

Einstein 方程式のソリトン解について

広島大 理論研

富松 彰

Tomimatsu Akira

真空での Einstein 方程式のソリトン解が Neugebauer (ベックルンド変換法)¹⁾ や Belinsky-Zakharov (逆散乱問題法)²⁾ によって発見された。ソリトン解は多くのパラメーターを含んでおり、非常に広い解のグループを構成している。しかし、その解が物理的に興味あるものかどうかは明らかでない。本報告の目的はいくつかのソリトン解についてその物理的な内容を議論することである。

§1 ソリトン解の導出

まず、ソリトン解の導出について簡単に述べておこう³⁾。ソリトン解を与えるメトリックは

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{ab} dx^a dx^b \quad (1)$$

という形に書ける。ただし、 $\mu, \nu = 0, 1$, $a, b = 2, 3$ であり、 $g_{\mu\nu}, g_{ab}$ は x^0, x^1 だけの関数である。適当に座標を選べば、 $g_{\mu\nu} = -f \gamma_{\mu\nu}$ ($\gamma_{\mu\nu}$ は定数, $f > 0$) と表わされる

。ソリトン解は次の2種類に分けられる；

クラスa：時間 t と1つの空間座標 z の関数になっている重力波。つまり， $x^\mu = (t, z)$ ， $x^a = (x, y)$ である。 $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ とおける。

クラスb：円柱座標 (ρ, z) の関数になっている軸対称・定常な重力場。つまり， $x^\mu = (\rho, z)$ ， $x^a = (t, \varphi)$ である。 $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1)$ とおける。

(2×2) 行列 g （その成分は g_{ab} ）は非線形微分方程式

$$\gamma^{\mu\nu}(\alpha g_{,\mu} g^{-1})_{,\nu} = 0, \quad (2)$$

$$\alpha^2 = \epsilon \det(g_{ab}), \quad \epsilon = -\det(\gamma_{\mu\nu}) = \pm 1$$

を解くことによって求められる。この方程式は2つの線形微分方程式

$$D_\mu \psi = \Lambda^\nu_\mu A_\nu \psi, \quad (3)$$

$$\Lambda^\nu_\mu = (\lambda \delta^\nu_\mu + \epsilon \alpha \epsilon^\nu_\mu) / (\epsilon \alpha^2 - \lambda^2), \quad \epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_\mu a^b = \epsilon \alpha \epsilon^\nu_\mu g^{bc} \partial_\nu g_{ac}, \quad \epsilon^\nu_\mu = \gamma_{\mu\tau} \epsilon^{\tau\nu}$$

の両立性の条件として与えられる。 λ は複素パラメーター， $\psi = \psi(\lambda, x^0, x^1)$ は複素行列関数である。微分作用素 D_0, D_1 は $D_\mu = \partial_\mu + P_\mu \partial_\lambda$ ， $P_\mu = 2\lambda(\lambda \beta_{,\mu} + \epsilon \alpha \alpha_{,\mu}) / (\epsilon \alpha^2 - \lambda^2)$ で与えられ，互に交換可能である。 α, β は次の方程式を満足する；

$$\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \alpha = 0, \quad \partial_\mu \beta = \epsilon \epsilon^\nu_\mu \partial_\nu \alpha. \quad (4)$$

式(2)の解は逆散乱問題法によって式(3)から求められる。もし $\mathring{g}_{ab}$ が決まれば、 f を求めることは容易である。

ある特殊解 $\{\mathring{g}_{ab}, \mathring{f}\}$ が与えられたとしよう。すると、この特殊解を *background* とする N -ソリトン解を

$$\mathring{g} = H \mathcal{V}(\lambda=0) = H \chi(\lambda=0) \mathring{g}, \quad (5)$$

$$\chi = I + \sum_{k=1}^N R_k(x^0, x') / (\lambda - \mu_k) \quad (I: \text{単位行列}),$$

$$H = \prod_{k=1}^N |\mu_k / \alpha|$$

と書くことができる。式(3)の解 $\mathcal{V}(\lambda)$ は $\lambda = \mu_k (k=1 \sim N)$ で *pole* を持っている。 *pole* の位置は (x^0, x') によって移動する；

$$\mu_k^2 - 2(w_k - \beta)\mu_k + \epsilon\alpha^2 = 0 \quad (w_k: \text{任意定数}). \quad (6)$$

