

多段論理回路網の代数的構成法

東北大学 通研 野口正一

§ 1 はじめに

空間的に規則的に配列されている論理素子の結合により、極めて複雑な論理回路が構成できる。このような回路網の性質を調べることは理論的な立場から興味あることであるが、工学的にも IC 回路構成のための基本的問題として重要なことである。本論文は第一段階として一次元接属回路網の性質を代数的な立場から考察したもので、多段論理回路網の表現法及び合成法について示したものである。

§ 2 多段論理回路網

§ 2. 1 回路網の定義

第一図は一次元接属回路を示し、情報伝達方向には $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ なる k 本の入力、上より $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ なる m 本の入力を有するものとする。ここで y_i は 0 または 1, z_i は $X_m = \{0, 1, x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$ なる集合から夫々

とされるもので x_i は 1 または 0 の変数である。又最終端子 $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ は合成された k 個の論理関数を示す。 $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ を入力変数, $\{y_1, \dots, y_k\}$ を状態変数という。回路の各素子の F_i (以下セルという) が異なるとき回路網を多段論理回路, $F_1 = F_2 = \dots = F_k = F$ のとき反復論理回路という。又入力条件が m 個, k 個のものとして $(m+k, k)$ セルという。二次元及び多次元の場合の定義も同様に与えられ, $\mathcal{A}$ = 図は二次元の場合の構成を示す。

§2.2 セルの動作表示

$\mathcal{A}$ = 図は一個のセルの動作を示す。今 $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ に 2 進表示 $y_1 + y_2 2^1 + \dots + y_k 2^{k-1}$ 等に対えさせると動作表示は状態変数 $N = \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$ の変換としてつぎの表で与えられる。

$z_m z_{m-1} \dots z_1$	$y_k \dots y_1$	$Y_k \dots Y_1$	T_N
0 0 $\dots$ 0	0	$i_{0,0}$	t_0
0 0 $\dots$ 0	1	$i_{1,0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
0 0 $\dots$ 0	$2^k - 1$	$i_{2^k-1,0}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1 1 $\dots$ 1	0	$i_{0,2^k-1}$	t_{2^m-1}
1 1 $\dots$ 1	1	$i_{1,2^k-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
1 1 $\dots$ 1	$2^k - 1$	$i_{2^k-1,2^k-1}$	

T_N は N 上の変換半群を示し, 各 t_i は $t_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 2^{k_i} \\ i_{0,i} & \dots & i_{2^{k_i},i} \end{pmatrix}$ である。各 t_i 間の演算は明らかに半群 T を構成し, これよりつぎの重要な結論が導かれる。今 X_n より選んだ m 個の入力変数を $X_n^{(m)}$ とすれば $f: X_n^{(m)} \rightarrow T$ なる半群関数が定義され,

夫々のセルの動作を示す又任意の二つのセル $f_i: X_n^{(m)} \rightarrow T$, $f_j: X_n^{(m)} \rightarrow T$ を接続するとは $f = f_i \cdot f_j: X_n^{(m)} \times X_n^{(m)} \rightarrow T$ の関数が興

えられることであり, $f_i(X_n^{(m)}) = (t_0, t_1, \dots, t_{2^{k_i}-1})$,

$f_j(X_n^{(m)}) = (t'_0, t'_1, \dots, t'_{2^{k_j}-1})$ (m 個の変数が対象である。)

とすれば $f = (t_0 \cdot t'_0, t_1 \cdot t'_1, \dots, t_{2^{k_i}-1} \cdot t'_{2^{k_j}-1})$ である。

以上のことを拡張すれば一般に k 個のセルを用いて $f: X_n^{(m_1)} \times X_n^{(m_2)} \times \dots \times X_n^{(m_k)} \rightarrow T$ なる半群関数が定義できる。半群 T が特に群の場合には色々な性質が見出し易い。以下の議論は T が群 H の場合について考察する。

§3 回路網の表示

回路網の性質は前章での議論から判るように各 t_i が与えられれば完全に定まる。しかしこのまうでは取扱いが不便なので今少し便利な表示法を示す。このためには具体的な群 H を定める必要がある。以下 H が二つの代表的な群の場合について考察する。

§3.1 巡回群 C_r による表現

$r \geq 2^k$, なる巡回群 C_r , その生成元を a とする。特に

$I(n+k, R)$ セルで, 入力変数 $X_n^{(m)} = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}\}$ としたとき $x_{i1} = x_{i2} = \dots = x_{in} = 1$ のときの交換 α を与え, それ以外のときは $\alpha^0 = e$ (単位元) を与えるセルを対象とする。このセルを標準セルという。明らかにこのセルは最大変換能力を有するセルの一つである。今変換 α^i, α^j なる二つのセルを接続すると $\alpha^{i \oplus j}$ ($\oplus$ は mod r) なる変換を行う。即ち C_r の元間の演算として加法が定義されつぎに示される。 $\alpha^i \oplus \alpha^j = \alpha^{i \oplus j}$ (11)

