

Simplicial system について

東北大 教養 武元英夫

Choquet の理論の概説と、これの operator algebra への応用について話を進める。Choquet の理論については多くの準備を必要とするが、ここでは operator algebra への応用も二、三の話だけにとどまることにならと思われる。ここでの内容は次の論文を主としている。

Dang-Ngoc-Nghiem : On the integral representation of states on a C^* -algebra, Commun. math. Phys. 40(75)

D. Ruelle : Statistical Mechanics, New York, Benjamin, 1969.

Choquet の理論に関すること

X : locally convex space, E : X の compact convex subset

$C_R(E)$: E 上の real valued continuous functions 全体の set

μ : E 上の probability measure (ie. μ : non-negative

regular Borel measure on E , $\mu(E)=1$)

$s \in E$ が μ に represented であるとは, $\forall f \in E^*$ に対して, $f(s) = \int_E f(g) d\mu(g)$ が成立する s である。

このとき, " s は μ の barycenter" or " s は μ の resultant である" といわれ, $s = r(\mu)$ とかけられる。

上の話は C^* -algebra に対応して考えられるようになる。

$\mathcal{A}$: C^* -algebra with the identity 1,

$\mathcal{A}^*$: $\mathcal{A}$ の dual space, $\mathcal{A}_h^*$: $\mathcal{A}^*$ の self-adjoint part,

E : $\mathcal{A}$ の states 全体の set,

このとき, $\mathcal{A} \ni a \rightarrow \hat{a} \in C(E): \hat{a}(s) = s(a)$ である。

$s \in E$ に対して, $(\pi_s, \mathcal{H}_s, \xi_s)$ は s による canonical representation である。 $\mathcal{B} \in \pi_s(\mathcal{A})'$ の abelian subalgebra であるとき, E 上の probability measure μ が存在して,

$$s(a) = \int_E \hat{a}(g) d\mu(g) \quad \text{for } \forall a \in \mathcal{A}$$

が成立する。

この時, operator algebra の reduction theory の研究において, μ の support が $\text{ex} E$ (E の extreme points 全体の

set, ie. $\mathcal{O}$ の pure states 全体の set) に含まれるかということ
 が問題となる。

話を前に戻そう。 $s \in E$ に対して, δ_s を s の dirac measure
 とすると, 当然, $s = r(\delta_s)$ となっている。ここで, 問題とな
 ることは, $s \in E$ に対して, $r(\mu) = s$, $\text{supp}(\mu) \subset \text{ex} E$ となる
 μ が存在するか, 更に, 存在したら, それはどのような場合に
 一意に定まるかということである。

上の問題に対して, Choquet-Bishop-de Leeuw は non-negative
 measure の set にある種の order を導入することによって,
 それらの議論を展開している。その時, 上の二番目の問題と
 E が simplex であるということが知られ, この simplex とい
 うことが, operator algebra の dynamical system (A, G) の
 simplicial system ということに利用されている。

まず, Choquet の理論に関する主な事柄を述べる。

C : E 上の Continuous convex functions 全体の set.

A : E 上の Continuous affine functions 全体の set.

$\Rightarrow$

$C - C = \{f - g : f, g \in C\}$ は $C_R(E)$ で、usual order での lattice になっている。しかも、 E の points を separate することから、 $C - C$ は $C_R(E)$ で dense である。

$\mu, \nu : E$ 上の non-negative measure,

$$\mu > \nu \stackrel{\text{def.}}{\iff} \mu(f) \geq \nu(f) \quad \text{for } \forall f \in C.$$

これは、convex function の性質を差之ると、 $\mu > \nu$ になることは、 μ の support の方が ν の support よりも、extreme points の set, $\text{ex}E$ によって決まることかわかる。そして、上の order に関して、maximal element が存在している。

定理. $\lambda : E$ 上の non-negative measure,

$$\Rightarrow \exists \mu : \text{maximal measure, } \mu > \lambda.$$

maximal measure の存在がわかったのであるが、なぜかは、その maximal measure がどこに support しているかという事について次の結果が知られている。