λ によらない (2×2) 行列 R_k は $\mathring{g}$ に対応する式(3)の解 $\mathcal{V}(\lambda, x^0, x')$ から求められる。その結果、 N -ソリトン解のメトリックは

$$g_{ab} = H \left\{ \mathring{g}_{ab} - \sum_{k,l=1}^N (\Gamma^{-1})_{kl} N_{ka} N_{lb} \right\} \quad (7)$$

で与えられる。 $(N \times N)$ 行列 Γ の成分は

$$\Gamma_{kl} = \mu_k \mu_l (m_{kc} \mathring{g}_{cd} m_{ld}) / (\mu_k \mu_l - \epsilon\alpha^2) \quad (8)$$

であり、 N 個の 2-ベクトル m_{ka} は

$$m_{ka} = C_{kb} \{ (\mathcal{V}(\lambda = \mu_k))^{-1} \}_{ba} \quad (C_{kb}: \text{任意定数}) \quad (9)$$

と書ける。 $N_{ka} = m_{kc} \mathring{g}_{ca}$ である。 $\mathring{g}$ と $\mathring{g}$ は同じ α を与える。なお、メトリック係数 f は

$$\dot{f} = C_0 \alpha^{\frac{1}{2}N^2 - N} H^{N-1} \left(\prod_{k>l}^N (\mu_k - \mu_l)^2 \right)^{-1} \Gamma \dot{f}, \quad (10)$$

$$\Gamma = \det(\Gamma_{kl})$$

で求められる。\$C_0\$ は適当な正の定数である。

§2 重力波ソリトン

クラス \$a\$ のソリトン解は \$z\$ 方向に進行する局在化 (\$z\$ 方向にのみ) した重力波を記述する。この重力波の振舞いを見るために、\$N=2\$ の場合を考えよう。^{2), 4)}

\$background\$ となる解 \$\{\dot{g}, \dot{f}\}\$ を Kasner 非等方宇宙モデルにとる；

$$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^{2P_3} dz^2 + \tau^{2P_2} dy^2 + \tau^{2P_1} dx^2, \quad (11)$$

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1.$$

時間座標 \$\tau\$ を適当に変換してやれば、メトリック (11) は

$$ds^2 = -t^{S_1^2 + S_2^2 - 1} (dt^2 - dz^2) + t^{2S_2} dy^2 + t^{2S_1} dx^2, \quad (12)$$

$$S_1 + S_2 = 1$$

と変形される。\$S_1 = 1\$, \$S_2 = 0\$ の時に時空は平坦になる。メ

トリック (12) から

$$\begin{aligned} \dot{f} &= t^{S_1^2 + S_2^2 - 1}, \quad \dot{g} = \text{diag}(t^{2S_1}, t^{2S_2}), \quad \alpha = t, \quad \beta = z, \\ \dot{\eta} &= \text{diag}((t^2 + 2z\lambda + \lambda^2)^{S_1}, (t^2 + 2z\lambda + \lambda^2)^{S_2}) \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。任意定数 \$w_k\$ と pole の位置 \$\mu_k\$ を \$w_1 = \bar{w}_2 \equiv w_r - i w_i\$, \$\mu_1 = \bar{\mu}_2 \equiv \rho e^{i\varphi}\$ と書き直すと、式 (6) から、\$\cos \varphi = 2(w_r - z)\rho \times (t^2 + \rho^2)^{-1}\$, \$\sin \varphi = 2w_i \rho / (t^2 - \rho^2)\$ となる。\$w_r\$ は \$z\$ の原点を

ずるすだけなので, $w_r = 0$ ととっておく。任意定数 C_{α} については, 比 $C_{\alpha 2}/C_{\alpha 3}$ だけがメトリックに現われる。それを適当に書き直せば, 3個の正パラメータ δ_0, L_0, w_i を持った 2-ソリトン解を得る;

$$\begin{aligned} g_{xx} &= t^{2S_1} \{ \rho^2 t^{-2} + (t^2 - \rho^2)^2 D^{-1} [\sin^2 \delta - t^2 \rho^{-2} \sin^2(\varphi + \delta) - (t/\rho)^{4S_1} \times \\ &\quad L_0^2 \sin^2 \varphi] - 2\rho^2 (t^2 - \rho^2) D^{-1} [t^2 \rho^{-2} + L_0^2 (t/\rho)^{4S_1}] \sin^2 \varphi \}, \\ g_{yy} &= g_{xx}(S_1 \rightarrow S_2, L_0 \rightarrow L_0^{-1}), \\ g_{xy} &= -t^2 (t^2 - \rho^2) \rho^{-1} D^{-1} \sin \varphi \{ L_0 (t/\rho)^{2S_1} [t^2 \sin(\varphi - \delta) + \rho^2 \sin(\varphi + \delta)] \\ &\quad + L_0^{-1} (t/\rho)^{2S_2} [t^2 \sin(\varphi + \delta) + \rho^2 \sin(\varphi - \delta)] \}, \\ f &= -4w_i^2 \rho^4 D \dot{f} / t^2 \sin^2 \delta_0 (t^2 - \rho^2)^2 (t^4 + \rho^4 - 2t^2 \rho^2 \cos 2\varphi) \sin^2 \varphi, \\ D &\equiv -t^2 \{ \rho^{-2} \sin^2 \delta (t^2 - \rho^2)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi [L_0 (t/\rho)^{2S_1} + L_0^{-1} (t/\rho)^{2S_2}]^2 \}, \\ \delta &\equiv (S_1 - S_2) \varphi + \delta_0. \end{aligned}$$

