n$ の部分集合 U と V を

$$U = \{x \mid u(x, \hat{t}) \geq u(\hat{x}, \hat{t})\}, \quad V = \{y \mid v(y, \hat{s}) \leq v(\hat{y}, \hat{s})\}$$

とし， U^λ, V^λ をその λ -近傍とする．このとき $\lambda > 0$ を十分小さくすると，

$$u(x, t) \leq u(\hat{x}, \hat{t}) + S(t, \hat{s}) - S(\hat{t}, \hat{s}), \quad x \in V^\lambda$$

$$v(y, s) \geq v(\hat{y}, \hat{s}) + S(\hat{t}, \hat{s}) - S(\hat{t}, s), \quad y \in U^\lambda$$

がすべての $t \in (0, T)$ で成立する．

ζ を導入して u, v を平らにする技法は [CGG] にさかのぼる．これは [Go94] で強化され，[GG98] で積極的に用いられた．特に定数化補題 [GG98, Lemma 7.5] は簡単であるが重要である．

この補題 4.3 を用いて u, v に対してそのファセットの非局所的曲率が順序づけられているものを構成していく． U や V が滑らかな境界を持つ集合とすると $Z = \overline{U \setminus V^\lambda}$, $W = \overline{V \setminus U^\lambda}$ も滑らかとしよう．このとき

$$(\Omega_{-u}, \Omega_{+u}) = (U^\lambda, Z)$$

$$(\Omega_{-v}, \Omega_{+v}) = (\text{int}(W^c), \text{int}((V^\lambda)^c))$$

とおこう。すると $U^\lambda \subset \text{int}(W^c)$ かつ $Z \subset \text{int}((V^\lambda)^c)$ となるので非局所的曲率の単調性定理 3.6 より $\hat{x}$ の近くで

$$\Lambda(\Omega_{-u}, \Omega_{+u}) \leq \Lambda(\Omega_{-v}, \Omega_{+v}) \quad \text{a.e.} \quad (4.1)$$

となる。 u や v に対して $\hat{x}$ でファセット化されそのファセットがそれぞれ $(\Omega_{-u}, \Omega_{+u})$, $(\Omega_{-v}, \Omega_{+v})$ である（時間微分が $S_t(t, \hat{s})$, $-S_s(\hat{t}, s)$ となる）許容試験関数 φ_u, φ_v を作ることができる。補題 4.3 はこれを可能にしている。一般的配置にするなど技術的にはきちんと示さなければならないことがたくさんあるが、 u が粘性劣解かつ v が粘性優解であることにより

$$\begin{aligned} +S_t(\hat{t}, \hat{s}) + F(0, \Lambda(\Omega_{-u}, \Omega_{+u})) &\leq 0 \\ -S_s(\hat{t}, \hat{s}) + F(0, \Lambda(\Omega_{-v}, \Omega_{+v})) &\geq 0 \end{aligned}$$

を得る。上から下を引くと

$$0 < \frac{\gamma}{(T - \hat{t})^2} + \frac{\gamma}{(T - \hat{s})^2} \leq F(0, \Lambda(\Omega_{-v}, \Omega_{+v})) - F(0, \Lambda(\Omega_{-u}, \Omega_{+u}))$$

を得る。しかし右辺は Λ の単調性 (4.1) と F の単調性 (F1) により非正となり矛盾する。こうして証明が終わる。

5 近似法による解の構成

本節では (2.9) の初期値問題の解の構成、つまり定理 2.6 の証明の考え方を述べる。粘性解の定義では試験関数 φ のファセット上の Λ の値は一般には一定ではないので、ペロンの方法で解を作ることは難しい。そこで近似問題の解の極限として解を構成する。

5.1 近似問題と安定性

方程式 (2.9) の $\Lambda(u)$ を次のように近似する。 $\Lambda(u)$ は形式的には $-\partial E_1(u)$ の元であるので、全変動エネルギー E_1 を次の E_{1m} で近似する。

$$E_{1m}(u) = \int_{\mathbb{T}^n} W_m(\nabla u) dx, \quad W_m(p) = (|p|^2 + m^{-2})^{1/2} + |p|^2/m \quad (m = 1, 2, \dots)$$

