

大域結合テント写像の集団運動のリアプノフ解析¹

京都大学 理学研究科 守田 智

集団運動とリアプノフ数との関係について大域結合テント写像を用い研究した。集団運動の兆候がリアプノフスペクトルに現れる例を示しその解析を行なった。

1. モデル

非平衡状態で大きい実質的自由度を持つ系の協同現象について考察を行う。非平衡系のダイナミクスの研究には、系を相互作用するいくつかのダイナミカルなエレメントの集団であるとみなしてモデルを導入することが有効である。このように導入されたモデルは、エレメントのダイナミカルな性質と相互作用の形態とによって分類される。ここでは、エレメントとしてテントマップ、相互作用として一様な大域結合を採用した数理モデルを使い、このような非線形システムが持っている性質を研究した。

実際、用いたモデルは次のようなものである。

$$x_{n+1}(i) = f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{i'=1}^N \{f(x_n(i')) - f(x_n(i))\} \quad (1)$$

$$f(x) = 1 - a|x|$$

n は離散時間、 i はエレメントを区別するための番号、 N はシステムサイズである。また、テントマップの傾き $a(1 < a < 2)$ と結合の強さ ϵ の2つのパラメータを持つ。これらのパラメータの値によっていろいろな状態が存在する。 $a(1 - \epsilon) < 1$ の領域では、すべてのエレメントが等しい値をとり、系全体で1次元カオスになることがわかる。一方、 $a(1 - \epsilon) > 1$ の領域では、すべてのエレメントは異なる値をとりつつ、おのおののカオス的に振動している。前者をシンクロナイズ状態、後者をデシンクロナイズ状態と呼ぶ。デシンクロナイズの領域での系の集団的ふるまいをリアプノフスペクトルから考察した。

2. リアプノフ解析

系の状態は、巨視的な変数としての平均場

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_n(i))$$

の運動によって見る事ができる。図1・図2は、平均場の時間変化の例をリターンマップで見たものである。式(1)を、平均場 h_n を用いて書き直すと $x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \epsilon h_n$ となり、大域結合は平均場による写像の平行移動として行なわれていることが分かる。この平行移動した写像を $F_n(x) \equiv (1 - \epsilon)(1 - a|x|) + \epsilon h_n$ と書くことにする。平均場の時間変化が与える効果を無視して考えると、個々の要素 $x_n(i)$ の時間的な発散の度合は $\lambda_{local} = \log(a(1 - \epsilon))$ になる。リ