$w_i = 0$ とおけば, $g = \dot{g}$, $f = \dot{f}$ となる。

メトリック (14) からソリトンの部分を取り出すために,

$$\begin{aligned} H_{aa} &\equiv (g_{aa} - \dot{g}_{aa}) / \dot{g}_{aa}, \quad H_{xy} \equiv g_{xy} / \sqrt{\dot{g}_{xx} \cdot \dot{g}_{yy}}, \\ \Delta f &\equiv (f - \dot{f}) / \dot{f} \end{aligned} \quad (15)$$

という摂動場を考える。膨張宇宙を *background* とすれば, 一般性を失わずに $S_1 > S_2 > 0$ と仮定できる。簡単のために, $H_{aa}(-z) = H_{aa}(z)$, $H_{xy}(-z) = -H_{xy}(z)$ という対称性を仮定しよう。つまり, $\delta_0 = \pi S_2$ ととっておく。摂動場の漸近的な振舞いは次のようになる;

(i) $z \rightarrow \pm\infty$, i.e., $\rho = t^2/2|z|$, $\sin\varphi = w_i/|z|$, $\cos\varphi = \bar{r}/|z|$ の時,

$$H_{xx} = O(z^{-4s_2}) \text{ or } O(z^{-1}), \quad H_{yy} = O(z^{-1})$$

$$H_{xy} = O(z^{-2s_2}), \quad \Delta f = O(z^{-2})$$

となり, 擾動場は局在化している。

(ii) $t \rightarrow \infty$, i.e., $\rho = t - w_i$, $\sin\varphi = 1$, $\cos\varphi = -z/t$ の時,

$$H_{xx} = -H_{yy} = O(t^{-1}), \quad H_{xy} = O(t^{-2})$$

$$\Delta f = (L_0 + L_0^{-1})^2 (4 \sin^2 \delta_0)^{-1} - 1$$

となり, H_{ab} は時間の経過とともに減衰していく。

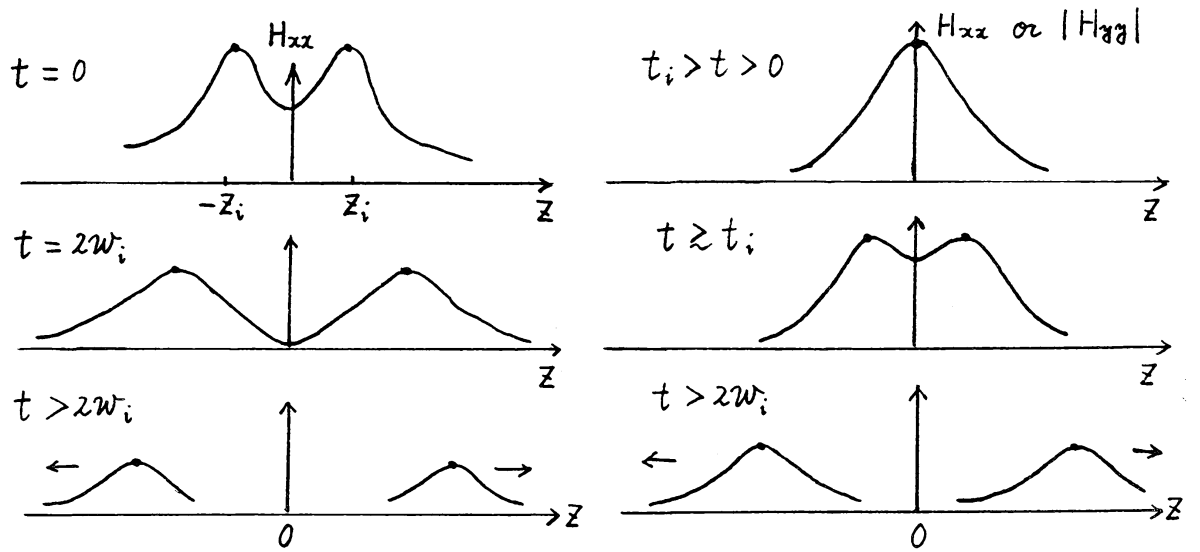
(iii) 光円錐上 ($t = |z|$) で $t \rightarrow \infty$, i.e., $\rho = t - \sqrt{w_i}t$, $\sin\varphi = \sqrt{w_i}/t$, $\cos\varphi = \bar{r}/t$ の時,