定義 $f \in C_R(E)$, $s \in E$ に対して、

$$\bar{f}(s) = \inf \{h(s) : h \in A, h \geq f\}$$

でもって、関数 $\bar{f}$ を定める。

そのとき, $\bar{f}$ は concave (ie. $-\bar{f}$ は convex), upper semi-continuous となる。特に, f が concave のときは $f = \bar{f}$ が成立する。

補題. (1) $\text{ex} E = \bigcap_{f \in C} \{s \in E : \bar{f}(s) = f(s)\}$

(2) μ : maximal measure on $E \Rightarrow \mu(f) = \mu(\bar{f})$ for $\forall f \in C$

上の補題から, μ が maximal measure のときは, μ の support が, $\text{ex} E$ に concentrate していることがわかる。

(ie. D : Baire set, $D \cap \text{ex} E = \emptyset \Rightarrow \mu(D) = 0$). さらに,

$\text{ex} E$ がどのような集合であるかということによって, $\text{supp}(\mu) \subset \text{ex} E$ ということが調べられる。ie. $\text{ex} E$ の measurability がわかる。 E が metrizable のときは $\text{ex} E$ が G_δ -set となる。これは C^* -algebra $\mathcal{O}_E$ が separable のとき, E が metrizable になることがわかっていて, operator algebra への応用をもつ。

定理. X : locally convex space,

E : metrizable compact convex set of X

$\Rightarrow \text{ex} E$: G_δ -set.

maximal measure の uniqueness のために, simplex の notation を導入する。

E : convex cone P の base としようとし, E に order $s \geq t \stackrel{\text{def.}}{\iff} s - t \in P$ を導入する。そのとき, 我々は次の事を示す。

P とし, $\tilde{E} = \{ \alpha s : \alpha \geq 0, s \in E \}$ とすると, E は $\tilde{E}$ の base になっていく。これから,

定義. E : simplex $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \tilde{E} - \tilde{E}$: lattice

そのとき, 次の事が言える。

定理. 次の同値である。

- (1) E が simplex である。
- (2) 各 $s \in E$ に対して, $\exists \mu$: maximal measure, $\nu(\mu) = s$.

Dynamical system $\wedge$ の $=, \equiv$ の応用について

ここでは, Choquet の理論による maximal measure, simplex についての dynamical system $\wedge$ の $=, \equiv$ の応用について述

ある。

$\mathcal{A}$: C^* -algebra with the identity

G : group of automorphisms of $\mathcal{A}$

$\tau : G \ni g \rightarrow \tau_g \in \text{Aut}^* \mathcal{A}$

$I = \{ \varphi \in E : \varphi(\tau_g a) = \varphi(a), g \in G, a \in \mathcal{A} \}$

ie, I は $\mathcal{A}$ 上の G -invariant states の set である。

$s \in I$, (π_s, U_s, ξ_s) : canonical representation induced by s

U_g^s : canonical representation of τ_g

such that $U_g^s \xi_s = \xi_s$, $U_g^s \pi_s(a) U_g^{s-1} = \pi_s(\tau_g a)$

今後, U_g^s を U_g , ξ_s を ξ とかいていく。 $\mathcal{R}_s = \{ \pi_s(\mathcal{A}), U_g \}''$

とおく。そのとき, $\mathcal{R}_s'$ は U_g -invariant な $\pi_s(\mathcal{A})'$ のえからなる von Neumann algebra となる。

$s \in E$ に対して, $\mathcal{B}(G)$ (無/変/換) を $\pi_s(\mathcal{A})'$ の/ τ 変/
abelian von Neumann subalgebra とする。

$\exists \nu_B^s : E \rightarrow \mathbb{R}$ a probability measure,

$\exists \Lambda : \mathcal{B} \rightarrow L^\infty(E, \nu_B^s)$, $*$ -isomorphism

$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ に対して,

$$(e \pi_s(a_1) e \dots e \pi_s(a_n) e \xi_s | \xi_s) = \int_E \hat{a}_1(\varphi) \dots \hat{a}_n(\varphi) d\nu_B^s(\varphi)$$

$$(\Lambda'(f) \xi_s | \xi_s) = \int_E f(\varphi) d\nu_B^s(\varphi) \quad \text{for } \forall f \in C(E)$$