又以下のため加法の作用素として乗法 $\alpha^i \cdot \alpha^j = \alpha^{i \cdot j}$ (12) を定義する。さて標準セルを用いるとゲート関数における最小項入力 $m_0, m_1, \dots, m_{2^n-1}$ に対して $f(m_i) = \eta_i = (e, \dots, a, e, \dots, e)_{2^n}$ (13) である。 $\{\eta_i\}$ は 2^n 次元のベクトルであり, 多元環をなすつぎの関係が成立する。 $\lambda_i \eta_i \oplus \lambda_j \eta_j = (e, \dots, e, a^{\lambda_i}, e, \dots, a^{\lambda_j}, e, \dots, e)$, $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{Z}/r$

変換表の対応より m_i と η_i には同型写像が対応し, セルの入力と, それに対応する η と同一視してもよい。以下 m と η と同一視する。 $\checkmark$ により $I(n+k, R)$ の場合でも入力 $X_n^{(m_1)}, X_n^{(m_2)}, \dots, X_n^{(m_e)}$ なる e 個のセルの接合より群関数 $f(X_n^{(m_1)}, X_n^{(m_2)}, \dots, X_n^{(m_e)}) = X_n^{(m_1)} \oplus \dots \oplus X_n^{(m_e)}$ が定まる。一般に n 変数の入力集合 $\tilde{X}^n$ とすると全く同様に $f: \tilde{X}^n \rightarrow H$ が求まる。特に $f(d_1 m_1, d_2 m_2, \dots, d_{2^n-1} m_{2^n-1}) = \bigoplus_{i=0}^{2^n-1} d_i m_i$ (14) を最少項表示という。各 m_i は基底となる。つぎに否定入力について考察する。 $\bar{x}_i = (a, e, a, e, \dots, e)_{2^n}$

$= (a, \dots, a) \oplus (e, a^{r-1}, \dots, e, a^{r-1})_{2^n} = 1 \oplus (r-1)x_1,$
 $\bar{x}_1 \bar{x}_2 = 1 \oplus (r-1)x_1 \oplus (r-1)x_2 \oplus x_1 x_2$ 等の関係より否定変数を含め独立変数 $X = \{1, x_1, \dots, x_n, \dots, x_1 x_2 \dots x_n\}$ が基底として選べる。 U を X を基底とする加群とすれば U は $2/r$ 上 2^n 次元の多元環であり, $f(c_0 T_0, c_1 T_1, \dots, c_{2^n-1} T_{2^n-1}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} c_i T_i$, $T_i \in X - (5)$ で与えられる。(5)を多元環表示という。最少項表示と多元環表示とは等価であり夫々の係数 d_i, C_i 間にはつぎの関係が成立する。

$$D_n = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad C_n = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{2^n-1} \end{bmatrix} \quad \text{とする} \quad C_n = M_n D_n \quad (6)$$

$$\text{そこで } M_n = \begin{bmatrix} M_{n-1} & 0 \\ \bar{M}_{n-1} & M_{n-1} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r-1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{M}_1 = \begin{bmatrix} r-1 & 0 \\ 1 & r-1 \end{bmatrix}$$

ここで $\bar{M}_k$ は M_k の 1 を $(r-1)$ に入れ換えたものである。

§ 3.2 基本可換群 C_2^k による表示

$C_2^k = \widetilde{C_2^k} = C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2$ とすると C_2^k にはつぎの性質がある。

基本可換群 C_2^k は $GF(2)$ の上の k 次元ベクトル空間と同型

で生成元は次の k 個である。

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{2^0} = (1, 2^k) (2, 3) \dots (2^{k-2}, 2^{k-1}) \\ a_{2^1} = (2, 2^k) (1, 3) \dots (2^{k-3}, 2^{k-1}) \\ \vdots \\ a_{2^{k-1}} = (2^{k-1}, 2^k) (1, 2^{k-1}) \dots (2^{-1}, 2^{-1}) \end{array} \right.$$