$$H_{ab} = O(t^{-1/2}), \quad \Delta f = (L_0 + L_0^{-1})^2 (4 \sin^2 \delta_0)^{-1}$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ では, 擾動の大きさは光円錐上で最大になることがわかる。

(iv) 宇宙初期, i.e., $t \simeq 0$ では, H_{xx} の最大点は 2 点 $z = \pm z_i$ ($s_2 < (3-\sqrt{5})/4$ の時) または $z = 0$ だけ ($s_2 > (3-\sqrt{5})/4$ の時) であり, $|H_{yy}|$ の最大点 ($H_{yy} < 0$ に注意) は $z = 0$ だけである。

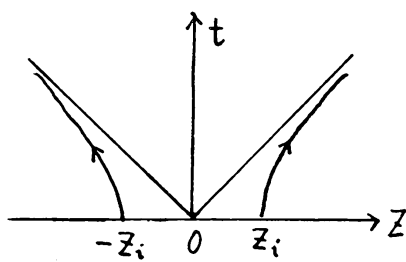
図 1 には H_{xx} と $|H_{yy}|$ の概略図が描かれている。⁴⁾ 宇宙初期に発生した重力波の擾動が 2 個のソリトンとして分離し, 互に逆方向に伝播していく様子がわかる ($\delta_0 \neq \pi s_2$ であれば, 2 個のソリトンの大きさは異なっている)。伝播速度はしだいに



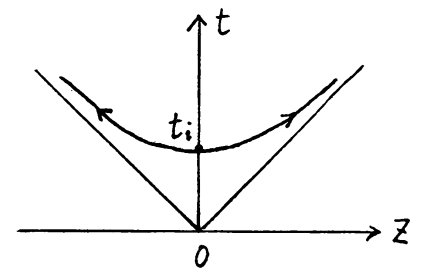
(a) H_{xx} ($S_2 < (3-\sqrt{5})/4$) の振舞い。 (b) H_{xx} ($S_2 > (3-\sqrt{5})/4$) 或 $|H_{yy}|$ の振舞い。

図 1

光速に近づいていく。図 2 に H_{xx} 及び $|H_{yy}|$ の最大点の世界線が描かれている。⁴⁾ $|H_{yy}|$ 及び $S_2 > (3-\sqrt{5})/4$ の時の H_{xx} の最大点は光速以上の速さで伝播していることに注意したい。物理的に実現可能な重力波ソリトンがこのような伝播速度を持つことは考えにくい。この点でソリトンメトリック (14) には問題があると言える。



(a) H_{xx} ($S_2 < (3-\sqrt{5})/4$) の場合



(b) H_{xx} ($S_2 > (3-\sqrt{5})/4$) 或 $|H_{yy}|$ の場合

図 2: H_{xx} 及び $|H_{yy}|$ の最大点の世界線

§3 軸対称・定常ソリトン

軸対称・定常の重力場では $\det(g_{ab}) < 0$ でなければならぬ。しかし、ソリトンの個数 N が奇数の場合には、 N -ソリトン解(7)の行列式は正になってしまう²⁾。故に、以下では偶数個から成る軸対称・定常ソリトンだけを考える。

background の重力場を Minkowski 時空にとる。つまり、

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 1, \quad \dot{\varphi} = \text{diag}(1, -\rho^2), \quad \alpha = \rho, \quad \beta = z, \\ \dot{\varphi} &= \text{diag}(1, -\rho^2 + 2z\lambda + \lambda^2) \end{aligned} \quad (16)$$