ここで $m \rightarrow \infty$ とすると $W_m(p)$ は $W(p) = |p|$ に収束する。ここで

$$\Lambda(u) = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \text{div} [(\nabla_p W)(\nabla u)]$$

であるので

$$u_t + F(\nabla u, \operatorname{div}[(\nabla_p W_m)(\nabla u)]) = 0 \quad (5.1)$$

は (2.9) の近似方程式であり、通常の退化放物型方程式である。この方程式に対しては、特異性はないので通常の粘性解理論により $u_0 \in C(\mathbf{T}^n)$ に対して時間大域的な解 u_m が一意に存在する [G06]。また比較定理より $\|u_m\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ となる。次の安定性定理が解の構成の上で鍵となる。

定理 5.1 u_m を (5.1) の $Q = \mathbf{T}^n \times (0, T)$ での粘性劣解とする。このとき緩和上極限 $\bar{u} = \limsup^* u_m$ は $\bar{Q}$ 上 $\bar{u} < \infty$ であれば (2.9) の粘性解である。

ここで $\limsup_{m \rightarrow \infty}^* u_m$ は緩和上極限

$$\begin{aligned} & (\limsup_{m \rightarrow \infty}^* u_m)(x, t) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{k \geq m} \{u_k(y, s) \mid |y - x| \leq 1/m, |t - s| \leq 1/m, (y, s) \in \bar{Q}\}, (x, t) \in \bar{Q} \end{aligned}$$

を表す。

この証明には、さまざまな技法が必要である。 $\bar{u}$ に対して試験関数 φ を考え、定義 4.2 に従って粘性劣解に必要な φ の不等式を導出すればよい。(ii) の状況の場合は通常の証明 (例えば [G06] 参照) と同じなので (i) の場合を証明すればよい。

$$\varphi(x, t) = f(x) + g(t)$$

と書けるが、これをそのまま u_m の試験関数としたのでは、 $\operatorname{div}(\nabla_p W_m(\nabla f))$ の $\hat{x}$ 近くでの値はゼロとなり、求めたい (i) の y の不等式は導けない。そこで f を f_m で近似し、 $\operatorname{div}(\nabla_p W_m)(\nabla f_m)$ が $\Lambda(\Omega_-, \Omega_+)$ を近似するようにしたい。しかし f をいきなり f_m で近似することは難しい。そこで f を一旦レゾルベント方程式

$$w + a\partial E_1(w) \ni f \quad \text{in } \mathbf{T}^n \quad (a > 0) \quad (5.2)$$

の解 $f_a = w$ で近似する。すると E_{1m} が E_1 に $L^2(\mathbf{T}^n)$ 上の汎関数として Mosco 収束することにより実は f_a を近似できる。実際にエネルギーレベルでの収束がいえと一般論で近似レゾルベント方程式

$$w + a\partial E_{1m}(v) \ni f$$

の解 $f_{a,m}$ が f_a に $m \rightarrow \infty$ で $L^2(\mathbf{T}^n)$ で収束することがわかる [A]。楕円型方程式であることと比較定理により $\|\nabla f_{a,m}\|_\infty \leq \|\nabla f\|_\infty$ となり Lipschitz 定数も大きくなならない。これより Ascoli-Arzelà の定理を用いて $f_{a,m} \rightarrow f_a$ の収束は一様収束になる。

さて $\bar{u} - \varphi$ が $(\hat{x}, \hat{t})$ で最大値をとり φ は $\bar{u}$ に対して一般的配置とする. t 変数について最大値は狭義としてよい. 今

$$\varphi_a(x, t) = f_a(x) + g(t)$$

として $\bar{u} - \varphi_a$ の最大点を考える. この最大点 (x_a, t_a) が $(\hat{x}, \hat{t})$ に $a \rightarrow 0$ で近づくとしよう. (実際はそうはならない場合もあるので議論は複雑である. 一般的配置であることは, この難しい部分を克服するために導入されている.) この φ_a をさらに $\varphi_{a,m} = f_{a,m}(x) + g(t)$ で近似する. $u_m - \varphi_{a,m}$ の最大点を $(x_{a,m}, t_{a,m})$ とすると $f_{a,m} \rightarrow f_a$ ($m \rightarrow \infty$) が一様収束することにより $(x_{a,m}, t_{a,m})$ の極限は $\bar{u} - \varphi_a$ の一つの最大点 (x_a, t_a) に部分列収束する. u_m が近似方程式 (5.1) の粘性劣解であることから

