

多様体上の martingale に関する注意

早大理工 村本克志 (Katsushi Muramoto)

連続な実数値 martingale (M_t) に対して

$$\{M_t \text{ 概収束}\} \subset_{\text{a.p.}} \{<M, M>_{\infty} < \infty\}$$

であることは良く知られている。この結果は Darling, Zheng 等によって多様体に値をとる martingale に拡張されている。本稿では、多様体値 martingale の定義から始めて、それらの概要を紹介していきたい。

§.1 確率幾何

ここでは、Meyer 流に 2 階の tangent vector を導入し、定義及び基本的結果を紹介していく。

V を n 次元 C^∞ 多様体とし、 $T(V) = \bigcup_{a \in V} T_a(V)$ を通常の

tangent bundle, $\mathcal{Z}(V) = \bigsqcup_{a \in V} \mathcal{Z}_a(V) \in 2\text{-tangent bundle}$ とする。
 ($\bigsqcup$ は多様体の構造が入ることを示す。ここからは C^∞ 構造を仮定する。) $T_a(V)$ の元は tangent vector, $\mathcal{Z}_a(V)$ の元は 2-tangent vector と呼ばれる。 V の局所座標系 (x^i) に対して $D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_{ij} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ とおくと, $D_i|_a$ は $T_a(V)$ の基底をなし, $D_{ij}|_a$ ($i \geq j$) は $\mathcal{Z}_a(V)$ の基底をなす。 $T(V)$ 上の C^∞ 関数 ϕ が $T_a(V)$ 上で線型となることを 1-form と呼ばれ, $\mathcal{Z}(V)$ 上の C^∞ 関数 ψ が $\mathcal{Z}_a(V)$ 上で線型となることを 2-form と呼ばれる。 $f, g \in C^\infty(V)$ に対し $df, d^2f, df \cdot dg \in$

$$df(\theta) \equiv \theta(f) \quad (\theta \in T(V))$$

$$d^2f(\theta) \equiv \theta(f) \quad (\theta \in \mathcal{Z}(V))$$

$$df \cdot dg \equiv \frac{1}{2} \{ d^2(fg) - f d^2g - g d^2f \}$$

によって定義すると, df は 1-form, $d^2f, df \cdot dg$ は 2-form となる。 V の局所座標系 (x^i) に対し, (x^i, dx^i) は $T(V)$ の局所座標系, $(x^i, dx^i, dx^i \cdot dx^j \ (i \geq j))$ は $\mathcal{Z}(V)$ の局所座標系である。

各点 $a \in V$ に対して, $\mathcal{Z}_a(V)$ から $T_a(V)$ への線型写像 Γ が, $\Gamma(D_i) = D_i$ を満たすとき, a における接続と呼ばれる。

Christoffel の記号 Γ_{ij}^k を用いて, $\Gamma(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k(\omega) D_k$ と書ける.
 ($\sum_{k=1}^n$ を省略している. 今後お紛らわしい場合を除いて Σ を省略する.) 我々が用いる接続は“ねじれ”のないものである.
 V 上の接続を通常の方法で定義し, 同じ文字 Γ を表す. 双対写像もやはり同じ文字 Γ を表す.

今後 semimartingale は連続な path をもつものだけと扱う. V 値過程 (X_t) が, 任意の $f \in C^\infty(V)$ に対して $(f(X_t))$ が $\mathbb{R}$ 値 semimartingale となるとき, V -semimartingale と呼ばれる. 伊藤の公式により

$$d^2 X_t \equiv dX_t^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j \rangle_t D_{ij}$$

$$d^2 \tilde{X}_t \equiv d\tilde{X}_t^i D_i + \frac{1}{2} d\langle X^i, X^j \rangle_t D_{ij}$$

は 2-tangent vector の様に扱える (Schwartz の原理). V -semimartingale (X_t) が

$$\Gamma(d^2 \tilde{X}_t) = 0$$

を満たすとき, Γ -martingale と呼ばれる. この条件は

$$d\tilde{X}_t^i + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

と同値である。ここで、 $\tilde{X}$ は martingale 項, $\tilde{X}$ は finite variation 項を表す。また話しを簡単にする為、座標系 (x^i) は大域的に定義されているものとし、 $X^i = x^i(X)$ と表している。