C_2^k の任意の元 a_i は $a_i = a_{i,0}^{\varepsilon_0} \cdots a_{i,k-1}^{\varepsilon_{k-1}}$ で表現できる。各 a_i 間の演算は長次元ベクトル $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1})$ 上の加法及び乗法として前節と同様に定義され、群関数 $f: \tilde{X}^m \rightarrow C_2^k$ はつぎの形で表現できる。 $f(\tilde{X}^m) = \sum_{i=0}^{2^m-1} (\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,k-1}) m_i$ (7)
これを最少項表示という。明らかにこの場合

標準セルは長個必要である。(7)式は前節と同様 X を基底とする多元環表示 $f(\tilde{X}^m) = \sum_{i=0}^{2^m-1} (\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,k-1}) T_i$ でも与えられ $\{(\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,k-1})\}$, $\{(\delta_{i,0}, \delta_{i,1}, \dots, \delta_{i,k-1})\}$ を $\{w_i\}$, $\{v_i\}$ としたとき係数ベクトル間には(6)式と同様ちつぎの関係が成立する。

$$W_n = \begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad V_n = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{2^n-1} \end{bmatrix}, \quad V_n = N_n W_n \quad (8)$$

$$N_n = \begin{bmatrix} N_{n-1} & 0 \\ N_{n-1} & N_{n-1} \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{である。}$$

§§ 3・3 C_r 又は C_2^k による回路網の合成

今迄の議論より明らかかように多元環表示では T_i はセルへの入力変数と、係数は標準セルの所要個数を表はす。このとき合成に関し、つぎの定理が成立する。

定理 H を C_r 又は C_2^k とする。 $f: \tilde{X}^m \rightarrow H$ が C_r 又は C_2^k セルのカスケードで m 変数で合成可能なための必要十分条件は f の多元環表示の各項の長さが m 以下なることである。

構成に所要なセル数は C_r セルの場合: $L_n \leq (r-1) \sum_{i=0}^m C_i$,

C_2^k セルの場合: $L_n \leq k \sum_{i=0}^m C_i$ である. 又左境界条件は定数でも1変数の関数でもよい.

§ 4 回路網の合成は

前章での考察より変換群の演算として加法のみを用いては即ち同一の C_r 又は C_2^k セルの接続では^{一般の}回路網が合成できないことが判った. 本章では加群の作用素としての乗法を考え, $f: \bar{X}_n \rightarrow H$ $\bar{X}_n = \{1, x_1, \dots, x_n\}$ なる最簡なセルを用いてもこの問題が解決できることを示す.

§§ 4.1 巡回群 C_r とその自己同型作用素による回路網合成

C_r の生成元 a に対する自己同型を $\varphi_i(a) = a^i$ ($0 \leq i \leq r-1$) とする. このとき $(r, i) = 1$ のときのみ φ_i は自己同型 $A(C_r)$ の元となる. $A(C_r)$ は r に対する Euler 関数 $\phi(r)$ 又は r の約数を位数とする巡回群をなし, 作用素の元 g , 即ち $\varphi_i(a) = g^{-1} a g$ なる g は $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (r-1) \\ 0 & i & 2i & \dots & (r-1)i \end{pmatrix} (\text{mod } r)$ である. 特に g を入力変数 x_n のもとでの作用素とすると, $\varphi_i^{x_n}(f)$ と書かれ, 回路的には右4図が対応する.

このときつぎの定理が成立する.

定理 ある関数の多元環表示を f とすれば, セルの入力 x のもとでの作用素 φ_i^x はつぎのように f を変形する.

$$\varphi_i^x(f) = (1 \oplus (i-1)x) f \quad (9) \quad (9) \text{式を用いると}$$

回路網の分解はつぎのプロセスで行える。与えられた関数
 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha \{ 1 \oplus$
 $(i-1)x_n \} \hat{f}(x_1, \dots, x_{n-1}) \oplus \hat{f}(x_1, \dots, x_{n-1})$ 。以下 $\hat{f}, \hat{f}$ を求め、これ
より $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ を逐次取り去れば分解は進む。たゞこ
のためには r の位数は奇数でなければならぬ。以上のことを
まとめればつぎの定理が求められる。

[定理] $f: \bar{X}^n \rightarrow C_r$ は r が奇数のとき $k = \lceil \log_2 r \rceil$
とすれば基本セル $(k+2, k+1)$ のカスケードで (たゞ三種
類のセルを用いて) 同時に k 個の関数が合成可能である。 r
が偶数のときは実現不可能なものが存在する。所需セルの数は
 $L_n \leq r2^n - 2$ である。又これより 3 値 ($r=3$) セルが任
意のブール関数実現の意味で最良である。 (= 面体群を用い
れば $q = q^{-1}$ であり = 個の基本セルでよい。)