$$g'(t_{a,m}) + F(\nabla f_{a,m}(x_{a,m}), h_{a,m}(t_{a,m})) \leq 0$$

が得られる. ただし $h_{a,m} = (f_{a,m} - f)/a$ とおいた. ここで部分列をうまくとって $m \rightarrow \infty$ とすると

$$g'(t_a) + F(p_a, h_a(x_a)) \leq 0 \quad (5.3)$$

となる. ただし p_a は $\nabla f_{a,m}(x_{a,m})$ の $m \rightarrow \infty$ の集積点の一つであり $h_a = (f_a - f)/a$ としている. 次に (5.3) 式で $a \rightarrow 0$ とする. 今度は h_a が何かに $a \rightarrow 0$ で一様収束するというのではないので工夫を要する. まず a が小さいとき x_a が f のファセットの上の内点であることに注意すると $h_a(x_a) \leq \min \{h_a : \hat{x} \text{ の十分小さな近傍 } \overline{B_\delta(\hat{x})}\} := \tilde{h}_a(\hat{x})$ である. この δ は a が十分小さければ a によらずにとれる. 一方, F の単調性 (F1) より

$$g'(t_a) + F(p_a, \tilde{h}_a(\hat{x})) \leq 0.$$

さて補題 3.1 を用いると $h_a \rightarrow -\partial^0 E_1(f)$ が L^2 収束の意味でなりたつ. これより

$$\lim_{a \rightarrow 0} \min_{\overline{B_\delta(\hat{x})}} h_a \leq \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(\hat{x})} (-\partial^0 E_1(f)) = \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(\hat{x})} \Lambda(\Omega_-, \Omega_+)$$

となるので $a \rightarrow 0$ とすると

$$g'(\hat{t}) + F\left(\hat{p}, \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(\hat{x})} \Lambda(\Omega_-, \Omega_+)\right) \leq 0.$$

ここで $|\hat{p}| \leq \|\nabla f\|_\infty$ で f の Lipschitz ノルムはいくらでも小さくとれるので

$$g'(\hat{t}) + F\left(0, \operatorname{ess\,inf}_{B_\delta(\hat{x})} \Lambda(\Omega_-, \Omega_+)\right) \leq 0$$

が従い $\bar{u}$ が (2.9) の粘性劣解であることがいえる. 詳しい証明は [GGP] 参照.

5.2 解の存在についての注意

安定性定理により, $\bar{u} = \limsup^* u_m$ が (2.9) の粘性劣解で $\underline{u} = \liminf_* u_m$ が (2.9) の粘性劣解となることがわかる. ($\|u_m\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ が比較定理で得られるので $\bar{u} < \infty$, $\underline{u} > -\infty$ は明らかである.) ここで $\bar{u}(x, 0) \leq \underline{u}(x, 0)$ ($x \in \mathbb{T}^n$) がいえれば比較定理で $\bar{u} \leq \underline{u}$ となり, $\bar{u} = \underline{u}$ となり, u_m の Q での一様収束が従う.

$\bar{u}(x, 0) \leq \underline{u}(x, 0)$ を示すためには $\bar{u}(x, 0) \leq u_0(x)$ を示せばよい. そのためには $t = 0$ 付近で初期層ができないことをいうバリアの構成が必要である. ここでは E_{1m} と E_1 との性質の違いから m に一様なバリアを構成することが困難である. したがって [GG99] にあるように W_m の共役凸関数である Wulff 関数を用いて m によるバリアを構成する. これにより $\bar{u}(x, 0) \leq u_0(x)$ を示す.

以上が存在定理 2.6 の証明の考え方である. 詳しくは [GGP] を参照してほしい.