である。任意定数 $w_R, C_{R\ell}$ を実数にとる。また、一般性を失わずに $\{C_{R2}, C_{R3}\} = \{1, 2w_R C_R\}$ とおくことができる。そうすると、 N -ソリトンメトリック g_{ab} は

$$\begin{aligned} g_{tt} &= \prod_{m=1}^N |\lambda_m| \det((1 + C_R C_\ell) / (1 + \lambda_R \lambda_\ell)) / \Gamma, \\ g_{t\varphi} &= i\rho \prod_{m=1}^N |\lambda_m| \{1 - \Gamma^{-1} \det(\Gamma_{R\ell} + i(C_R / \lambda_R))\}, \\ g_{\varphi\varphi} &= -\rho^2 \left\{ \prod_{m=1}^N |\lambda_m| \right\}^{-1} \det((\lambda_R^2 \lambda_\ell^2 + C_R C_\ell) / (1 + \lambda_R \lambda_\ell)) / \Gamma, \\ \Gamma &= \det(\Gamma_{R\ell}) = \det((\lambda_R \lambda_\ell - C_R C_\ell) / (1 + \lambda_R \lambda_\ell)), \\ \lambda_R &\equiv \mu_R / \rho \end{aligned} \quad (17)$$

で与えられる³⁾。pole の位置 μ_R は

$$\mu_R = w_R - z + \varepsilon_R [(w_R - z)^2 + \rho^2]^{1/2}, \quad \varepsilon_R = \pm 1 \quad (18)$$

と書ける。 ε_R の符号の選び方は非常に重要である。なぜならば、解の物理的性質がその選び方によって変るからである。

例えば、静的な重力場 ($g_{t\varphi} = 0$) を考えよう⁵⁾。この場合、 $C_R = \infty$ である。静的な N -ソリトンメトリックは次のよう

な簡単な形になる ;

$$ds^2 = \prod_{m=1}^N |\lambda_m| dt^2 - \rho^2 \left\{ \prod_{m=1}^N |\lambda_m| \right\}^{-1} d\varphi^2 \\ - c_0 \rho^{-N/2} \left\{ \prod_{m=1}^N |\lambda_m| \right\}^{N-1} \left\{ \prod_{k,l=1}^N (1 + \lambda_k \lambda_l) \right\}^{-1} (d\rho^2 + dz^2). \quad (19)$$

$\rho \rightarrow \infty$ の極限をとると, $\mu_k = \varepsilon_k \rho \{ 1 + \rho^{-1} (w_k - z) \varepsilon_k + O(\rho^{-2}) \}$ となるので, $g_{tt} = 1 + \rho^{-1} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k (w_k - z) + O(\rho^{-2})$ を得る。ソリトンが空間の有限領域に局在化しているためには, $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k = 0$ でなければならぬ。また, N -ソリトンの全重力質量を M とすれば, $\sum_{k=1}^N \varepsilon_k w_k = -2M$ である。これらの関係から, N 個の $\mu_k(w_k)$ を $N/2$ 個の pair に分ける ;

$$\mu_r^\pm = w_r^\pm - z \pm [(w_r^\pm - z)^2 + \rho^2]^{1/2}, \quad (r=1 \sim N/2) \\ w_r^\pm = z_r \mp m_r, \quad M = \sum_{r=1}^{N/2} m_r. \quad (20)$$

各 $\mu_r^\pm$ に対して $\rho = [r_r(r_r - 2m_r)]^{1/2} \sin \theta_r$, $z - z_r = (r_r - m_r) \times \cos \theta_r$ という球座標 (r_r, θ_r) を導入すると,

$$g_{tt} = \prod_{r=1}^{N/2} (1 - 2m_r r_r^{-1})$$

となるので, 各ソリトン pair は質量 m_r で z 軸上 ($z = z_r$) に置かれた Schwarzschild 解を表わしている。

次に, z 軸近く ($\rho \simeq 0$) で解の振舞いを見よう。そこで, $\mu_k = w_k - z + \varepsilon_k |w_k - z| + \varepsilon_k \rho^2 / 2 |w_k - z| + O(\rho^4)$ となるので, もし $z > w_k$ ならば

$$\lambda_k = \begin{cases} O(\rho) & \text{for } \varepsilon_k = +i, \\ O(\rho^{-1}) & \text{for } \varepsilon_k = -i \end{cases}$$

となり, もし $z < w_R$ ならば

$$\lambda_R = \begin{cases} O(P^{-1}) & \text{for } \varepsilon_R = +1 \\ O(P) & \text{for } \varepsilon_R = -1 \end{cases}$$

