

「グラフ極限で定義される Idempotential」

に関するノート

神戸大 理 麦 林 布 道

香川大 教育 青 木 昌 三

研究会で述べたことは論文として「プログレス」に投稿
中であるので、¹⁾ 二二では、論文に書かれていない二つのこと
がらをメモしておくことにする。その一つは、グラフ極限に
よって自己共役演算子を定義する論理で、Glimm-Jaffe の
結果、よく文献²⁾ の整理統合したもうとすぎないが、重
要であるのではつきりさせておきたい。他は、いわゆる高次
評価の数学的帰納法による証明に関するものである。

I. $\{H_n\}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で稠密な定義域 $D(H_n)$
をもつ自己共役演算子の列とする。各々の $D(H_n)$ からベクト
ル ϕ_n をとってきて、 $\chi_n = H_n \phi_n$ とおいたとき、 $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n$
および $\chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n$ が存在するといふ。^{*)} 二のような極限へ

^{*)} 以下において、 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ はすべて強収束を意味する。

クトルの全体 $\{\phi\}$, 極限ベクトルの組の全体 $\{\phi, \chi\}$ をそれぞれ D_∞ , G_∞ で表わす。 G_∞ がある対称演算子 H_∞ のグラフになっているための必要十分条件は, D_∞ が $\mathcal{D}_H$ で稠密なことである。 H_∞ を $\{H_n\}$ の グラフ極限 という。 H_∞ の自己共役性というには, 次の定理が便利である。

定理 $\{H_n\}$ をヒルベルト空間で稠密な定義域をもち, n と関して一様 below 有界な自己共役演算子の列とする。 $\{H_n\}$ のグラフ極限があり, レゾルベント $R_n(z) = (H_n - z)^{-1}$ が z のある負の値に対して $R(z)$ に強収束すれば, $R(z)^{-1}$ が存在し, $R(z)^{-1} + z$ で定義される演算子は自己共役で z に依らない。

定理を証明する前に, この定理が場の量子論に適用される一般的情况を例をあげて説明しておこう。

構成的な場の量子論では, H_n は切断を許した系の Hamiltonian を表わし, n 有限は強い切断に, $n \rightarrow \infty$ は切断をある程度ゆるめるか, または切断を全く取り除くことに相当する。 n 有限のときの H_n の自己共役性は, 通常, 正則摂動または異常摂動で確かめられる。 H_n が n と関して一様 below 有界であることを最も端的にいうには, N を 10^6 の演算子としたとき, 一次評価

$$(1) \quad N \leq \text{const} (H_n + b)$$

が n に因して一様になり立つ (即ち, const および b が n に無関係とれる) ことを証明すればよい。

例 1. 空間切断を伴った Y_2 理論^{*})

運動量切断を併せて行えば, ボゾンの質量 $\omega(k) = m$ と $i\hbar$ Idamiltonian H_n は正則擾動と異常擾動をくみ合せて, 自己共役演算子として定義される。 $n \rightarrow \infty$ は運動量切断を取り除くことに当る。³⁾ $n \rightarrow \infty$ とともに, ボゾンの質量 $\omega(k) = m$ は無限大となる。(1) の一様評価は Dimock によって与えられる。⁴⁾

例 2. 中性スカラ一模型.

ボゾンの静止質量を $m (> 0)$, エネルギーを $\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2}$ とする。また, ボゾンの消滅, 生成演算子はそれぞれ $a(\bar{f}) = \int a(k) \bar{f}(k) dk$, $a^*(g) = \int a^*(k) g(k) dk$ ($f, g \in L_2(\mathbb{R}^3)$) と与えられる, 交換関係 $[a(\bar{f}), a^*(g)] = (f, g)$ をみたす。系の Idamiltonian は形式的に

$$(2) \quad H = H_0 + H_1 + C$$

^{*}) Y_2 理論とは, 二次元時空における Yukawa 型相互作用の理論をいう。

と書かれる。

$$(3) \quad H_0 = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk$$

は自由 Hamiltonian,

$$(4) \quad H_2 = \int (v(k) a^*(k) + \bar{v}(k) a(k)) dk$$

は相互作用 Hamiltonian,

$$(5) \quad C = \int |v(k)|^2 \omega(k)^{-1} dk$$

は、真空のエネルギーのくりこみを表わす項である。 $[2\omega]^{1/2}v$ は相互作用の項のくりこみを取るためのフーリエ変換になっている。 H_0 は Fock 空間の本質的自己共役な演算子で、内包をとることで、自己共役とみられる。