参考文献

- [ACM] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazón, Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functions, *Birkhäuser Basel*, 2004.
- [AG] S. Angenent and M. E. Gurtin, Multiphase thermomechanics with interfacial structure. II. Evolution of an isothermal interface. *Arch. Rational Mech. Anal.* **108** (1989), no. 4, 323–391.
- [A] H. Attouch, Variational convergence for functions and operators. *Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA*, 1984.
- [Be] G. Bellettini, An introduction to anisotropic and crystalline mean curvature flow. *Hokkaido Univ. Tech. Rep. Ser. in Math.* **145** (2010), 102–162.
- [BCCN] G. Bellettini, V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga, Crystalline mean curvature flow of convex sets. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006), 109–152.
- [BNP99] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, Facet-breaking for three-dimensional crystals evolving by mean curvature. *Interfaces Free Bound.* **1** (1999), no. 1, 39–55.
- [BNP01a] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, On a crystalline variational problem. I. First variation and global L^∞ regularity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **157** (2001), no. 3, 165–191.

- [BNP01b] G. Bellettini, M. Novaga and M. Paolini, On a crystalline variational problem. II. BV regularity and structure of minimizers on facets. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **157** (2001), no. 3, 193–217.
- [B] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. (French) *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London*, 1973.
- [CC3] V. Caselles and A. Chambolle, Anisotropic curvature-driven flow of convex sets. *Nonlinear Anal.* **65** (2006), no. 8, 1547–1577.
- [CGG] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.* **33** (1991), no. 3, 749–786.
- [FM] D. Fujiwara and H. Morimoto, An L_r -theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **24** (1977), no. 3, 685–700.
- [GG98] M.-H. Giga and Y. Giga, Evolving graphs by singular weighted curvature. *Arch. Rational Mech. Anal.* **141** (1998), no. 2, 117–198.
- [GG98a] M.-H. Giga and Y. Giga, A subdifferential interpretation of crystalline motion under nonuniform driving force. *Discrete Contin. Dynam. Systems* **24** (1998), Added Volume I, 276–287.
- [GG99] M.-H. Giga and Y. Giga, Stability for evolving graphs by nonlocal weighted curvature. *Comm. Partial Differential Equations* **24** (1999), no. 1–2, 109–184.
- [GG01] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **159** (2001), 295–333.
- [GG04] M.-H. Giga and Y. Giga, A PDE approach for motion of phase-boundaries by a singular interfacial energy, In T. Funaki and H. Osada (eds). *Stochastic analysis on large scale interacting systems*, 213–232, *Adv. Stud. Pure Math.* **39**, Math. Soc. Japan (2004).
- [GG10] M.-H. Giga and Y. Giga, Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* **27** (2010), no. 3, 323–345.

- [GGN] M.-H. Giga, Y. Giga and A. Nakayasu, In preparation.
- [GGP] M.-H. Giga, Y. Giga and N. Pozar, Periodic total variation flow of non-divergence type in $\mathbf{R}^n$. In preparation.
- [GGR] M.-H. Giga, Y. Giga and P. Rybka, A comparison principle for singular diffusion equations with spatially inhomogeneous driving force for graphs. *Hokkaido University Preprint series in Math.* #981 (2011).
- [G04] Y. Giga, Singular diffusivity - facets, shocks and more; In J. M. Hill and R. Moore (eds). *Applied Math. Entering the 21th Century*, pp. 121–138, ICIAM 2003 Sidney, SIAM Philadelphia (2004).
- [G06] Y. Giga, Surface evolution equations. A level set approach. Monographs in Mathematics, 99. *Birkhäuser Verlag, Basel*, 2006. xii+264 pp.
- [GGM] Y. Giga, M. Gurtin and J. Matias, On the dynamics of crystalline motions. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **15** (1998), no. 1, 7–50.
- [Go94] S. Goto, Generalized motion of hypersurfaces whose growth speed depends superlinearly on the curvature tensor. *Differential Integral Equations* **7** (1994), no. 2, 323–343.
- [I] T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **25** (2008), no. 2, 233–253.
- [Ko] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space. *J. Math. Soc. Japan* **19** (1967), 493–507.
- [T] J. E. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, Proceedings of the Conference on Differential Geometry, Rio de Janeiro. *Pitman Monograph, in Pure and Applied Math.* **52** (1991), 321–336.