となる。order が $O(P)$ の λ_R の数を S と書くと,

$$g_{tt} = O(P^{2S-N}), \quad g_{pp} = O(P^{(2S-N)(2S-N-2)/2}) \quad (21)$$

を得る。また, Riemann の曲率テンソル R_{ijkl} ($i, j, k, l = 0 \sim 3$) からスカラー量 $\Lambda \equiv R_{ijkl} R^{ijkl}$ を計算すると, $S = N/2$ または $S = 1 + N/2$ の場合は $\Lambda = O(g_{pp}^{-2}) = O(P^0)$ (曲率は有限) となるが, その他の場合には $\Lambda = O(P^{-4} g_{pp}^{-2})$ (曲率は無限大) となる。 $S = 1 + N/2$ の場合, $g_{tt} \rightarrow 0$ になるので, このような z 軸上では無限の赤方偏移が起る。また, $g_{pp} = O(P^0)$ であるので, この軸は2次元曲面の構造を持っている。

ε_R の選ぶ方によってソリトン解のタイプを分類することができる。図3のように, 水平軸 (z 軸) 上に N 個の点 ($z = w_R = w_r^\pm$) を置く。 $z = w_r^\pm$ 上には上 (w_r^+) または下 (w_r^-) 向きの縦線を描いておく。矢印の数は軸上で $O(P)$ の order になる λ_R の数に対応する

。 $N=2$ の場合は2種類のタイプが考えられる (図3)。タイプ(a)

は正の質量 ($m_1 > 0$) の

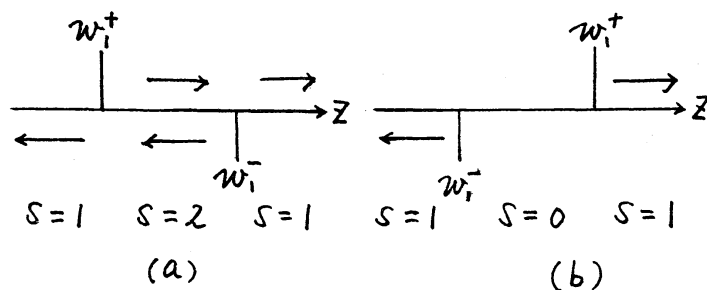


図3: 2-ソリトン解の分類

Schwarzschild 解である。タイプ (b) では $m_1 < 0$ であり, $w_1^- < z < w_1^+$ の範囲内の z 軸は特異点である。 $m_2 > 0$ を要請すれば, $N=4$ の場合

には図4のよ

うなタイプが

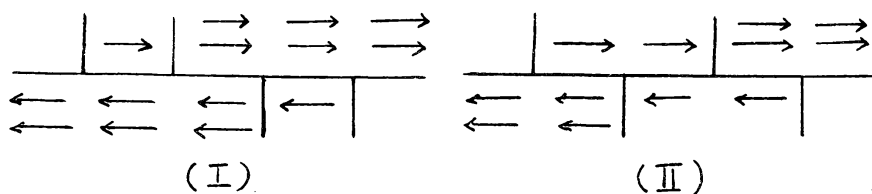


図4: 4-ソリトン解の分類

タイプ (I) の解では $S=4$ の z 軸上で曲率は無限大になる。タイプ (II) の解ではそのような特異性は避けられている。しかし, 2個の Schwarzschild 質量 m_1, m_2 が相互の引力にもかかわらず離れたまま静止していることは奇妙に思われる。つまり, z 軸は曲率とは違った意味で特異的になっていると予想される。 z 軸が軸として局所的には Euclid 的な構造を持つためには, 軸のまわりに微小な円を描いた場合, その円周と半径の比は 2π でなければならぬ。この要請は $\rho \rightarrow 0$ で $g_{\phi\phi}/\rho^2 g_{zz} \rightarrow 1$ を意味する。ところが, 2個の Schwarzschild 無限赤方偏移面 ($S=3$) の間の z 軸上ではこの要請は満足されていない (*weak singularity*)。

$N \geq 6$ の場合にも z 軸上で同様な特異性が発生する。故に, 静的な N -ソリトン解は, $N=2$ の場合を除いては, 物理的な観点からは好ましくない構造を持っていることになる。

では, 個々のソリトンが z 軸のまわりに回転している場合

($g_{tt} \neq 0$, 定常) はどうであろうか。静的な場合と同様に,
 μ_R を pair $\mu_r^\pm$ に分ける。そして, パラメーター ω_R と C_R を

$$\omega_r^\pm = \omega_r \mp m_r \cos \omega_r, \quad C_r^\pm = \cot\left(\frac{1}{2}(\alpha_r \pm \omega_r)\right)$$