§ 4.2 基本可換群 C_2^k の自己同型作用素による回路 合成

この場合は基本可換群の生成元 $a_{2^0}, a_{2^1}, \dots, a_{2^{k-1}}$ に対する
自己同型作用素を考え、議論を進める。紙面の都合で最終
の結果のみを示す。

[定理] 群関数 $f: \bar{X}_n \rightarrow C_2^k$ は $(k+2)$ 種類の $(k+1, k)$
基本セルを用いて任意の k 組のブール関数を常に合成可能で
ある。所需セルの数は $L'_n \leq (k+1)2^n - 2$ である。

§ 5 反復論理回路網による合成

前章迄の結果は任意の回路網がヒカシ変数入力の多段論理回路網により合成できることを示したが、本章では反復論理回路網によっても合成できることを示す。

$G = \{a, b\}$ のとき $\langle \{G\} \rangle = \{G, G^2, \dots, G^k\}$ とかく。

このときつぎの定理が成立する。

[定理] $f(2) = (a, b)$ で $\langle \{a, b\} \rangle = S_r$, かつ a の位数と b の位数が互いに素であるとき $\langle (a, b) \rangle = S_r \times S_r$

ここで S_r は r 次の対称群。又 S_r の元についてつぎの定理が成立する。

[定理] 対称群 S_r の元を交換するセルは唯一種類のセルで置き換えることができる。それは r が奇数のとき $f(2) = (101), (01 \dots (r-1))$, 偶数のとき $f(2) = ((01), (12 \dots (r-1)))$ である。

以上の関係を用いると最終的な定理としてつぎのものを得る。

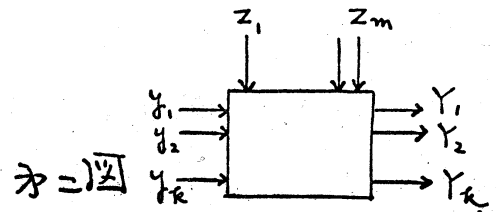
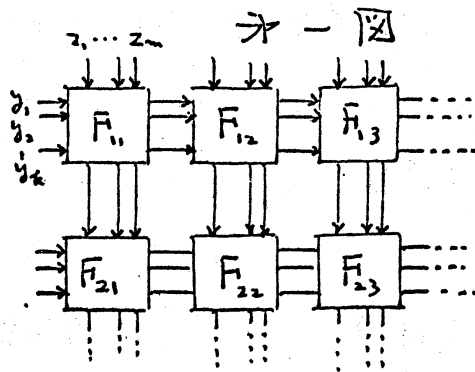
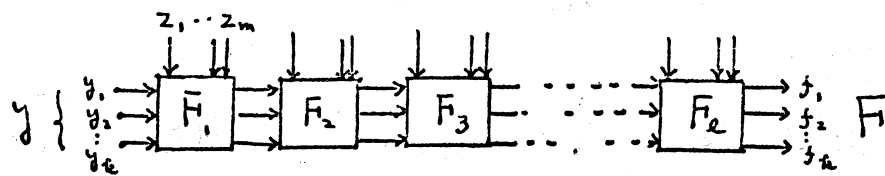
[定理] r を奇数とすれば、正交群セルによる合成回路網は $f(2) = (\theta_1, \theta_2)$ を用いて $L_n < 2^n (r^2 - 1) + 3(2^{n-1})(3r - 1) \cdot (r - 1)$ の単一のセルの接続で構成できる。ここで $\theta_1 = (101)$, $\theta_2 = (01 \dots (r-1))$ である。

[定理] r を偶数とするとき、線形群セルによる合成回路網は $f(2) = (\theta_1, \theta_2)$ を用いて $L'_n < 2^n \{kr(3r - 4)$

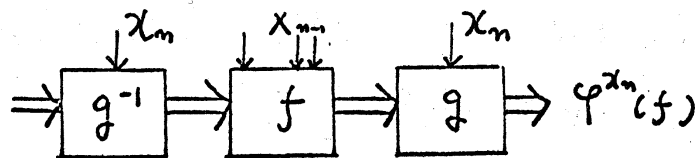
$+ 6r(r-2)\} - 12r(r-2)$ で構成できる. $\theta_3 = (12 \dots r-1)$

§ 結論 多生カ多段論理回路網の合成法を变换セルの立場から代数的方法論により求めたものである。回路網の表現法が多元環表示で与えられ、これを土台とし作用素に対する標準形へ多元環表示を变化させることが回路合成の基本的な考え方である。

終わりに本研究は我々の研究室で行われている研究の一部であることを附記する。



オ 3 図



オ 4 図