また、内包 $v(k)$ のノルム

$$\|v\|_j = \left[\int |v(k)|^2 \omega(k)^{-j+1} dk \right]^{1/2} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

を導入し、各ノルムによって内包は内包空間

$$G_j = \{v(k) : \|v\|_j < \infty\}$$

を考える。容易にわかるように、 $j < j'$ のとき、 G_j は $\|\cdot\|_{j'}$ ノルムによる位相で $G_{j'}$ の稠密な部分空間になっている。

今までに知られている結果は次のとおりである。 $v \in G_1$ のとき、Hamiltonian (2) は正則擾動の理論によって定義される。 $v \in G_2$ のとき、(2) は二次形式の正則擾動として意味づけられる。これらの場合、 C はともに有限である。 $v \in G_3$

でかつ $v \in G_2$ ならば, C は無限大となるから, U はタリ演算子

$$(6) \quad U = \exp \left\{ \int (\bar{v}(k) a(k) - v(k) a^*(k)) \omega(k)^{-1} dk \right\}$$

はそのままの意味を持ち続け, 全く形式的に計算をすれば

$$(7) \quad H = U H_0 U^{-1}$$

となる。この結果の数学的に厳密な解釈が定理を適用するに

とよんでえられるのである。そう際, H_n としては, (2)

の中に入っている $v \in G_3$ を $\|\cdot\|_3$ ノルムで $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_3 = 0$

の如く近似する $v_n \in G_1$ で置き換えてえらるものとすると

よい。なお, 相互作用に相当する v は G_4 に属す。

定理の証明

$$\Delta = \{z; \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(z) = R(z)\}$$

とかくと, 十分大きい n に対して, Δ は H_n のレゾルベント

集合 $\rho(H_n)$ に含まれる。 z_1, z_2 のとき, $R(z)$ はレゾルベント

方程式

$$(8) \quad R(z_1) - R(z_2) = (z_1 - z_2) R(z_1) R(z_2)$$

を満たす。この方程式から, $R(z)$ の値域と核は z に無関係

であることがいえる。

H_n は下に一様有界であるから, $\bigcap \rho(H_n)$ に属する負の
数 $-b_0$ が存在する (一次評価 (1) が証明できれば, $b_0 = b$ と

とつてよい)。直ちにわかるように、 $\forall z \in (-\infty, -b_0)$ に対して、
 $\|z R_n(z)\| < M$ が n によらずに成り立つ。 $H_\infty \in \{H_n\}$
 の極限とする。 H_∞ の極限は

$$G_\infty = \{(\phi, \chi); \phi = \lim \phi_n, \chi = \lim H_n \phi_n, \phi_n \in D(H_n)\}$$

であり、 H_∞ の定義域

$$D_\infty = \{\phi; (\phi, \chi) \in G_\infty\}$$

の稠密性は仮定されている。

$\forall \psi \in \mathcal{D}_\psi$ と $\forall z \in (-\infty, -b_0)$ について $\|z R(z)\psi + \psi\|$ を考えよう。

$$\|z R(z)\psi + \psi\| \leq \|z R(z)\psi - z R_n(z)\psi\| + \|z R_n(z)(\psi - \phi)\|$$

$$+ \|z R_n(z)\phi + \phi\| + \|\psi - \phi\|.$$

ただし、 ϕ は D_∞ からとってきた。不等式の右辺の最初の二項はそれぞれ

$$\|z R(z)\psi - z R_n(z)\psi\| \leq |z| \|(R(z) - R_n(z))\psi\|,$$

$$\|z R_n(z)(\psi - \phi)\| \leq M \|\psi - \phi\|$$

となり、次の項は、 $\{\phi_n; \phi_n \in D(H_n)\}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$ とする

ように列として

$$\begin{aligned} \|z R_n(z)\phi + \phi\| &\leq \|z R_n(z)(\phi - \phi_n)\| + \|z R_n(z)\phi_n + \phi_n\| \\ &\quad + \|\phi - \phi_n\|. \end{aligned}$$

と書かれる。この各項は次のように評価される。

$$\|z R_n(z)(\phi - \phi_n)\| \leq M \|\phi - \phi_n\|,$$

$$\|z R_n(z) \phi_n + \phi_n\| = \|R_n(z) H_n \phi_n\| \leq \frac{M}{|z|} \|H_n \phi_n\|.$$