2-form $\omega = a_i dx^i + a_{ij} dx^i dx^j$ に対し、V-semimartingale (X_t) に対し、 ω の確率積分 $\int_{X_0}^t \omega$ は

$$\int_{X_0}^t \omega = \int_0^t a_i(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t a_{ij}(X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s$$

により定義する。1-form ω に対し、V-semimartingale (X_t) に対し、Stratonovich 積分 $(S) \int_{X_0}^t \omega$, Ito 積分 $(I) \int_{X_0}^t \omega$ はそれぞれ

$$(S) \int_{X_0}^t \omega \equiv \int_{X_0}^t d\omega, \quad (I) \int_{X_0}^t \omega \equiv \int_{X_0}^t \Gamma(\omega)$$

により定義する。これから一般の場合に well-defined であることは 1 の命題を使て証明される。

V-semimartingale (X_t) に対し、 (X_t) が Γ -martingale であることと $(I) \int_{X_0}^t \omega$ が $\mathbb{R}$ 値 local martingale ($\forall \omega: 1\text{-form}$) であることは同値である。

§.2 収束定理

martingale 収束定理を拡張するには scalar quadratic variation を考えるのが有効である。以下でそれを定義する。

$(X_t) \in V$ -semimartingale とし, $X_0 = x_0$ を固定しておく。

(X_t) に沿った確率平行移動 $\Phi_t: T_{x_0}(V) \rightarrow T_{X_t}(V)$ が与えられているとき, T_{x_0} -semimartingale (ξ_t) が

$$\xi_t \equiv \int_0^t \Phi_s^{-1}(\Gamma(d^2 X_s))$$

で与えられる。 (ξ_t) は自然に $\mathbb{R}^n$ 値 semimartingale と考えることが出来る。この $(\xi_t) \in (X_t)$ の stochastic development と呼ぶ。
 $(X_t, H_t) \in$ stochastic moving frame, 即ち,

$$\bar{\Phi}_t: T_{x_0}(V) \ni (H_{i0}) \mapsto (H_{it}) \in T_{X_t}(V)$$

とする。また, $\xi_t = \sum_{\alpha=1}^n \xi_t^\alpha H_{\alpha 0}$, $D_i = \sum_{\alpha=1}^n R_{it}^\alpha H_{\alpha t}$ とおく。

$$d\xi_t^\alpha = R_{it}^\alpha (dX_t^i + \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(X_t) d\langle X^j, X^k \rangle_t)$$

となることがわかる。これから

$(\tilde{z}_t)$ が $\mathbb{R}^n$ 値 local martingale

$\Leftrightarrow (X_t)$ が Γ -martingale

であることが容易にわかる。

さて, V -semimartingale (X_t) の scalar quadratic variation $(\langle X, X \rangle_t) \in d\langle X, X \rangle_t \equiv d\langle \tilde{z}^\alpha, \tilde{z}^\alpha \rangle_t$ によ, り定義する (He-Zheng [4]). 特に, リーマン距離 g が導入され $(H_{\alpha\beta})$ が正規直交であるとき, $g_{ij}(X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t = d\langle \tilde{z}^\alpha, \tilde{z}^\alpha \rangle_t$ である。

任意の $f \in C^\infty(V)$ に対し成立する次の公式は重要である。

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t df(X_s) \circ H_{\alpha s} d\tilde{z}_s^\alpha$$

(*)

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \nabla df(X_s)(H_{\alpha s}, H_{\beta s}) d\langle \tilde{z}^\alpha, \tilde{z}^\beta \rangle_s$$

ただし, ∇ は covariant derivative を表す。

V を リーマン多様体として, Darling, Zheng によ, り次の定理が得られた。

定理 A (Darling [2]) $V \cup \{\delta\}$ を V の 1 点コンパクト化とする。このとき, Γ -martingale (X_t) に対し

$$\{\langle X, X \rangle_\infty < \infty\} \subset_{\text{a.p.}} \{\exists X_\infty \in V \cup \{\delta\}\}$$