が成立している。ここで、 e は E_s から $[B\xi_s]$ への projection $e_{[B\xi_s]}$ を表わしている。

ここで、 ν_B^s を B -measure of s と呼ぶ。以上の事から、次の事柄を準備しておく。

1. $s \in E$, $\Omega(s) = \{\mu : \text{probability measure on } E, r(\mu) = s\}$

$$\Omega^I(s) = \{\mu \in \Omega(s) : \text{supp}(\mu) \subset I\}$$

$\alpha \in \mathbb{I}$, $s \in I$, B : abelian von Neumann subalgebra of $\pi_s(\mathcal{M})'$

に於いて、 $\mathcal{R}$ が $\mathbb{A}$ である。

$$(\nu_B \in \Omega^I(s)) \Leftrightarrow (\text{supp}(\nu_B) \subset I) \Leftrightarrow (B \subset \mathcal{R}_s')$$

2. B : abelian von Neumann subalgebra of $\pi_s(\mathcal{M})'$

$$\{b_j\}_{j=1}^n \subset B^+ : \sum_{j=1}^n b_j = 1, \quad d_j = \langle b_j \xi | \xi \rangle, \quad s_j(a) = \frac{1}{d_j} (\pi_s(a) \xi | b_j \xi)$$

$\alpha \in \mathbb{I}$, $\mu\{b_j\} = \sum_{j=1}^n d_j \delta_{s_j}$ is discrete B -measure という。

$$\Rightarrow \exists \{\mu_\alpha\} : \text{discrete } B\text{-measure, } \mu_\alpha \rightarrow \nu_B \text{ (weakly)}$$

3. $\delta_s \prec \mu$ for $\forall \mu$ such that $r(\mu) = s$.

定理。

(a) $s \in E$, $\pi_s(\mathcal{M})'$: abelian, ν : $\pi_s(\mathcal{M})'$ -measure of s .

$\Rightarrow \nu$: maximal measure in $\Omega(s)$

(β) $s \in I$, $\mathcal{B}$: abelian von Neumann algebra in $\mathcal{R}'_s$,

$\nu_{\mathcal{B}}^s$: $\mathcal{B}$ -measure of s

$\Rightarrow$

1) $\nu_{\mathcal{B}}^s$: maximal in $\Omega^I(s) \Rightarrow \mathcal{B}$: maximal abelian in $\mathcal{R}'_s$

2) $\mathcal{B}$: maximal abelian in $\mathcal{R}'_s$,

D : I の Baire set, $D \cap \text{ex } I = \emptyset \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \nu_{\mathcal{B}}^s(D) = 0.$

$s \in I$, $P_s : \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{K}_s = \{ \eta \in \mathcal{H}_s : \Pi_g^s \eta = \eta \text{ for } \forall g \in G \}$ の projection.

このとき、各 $s \in I$ に対して、 $P_s \pi_s(\sigma) P_s$ が abelian になる場合、system (σ, G) は G -abelian であるといわれる。

I の extreme point s は ergodic state であるといわれるが、その ergodic state に対して、次のような事が考えられる。 $s \in I$ に対して、

(i) s : ergodic, (ii) $\pi_s(\sigma) \cup \Pi_G^s$: irreducible, (iii) P_s : 一次元
なる性質を考えると、(i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) が成立は簡単な計算で示される。しかも、system (σ, G) が G -abelian のときは、(i) $\Rightarrow$ (iii) も成立することになる。

Choquet の意味で、 I が simplex になるとき、system (σ, G)

は simplicial system であるという。すると、

定理. 次の二つの条件は同値である。

(i) (σ, G) : simplicial system

(ii) (σ, G) : G -abelian

前に述べたことと、定理より、 (σ, G) が simplicial
のとき、ergodic ということと、(iii) が同値である。(
かも、system (σ, G) に separability の条件を添えると
その逆も成立する。

以上。