従って、これを総合すれば

$$(9) \quad \|z R(z) \psi + \psi\| \leq \frac{M}{|z|} \|H_n \phi_n\| + |z| \| (R(z) - R_n(z)) \psi \| \\ + (M+1) \|\psi - \phi\| + (M+1) \|\phi - \phi_n\|$$

が任意の n と $\forall z \in (-\infty, -b_0)$ に対して成り立つことがわかる。

先ず $|z|$ を十分大きくする。その結果、(9) の第1項は n によって一様に小さくなる。次いで、 z の値をそのまゝ固定して、 n を十分大きくすると、(9) の第2項と第4項はいくらでも小さくなる。 D_∞ の稠密性が仮定されているから、第3項もまた小さくできる。よって、 $z \in (-\infty, -b_0)$ で $|z|$ が十分大きいとき、 $\forall \psi \in \mathcal{D}_g$ によって $\|z R(z) \psi + \psi\|$ はいくらでも小さくなることが示せた。この結果から二つのことがいえる。第一、 $R(z)$ の核はベクトル 0 のみから成る。従って、 $R(z)$ は逆をもつ。第二、任意の $\psi \in \mathcal{D}_g$ は $-z R(z) \psi$ で近似できる。従って、 $R(z)$ の値域は $\mathcal{D}_g$ で稠密である。故に、 $H = R(z)^{-1} + z$ によって、稠密な定義域をもつ演算子 H が定まる。この定義が z とは無関係なことはレゾルバント方程式(8)から明らか。 $z \in (-\infty, -b_0)$ のとき $R(z)$ は対称かつ有界な演算子であるから、 H は自己共役である。■

II. 強い切断のある λ の λ -Hamiltonian の定義に便する振動論は, (a) 演算子の正則振動, (b) 二次形式の正則振動および (c) 異常振動である。これらの振動論によれば, 自乗の演算子 N , 自由 λ -Hamiltonian H_0 および全 λ -Hamiltonian H の定義域の間には次の関係がある。

$$(a) \quad D(N) \supset D(H_0) = D(H),$$

$$(b) \quad D(N^{1/2}) \supset D(H_0^{1/2}) = D((H+b)^{1/2}),$$

$$(c) \quad D(N) \supset D(H_0) \supset D(H).$$

二次形式の正則振動における定数 b は H を正定値にするためのものである。

定義域の包含関係から直ちに, 次の補題によって N と H の大きさの比較が出来る。

補題 バナッハ空間において, T を閉演算子, A を可閉 (closable) 演算子とし, $D(T) \subset D(A)$ を仮定する。正数 d が存在して $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$ ならば, $\forall \psi \in D(T)$ に対して

$$\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$$

が成り立つ。

証明 T をバナッハ空間 X からバナッハ空間 Y へ

の閉演算子, A を X から Y' への可閉演算子とする。

$D(T) \subset D(A)$ であるから, $A|D(T)$ を考えれば, これは閉演算子である。適当なノルム $\|\cdot\|$ を導入して, そのノルム空間として $D(T)$ がバナッハ空間

$$\mathcal{X} = \{D(T), \|\cdot\|\}$$

となる。このとき, $A|D(T): \mathcal{X} \rightarrow Y'$ は Banach の閉グラフ定理によって, いちどころで定義された閉演算子, 従って有界演算であることがわかる。即ち, $\forall \psi \in D(T)$ に対して

$$\|A\psi\| \leq c\|\psi\|$$

となる。この c は A と T によって定まる定数である。

閉演算子 T によって補題の条件 $\|T\psi\| \geq d\|\psi\|$ がみたされていれば, $\|\psi\| = \|T\psi\|$ とすることができて, $\|A\psi\| \leq c\|T\psi\|$ となる。■