¹ 題名は変更した

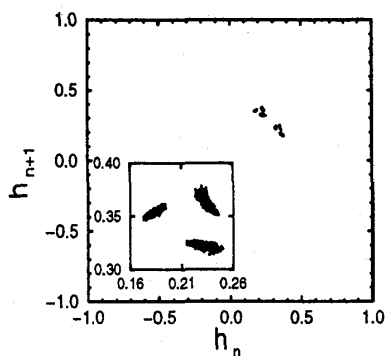


図 1: $a = 1.99$, $\epsilon = 0.35$ の時の h_n の運動。中の図は拡大したものである

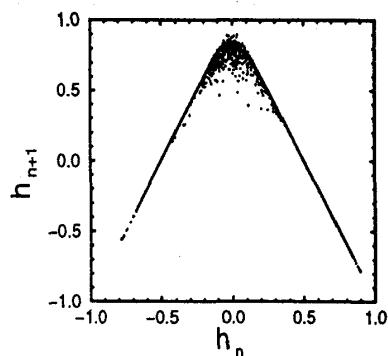


図 2: $a = 1.99$, $\epsilon = 0.45$ の時の h_n の運動

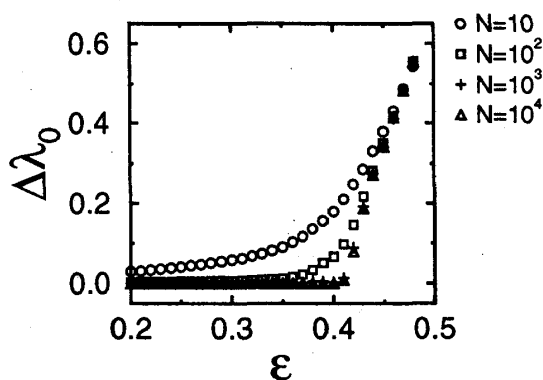


図 3: $a=1.99$ で ϵ を変化させた時の $\Delta\lambda_0$

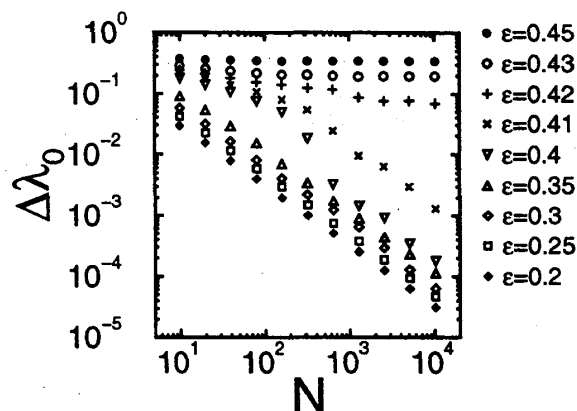


図 4: $a=1.99$ で n を変化させた時の $\Delta\lambda_0$

アプノフ数と ローカルな指数発散率との差 $\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{local}$ に集団運動の効果が現れると考えられる。そのうち最大リアプノフ数に関するもの $\Delta\lambda_0$ の変化を図 3・図 4 に図示した。ここでテントマップの傾きを $a = 1.99$ に固定しているが、それ以外の a についても定性的に同じグラフになる。 $a = 1.99$ の時、 $\epsilon < 0.497\dots$ でデシンクロナイズ状態になるが、図 3 より $\epsilon = \epsilon_t \sim 0.4$ に明らかな転移が存在している。

図 4 に見られるよう、 $\epsilon < \epsilon_t$ では、 $\Delta\lambda_0 \propto 1/N$ に従っている。このパラメーター領域で $N\Delta\lambda_i$ を i/n の関数としてプロットしたものが図 5・図 6 である。 $N\Delta\lambda_i$ がシステムサイズによらず一致していることが分かる。一方 $\epsilon > \epsilon_t$ では、図 4 から分かるようにシステムサイズを大きくすると $\Delta\lambda_0$ は一定になっている。このパラメーター領域での $N\Delta\lambda_i$ の形を図 7 に与えた。図 8 は、図 7 の拡大図である。 i/n の大きい所ではシステムサイズによらないが、 $i/n = 0$ でシステムサイズによる違いが見られる。このシステムサイズによる違いは、系の集団的な運動によるものと