と書き直す。回転がある場合には, N -ソリトン解は z 軸上に並んだ $N/2$ 個の Kerr-NUT 解を表わしている。各々の質量は m_r , z 軸上の位置は z_r , Kerr 及び NUT の回転パラメーターは ω_r 及び α_r である。各々の Kerr-NUT 解の間にはスピンスピン相互作用が斥力として働いている。そのため, N -ソリトンの全質量 M も m_r の和とは等しくない。この斥力は $N/2$ 個の質量 m_r による引力とバランスすることができるともしい。すると, $N \geq 4$ の場合でも, 全時空にわたって特異性のない N -ソリトン解が得られることになるであろう。このような解は $N/2$ 個の回転ブラックホールの力学平衡状態を示すことになり, 物理的に非常に興味深い解になる。

特異性のない回転 N -ソリトン解が存在するかどうかを調べるために, 例として, $N=4$ の場合を考えよう。静的な場合と同じように解のタイプを分類する。 $m_r > 0$, $\cos \omega_r > 0$ と仮定しておけば, 図4に描かれている2種類のタイプの解を得る。ただし, 回転がある場合は, 式(21)のような関係は成立しないし, z 軸上での曲率の発散も起らないことに注意し

なければならぬ。メトリック g_{ab} を

$$g_{tt} = F, \quad g_{t\varphi} = -F\omega, \quad g_{\varphi\varphi} = F\omega^2 - F^{-1}\rho^2 \quad (22)$$

と書けば、 z 軸上の $S=2$ 及び $S=4$ の領域では $F>0$, $S=3$ の領域では $F<0$ となる。重要な点は z 軸上で ω 及び F/f ($g_{\rho\rho} = g_{zz} = -f$) が階段関数になることである ($z = w_{\mp}^{\pm}$ で値に有限の *gap* が生じる)⁶⁾。2つの $S=3$ 領域(どすのタイプの解でもよい)の各々で $\omega = \omega_{RA}$ ($A=1, 2$) となったとしよう。 ω_{RA} は 0 にはならないので、 z 軸上の $S=3$ 領域では $g_{\varphi\varphi} = F\omega_{RA}^2 < 0$ となる。 $g_{zz} = -f < 0$ であることを考慮すれば、この $S=3$ 領域は 2次元閉曲面であることを示すことができる。この閉曲面は *horizon* になっていることを示そう。軸対称・定常な重力場では t 及び φ 方向の Killing ベクトル場 $\xi_{(t)}^i$ 及び $\xi_{(\varphi)}^i$ ($i=0\sim 3$) が存在するので、次式で定義される2個の Killing ベクトル場を導入することができる；

$$\xi_A^i = \omega_{RA} \xi_{(t)}^i + \xi_{(\varphi)}^i.$$

各 Killing ベクトル場は各 $S=3$ 領域で *null* になっている。しかも、 ξ_A^i に直交するベクトル場 $n_{Ai} \equiv \xi_{A;j;i} \xi_A^j$ もその領域で *null* になる。 $g_{tt} < 0$ なので、この領域上で *timelike curve* は許されない。よって、この領域は *one-way membrane* になり、*horizon* としての性質を持っている。

問題は2つの *horizon* 間の領域である。簡単のために, $m_1 = m_2 \equiv m$, $z_1 = -z_2 \equiv z_0 > 0$, $\cos \omega_1 = \cos \omega_2 \equiv p > 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ の場合を考察しよう。この場合,

$$\begin{aligned}\lambda_1^+ &= p^{-1} \{ z_0 - mP - z + [(z_0 - mP - z)^2 + p^2]^{1/2} \}, \\ \lambda_1^- &= p^{-1} \{ z_0 + mP - z - [(z_0 + mP - z)^2 + p^2]^{1/2} \}, \\ \lambda_2^+ &= -\lambda_1^-(p, -z), \quad \lambda_2^- = -\lambda_1^+(p, -z), \\ c_1^+ &= -c_1^- = c_2^+ = -c_2^- \equiv c = (1+p)^{1/2} / (1-p)^{1/2} > 1\end{aligned}\quad (23)$$

である。 g_{ab} の式からわかるように, $\Gamma = 0$ の点が特異点(曲率の発散)になる。 Γ は $\{D(p, z)\}^2 + z^2 \{N(p, z)\}^2$ という形に書けるので, $z = 0$ 及び $D(p, z=0) = 0$ の場合に $\Gamma = 0$ となる。 $D(p, z=0) = 0$ という条件は

$$(\lambda_1^+ - \lambda_1^-)(\lambda_1^+ \lambda_1^- - c^2) - c(1 - (\lambda_1^+)^2 (\lambda_1^-)^2) = 0 \quad (24)$$