5) 補題から, (b) については N と H の一次評価を,

(a) と (c) については二次評価を導くことができる。ところで

で, 構成的な場の量子論ではいろいろな所で高次評価を必要

とし, ⁵⁾ 漸近場はその一例である。⁶⁾ 漸近場の存在証明の要訣の

一つは, $a^\#(f)$ を $a(\bar{f})$ または $a^*(f)$ としたとき, H は hamiltonian

H との交換関係 $[a^\#(f), H]$ の定義域が, ある正の整数 l

に対する $D(H^l)$ を含むことを示すにある。⁷⁾ $[a^\#(f), H]$ は

10 級 の 演算子 N の ある中で あさえら れる から, 高次評価

$$(10) \quad N^l \leq \text{const} (H+b)^l \quad l > 1$$

が証明されてい れば 2 の 問題 は 解決する。こゝに b は十分 大きい 正数。

相互作用 Idamiltonian が条件

$$(11) \quad \int dk \| R^{1/2}(-b-w) [a(k), H_1] R^{1/2}(-b) \|^2 < \infty$$

($k \in \mathbb{R}$, $R(z) = (H-z)^{-1}$) をみたすとき, 高次評価 (10) は数学 的帰納法によつて証明できる。

かんたんのため, ボソン場を例にとつて, 一次評価から 二次評価を出す筋道を示そう。他の場合, 一般化教への拡張 は容易である。

$$\begin{aligned} N^2 &= N + \int dk a^*(k) N a(k) \\ &\leq \text{const} (H+b)^2 + \int dk a^*(k) N a(k), \end{aligned}$$

中 1 項に一次評価が使われている。中 2 項もまた $(H+b)^2$ の 定数倍であさえら れることを示す。そのためには, 任意の $\varphi \in D(H)$ をとりてきて, $\psi = R(-b)\varphi$ と書いたとき, 不等式

$$(R(-b)\varphi, \int dk a^*(k) N a(k) R(-b)\varphi) \leq \text{const} \|\varphi\|^2$$

を示せばよい。このため "pull through formula"

$$(12) \quad a(k) R(-b) = R(-b-w) a(k) - R(-b-w) [a(k), H_1] R(-b)$$

を用いて計算を行つて求める結果がえられる。

$$\begin{aligned}
& (R(-b)\varphi, \int dk a^*(k) N a(k) R(-b)\varphi) = \int dk \| N^{1/2} a(k) R(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-\omega) a(k) \varphi \|^2 + 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-\omega) [a(k), H_1] R(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq 2 \int dk \| N^{1/2} R(-b-\omega) (N+2)^{1/2} \|^2 \cdot \| (N+2)^{-1/2} a(k) \varphi \|^2 \\
& \quad + 2 \int dk \| N^{1/2} R^{1/2}(-b-\omega) \|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b-\omega) [a(k), H_1] R^{1/2}(-b) \|^2 \cdot \| R^{1/2}(-b)\varphi \|^2 \\
& \leq \text{const} \int dk \| a(k) (N+1)^{-1/2} \varphi \|^2 + \text{const} \|\varphi\|^2 \\
& \leq \text{const} \|\varphi\|^2
\end{aligned}$$

注意

= 次形式の正則擾動 (b) では, 相互作用

Hamiltonian はベクトル 0 を除く $\mathcal{H}_0$ の $\mathcal{H}_0$ 上にて定義されないので, 条件式 (11) と pull through formula (12) に H_1 が入っているのが気になる。このことは次のように解決できる。
= 次形式の正則擾動の一般条件

$$|(\psi, H_1 \psi)| \leq c (\psi, H_0 \psi) + d (\psi, \psi)$$

より, 対称演算子 $(cH_0 + d)^{-1/2} H_1 (cH_0 + d)^{-1/2}$ は $\mathcal{H}_0$ の補空間領域の上で有界となり, その閉包 B は $\mathcal{H}_0$ で有界な自己共役演算子である。 $[a(k), H_1]$ の両側に $R^{1/2}(-b-\omega)$ と $R^{1/2}(-b)$ があふ限り, H_1 を $(cH_0 + d)^{1/2} B (cH_0 + d)^{1/2}$ で読みかえれば, (11) と (12) は = 次形式の正則擾動とついても意味をとつていられる。

参考文献

- 1) M. Aoki and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. to appear.
- 2) J. Glimm and A. Jaffe, Commun. Pure Appl. Math. 22
(1969), 401-414.
- 3) J. Glimm and A. Jaffe, Am. Phys. 60 (1970), 321-383;
J. Funct. Anal. 7 (1971), 323-357.
- 4) J. Dimock, Harvard University preprint (1971)
- 5) 331213, L. Rosen, Commun. Pure Appl. Math. 24
(1971), 417-457.
- 6) N. Mugibayashi, preprint (1971) (A talk delivered at the
International Seminar on Statistical Mechanics and Field
Theory, Idarfa, Israel, 1971 August)
- 7) Y. Kato and N. Mugibayashi, Prog. Theor. Phys. 30 (1963),
103-133.