が成立する。

定理 B (Zheng [7]) Γ -martingale (X_t) に対して

$$\{\exists X_\infty \in V\} \subset_{\text{a.p.}} \{\langle X, X \rangle_\infty < \infty\}$$

が成立する。

S.3 定理 A の証明

ここでは、公式(*)を用いて定理 A の証明の概略を述べよう。
Meyer により、任意の $f \in C_c^\infty(V)$ に対して $f(X_t)$ が収束することを示せばよいことが指摘されている。公式(*)により、任意の $f \in C_c^\infty(V)$ に対して

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t a_\alpha(\rho) d\tilde{z}_\rho^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t b_{\alpha\beta}(\rho) d\langle \tilde{z}^\alpha, \tilde{z}^\beta \rangle_\rho$$

とかける。そこで、 $a_\alpha(\omega) = df(X_\rho) \circ H_{\alpha\rho}$, $b_{\alpha\beta}(\omega) = \nabla df(X_\rho)(H_{\alpha\rho}, H_{\beta\rho})$

とおいてゐる。このとき、 $df, \nabla df$ は有界であり、 $(H_{\alpha\beta})$ が正規直交であるから、定数 $K > 0$ が存在して、各 $\rho \geq 0$ に対して、

$$\sup_{\alpha} |a_{\alpha}(\rho)| < K, \quad \sup_{\alpha, \beta} |b_{\alpha\beta}(\rho)| < K$$

が成立する。ところで、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\cdot} a_{\alpha}(\rho) d\zeta_{\rho}^{\alpha}, \int_0^{\cdot} a_{\beta}(\rho) d\zeta_{\rho}^{\beta} \right\rangle_{\infty} &\leq \int_0^{\infty} |a_{\alpha}(\rho)| |a_{\beta}(\rho)| d\langle \zeta^{\alpha}, \zeta^{\beta} \rangle_{\rho} \\ &\leq n K^2 \langle \zeta, \zeta \rangle_{\infty} \end{aligned}$$

であるから、条件 $\langle X, X \rangle_{\infty} = \langle \zeta, \zeta \rangle_{\infty} < \infty$ により $\int_0^t a_{\alpha}(\rho) d\zeta_{\rho}^{\alpha}$ の収束が得られる。一方、

$$\int_0^{\infty} |b_{\alpha\beta}(\rho)| d\langle \zeta^{\alpha}, \zeta^{\beta} \rangle_{\rho} \leq n K \langle \zeta, \zeta \rangle_{\infty}$$

であるから、 $\int_0^t b_{\alpha\beta}(\rho) d\langle \zeta^{\alpha}, \zeta^{\beta} \rangle_{\rho}$ の収束も得られる。以上から $f(X_t)$ の収束が示されたので、求める結果が従う。

He-Zheng [4] は §.2 を導入した方法で, Γ -martingale X の scalar quadratic variation $\langle X, X \rangle$ を定義し, 定理 A の拡張を試みている。

ここでは定理 B の証明を与えなかったが, Zheng [7] は immersion を用いて証明を与えている。He-Zheng [4] では定理 B の拡張には成功していない。また, 定理 B は, 「定理 A の逆が成立するか」という問題の完全な解答ではない。これは問題として依然として残されているように思う。

最近送られてきた Darling の pre print 等では, 特定の多様体において細かい性質を調べているようであるが, 今後の研究に待たなければならぬ問題も多いように思われる。

References

- [1] R.W.R. Darling, Martingales on manifolds and geometric Ito calculus, Ph.D. Thesis, Univ. of Warwick, England, 1982.
- [2] R.W.R. Darling, Convergence of martingales in a Riemannian manifold, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 19 (1983), 753-763.
- [3] S.W. He, J.A. Yan and W.A. Zheng, Sur la convergence des semimartingales continues dans R^n et des martingales dans une variété, Lecture Notes in Math., 986 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.
- [4] S.W. He and W.A. Zheng, Remarques sur la convergence des martingales dans les variétés, L. N. in Math., 1059 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.
- [5] P.A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, L. N. in Math., 850 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [6] L. Schwartz, Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytique complexes, L. M. in Math., 780 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [7] W.A. Zheng, Sur la convergence des martingales dans une variété riemannienne, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 63 (1983), 511-515.