という p についての代数式に帰着する。タイプ(I)の場合 ($z_0 < mP$) には, 式(24)は1つだけ根 ($p = p_r$) を持っている。つまり, 2つの *horizon* 間の領域に, z 軸を取り巻く *ring* 状特異点が存在する。ところが, タイプ(II)の場合 ($z_0 > mP$) には, 式(24)の根は存在しない。曲率が発散するような特異点の有無についての状況は静的な場合とよく似ている。

z 軸が局所的に *Euclid* 的になるかどうかという問題についてはどうであるか。回転がある場合, この条件は

$$\omega \rightarrow 0, \quad F/f \rightarrow 1 \quad \text{as } p \rightarrow 0 \quad (25)$$

になる^{*)}。これは z 軸上で階段関数になるので、適当にパラメーターの値を選べば、条件(25)を満足させることができる可能性がある($S=3$ の領域、つまり *horizon* は2次元曲面なので、そこでこの条件を満足させる必要はない)。しかし、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ の時には条件(25)は満たされないことが示されている⁶⁾。 NUT の回転効果は z 軸の特異性を取り除くのに重要な役割を演じている。 NUT パラメーターが0でない場合に *ring* 状特異点が存在するかどうかについてはまだ調べられていないが、すでに得られた結果から判断すれば、タイプ(II)の解は *ring* 特異点を持っていないことが期待される。任意の m_r, ω_r, α_r (z_r については、一般性を失わずに、 $z_1 = -z_2 \equiv z_0 > 0$ とおくことができる)を含む解について、*horizon* 上を除いた全 z 軸上で条件(25)を計算すると⁷⁾

$$\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2,$$

$$\sin \alpha_1 = \pm 4m_2 z_0 W^{-1} (4z_0^2 + m_1^2 p_1^2 - m_2^2 p_2^2 \pm 4m_1 z_0 \delta_2),$$

$$\cos \alpha_1 = -4m_1 z_0 W^{-1} (4z_0^2 - m_1^2 p_1^2 + m_2^2 p_2^2 \pm 4m_2 z_0 \delta_1),$$

$$W = 16z_0^4 - 16m_1 m_2 z_0^2 \delta_1 \delta_2 - (m_1^2 p_1^2 - m_2^2 p_2^2)^2, \quad (26)$$

$$p_r = \cos \omega_r, \quad \delta_r = \sin \omega_r$$

*) メトリック(17)に対してこの条件を満足させるためには、適当な座標変換 $t \rightarrow t + a\varphi$, $\varphi \rightarrow \varphi$ (a は適当な定数)をすることが必要になる。

というパラメーター間の関係式を得る。タイプ(II)の場合は

$$2Z_0 > m_1 P_1 + m_2 P_2 \quad (27)$$

という条件が付加される。

$\rho \rightarrow 0$ で $\omega \rightarrow 0$ という条件は特に重要である。2つの horizon 間の Z 軸上では $F > 0$ なので, $\omega \neq 0$ の場合には, その軸上で $g_{\phi\phi} = F\omega^2 > 0$ となる。すると, この軸のまわりの微小な円は閉じた *timelike curve* になる。つまり, 因果律が破れている。 $\rho \simeq 0$ で $\omega = O(\rho^2)$ の時には, $g_{\phi\phi} \simeq -F^{-1}\rho^2 < 0$ となり, 少なくとも, Z 軸近くの領域では因果律は破れていない。

条件(26)及び(27)を満足する 4-ソリトン (2-Kerr-NUT) メトリックには, 今までのところでは特異性は見つかっていない。条件(26)は質量と回転パラメーターと2つのブラックホール間の距離 ($2Z_0$) との関係を与えている。この関係は質量による引力と回転による斥力とのバランスの条件である。この解が完全に物理的要請を満たしているかどうかについて結論を得るためには, より詳しい時空構造や微小な摂動に対する解の安定性等が明らかにされなければならない。

参考文献

- 1) G. Neugebauer, J. of Phys. A13 (1980), L19.

- 2) V. A. Belinsky and V. E. Zakharov, Sov. Phys.-JETP 48 (1978),
985 ; 50 (1979), 1.
- 3) G. A. Alekseev, Sov. Phys. Dokl. 26 (1981), 158.
- 4) V. A. Belinsky and D. Fargion, Nuovo Cim. 59B (1980), 143.
- 5) G. A. Alekseev and V. A. Belinsky, Sov. Phys.-JETP 51 (1980),
655.
- 6) M. Kihara and A. Tomimatsu, Prog. Theor. Phys. 67 (1982),
349.
- 7) A. Tomimatsu and M. Kihara, Prog. Theor. Phys. 67 (1982),
1406.