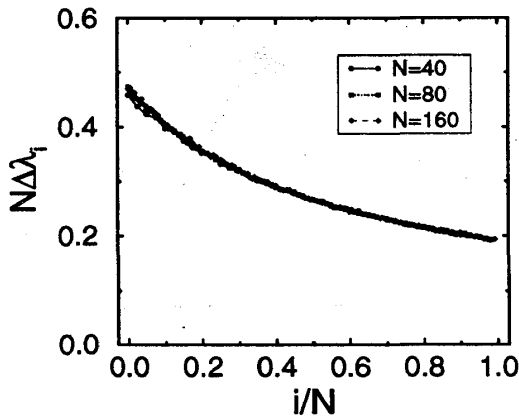


図 5: $a = 1.99, \epsilon = 0.25$ の時の $N\Delta\lambda_i$

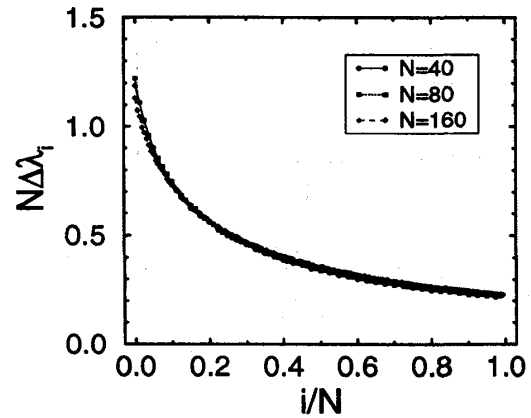


図 6: $a = 1.99, \epsilon = 0.35$ の時の $N\Delta\lambda_i$

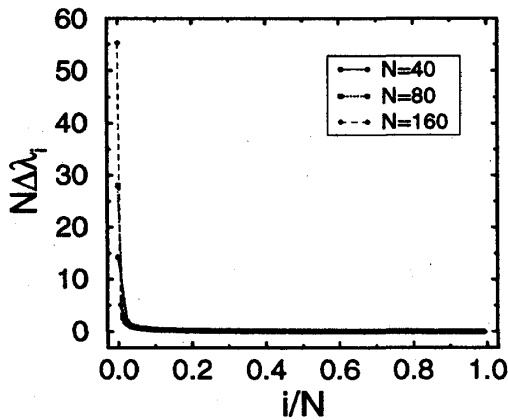


図 7: $a = 1.99, \epsilon = 0.5$ の時の $N\Delta\lambda_i$

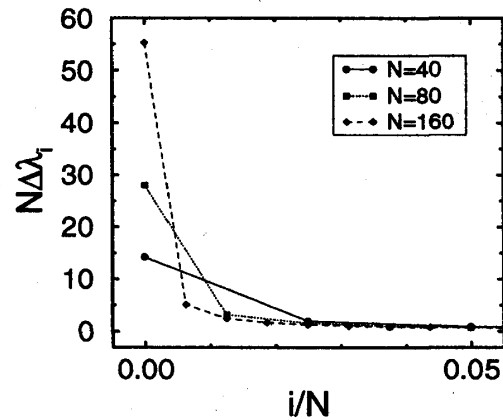


図 8: 図 7 の拡大図

予想される。このパラメーターで平均場は、元の 1 次元カオスに近い振舞いをしている (図 2)。

3. Nonlinear Frobenius-Perron Equation

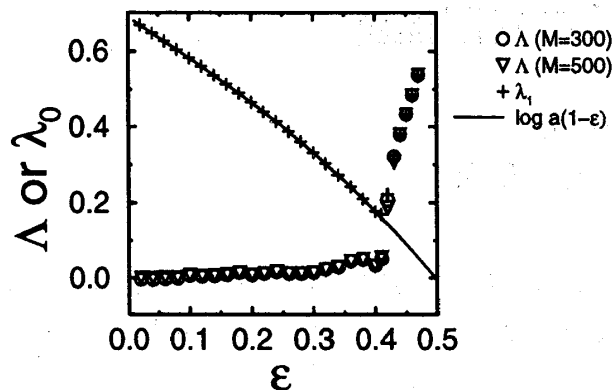
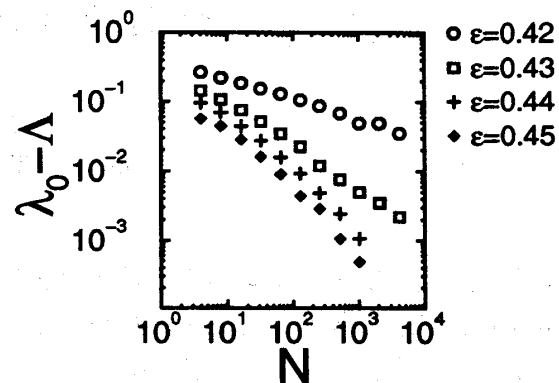
系 (1) の状態は、 $N \rightarrow \infty$ で分布関数で表現できる。 $x_n(i)$ の時間 n での分布を $\rho_n(x)$ と表すとその時間変化は、nonlinear Frobenius-Perron equation (NFPE) を用いて

$$\rho_{n+1}(x) = \frac{\rho_n(y_+) + \rho_n(y_-)}{a(1-\epsilon)}$$

と書ける。ここで y_+ and y_- は、 x の逆像であり、 $x = F_n(y_{\pm})$ と書ける。分布関数がステップ関数のような形をしていることから次のような展開式を用いる。

$$\rho_n(x) = \sum_{j=0}^M b_n^j \theta(c_n^j - x)$$

この展開は、 $a(1-\epsilon) < 1$ で有効であり、元々無限次元であった分布関数の時間変化を $2(M+1)$

図 9: Λ 、 λ_0 、 Λ_{local} の比較図 10: λ_0 と Λ の比較

次元の力学系で近似できる。 b_n^j, c_n^j の時間変化は、

$$\begin{aligned} b_{n+1}^0 &= \frac{2}{a(1-\epsilon)} \sum_{j'=0}^M b_n^{j'} \theta(c_n^{j'}) \\ c_{n+1}^0 &= F_n(0) \\ b_{n+1}^{j+1} &= -\frac{1}{a(1-\epsilon)} b_n^j (2\theta(c_n^j) - 1) \\ c_{n+1}^{j+1} &= F_n(c_n^j) \end{aligned}$$

と書ける。この $2(M+1)$ 次元の力学系で計算されるリアプノフ数を式 (1) から計算されるリアプノフ数と混同を避けるため NFPE の指数的発散率と呼び Λ と書くことにしよう。この指数は、 $N \rightarrow \infty$ での平均場の軌道拡散率に対応するものである。図 9 から $\epsilon < \epsilon_t$ では $\lambda_0 \sim \lambda_{local}$ 、 $\epsilon > \epsilon_t$ では $\lambda_0 \sim \Lambda$ であることが分かる。 $\epsilon > \epsilon_t$ において、システムサイズの増大に伴い λ_0 が Λ に近付いていく (図 10)。これが 図 7・図 8 のリアプノフスペクトルのシンギュラリティの原因である。

4. まとめ

このように 最大リアプノフ数は、 λ_{local} と Λ との大きい方に漸近する。リアプノフスペクトルに集団運動の兆候が現れるためにはローカルなダイナミクスが持つ軌道発散率より集団運動が持つ軌道発散率が必要であることが示唆される。

文献

- [1] K. Kaneko, Physica D **55** (1992) 368.
- [2] K. Kaneko, Physica D **86** (1995) 158.
- [3] S.V. Ershov and A.B. Potapov, Physica D **86** (1995) 523.
- [4] S. Morita, Phys. Lett. A **211** (1996) 258
- [5] S. Morita, accepted to Phys. Lett. A