

同変分類空間の構成

村山光孝 (Mitsutaka Murayama)、島川和久 (Kazuhisa Shimakawa)

1992 年 3 月 31 日

1 序

同変 (principal) A -bundle の同変 universal A -bundle を functorial に構成することを考える。その最も一般的なものとして tom Dieck は Atiyah (K -theory and reality) の Reality を持った vector bundle と、通常の G - A bundle を一般化して、次のように定式化した。(Faserbündel mit Gruppenoperation.) G, A は位相群 (G は変換群、 A は構造群) で、 G の A への (左) 作用が

$$\alpha: G \times A \rightarrow A \quad (ga = \alpha_g(a) = \alpha(g, a))$$

で与えられているとする。つまり α は連続で、 α_g は位相群の同型である。(即ち A は、topological G -group である。) 又、principal A -bundle に A は右から作用しているとする。このとき、

定義 1 *principal (G, α, A) -bundle* とは principal A -bundle $p: E \rightarrow B$ で次をみたすものとする。

- (1) E, B は left G -spaces、 p は G -map で、
- (2) $e \in E, g \in G, a \in A \Rightarrow g(ea) = ge \cdot ga$.

(tom Dieck は作用群 G は compact Lie group としている。)

Associated fibre bundle: fibre F には G と A が左から作用していて、 $g(ax) = ga \cdot gx, x \in F$ を満たすものとする。total space は、自然に左 G 作用を持つ。

(G, α, A) -bundle 間の bundle map とは、 A -bundle map かつ、 G -map であるものとする。

通常 G - A bundle と呼ばれるのは、 G の A への作用が trivial のとき、即ち G が E に bundle map として作用しているときである。又、Reality を持った vector bundle とは 構造群が $A = GL(n, \mathbf{C}), U(n)$ で $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = Gal(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ は複素共役として A に

作用している時である。他の例としては、Reality の一般化として A が適当な拡大体上の代数群、 G がガロワ群の時や、ファイバー束の (free) loop 空間を考えれば、 G が $\text{Diff}^+ S^1$, A がループ群の時などがある。

tom Dieck は G が有限群で、 A が有限連結成分を持つ Lie 群の帰納的極限の時、Lashof (Equivariant bundles) は G が compact Lie 群で、 A が位相群の時の G - A bundle について、分類空間を構成した。Lashof の構成、証明は、 (G, α, A) -bundle でも成立する。しかし、どの構成も関手的にはなっていない。

ここでは、topological G -category の幾何学的実現として分類空間を構成することを考える。 G は、compact Lie 群、または離散群、 A は Hausdorff 位相群とする。

分類理論は、(非同変の時も) numerable bundle に対して適用される。§2 では同変局所自明性及び同変 numerable bundle を定義する。§3 では分類理論を簡単に振り返り、その同変形を述べる。§4 で同変分類空間を与える圏を構成する。

2 local objects と numerable bundles

H を G の閉部分群とする。 G/H 上の principal (G, α, A) -bundle $p: E \rightarrow G/H$ は local object と呼ばれる。これは次の bundle と同値になる：連続写像

$$\phi: H \rightarrow A \quad \text{such that} \quad \phi(gh) = \phi(g) \cdot g\phi(h)$$

(crossed homomorphism = 1-cocycle $\in Z^1(H, A)$) が存在して、 H の A への左作用が

$$\varphi: H \times A \rightarrow A, \quad \varphi(h, a) = \phi(h) \cdot ha \quad (= \varphi_h(a))$$

で与えられる時、 $G \times_H A (= G \times_{\phi} A)$ を

$$G \times_H A = G \times A / \sim, \quad (g, a) \sim (gh^{-1}, \varphi_h(a)) = (gh^{-1}, \phi(h) \cdot ha) \quad (\forall h \in H)$$

とし、右 A -作用を

$$[g, a] \cdot b = [g, a \cdot g^{-1}b] \quad (\text{従って } [g, a] = [g, 1] \cdot ga)$$

で与える。このとき、

補題 2

$$f: G \times_H A \rightarrow E, \quad f([g, a]) = g(ea) = ge \cdot ga \quad (e \in p^{-1}([H]) \subset E)$$

が (G, α, A) -bundle 同値になるような crossed homomorphism $\phi: H \rightarrow A$ と左作用 $\varphi: H \times A \rightarrow A$ が存在する。

証明

$$h \in H \implies he, h(ea) \in h \cdot p^{-1}([H]) = p^{-1}([H]) = e \cdot A \approx A$$

より ϕ, φ が

$$e \cdot \phi(h) = he, \quad e \cdot \varphi(h, a) = h(ea) = he \cdot ha \quad (\exists! \phi(h), \varphi(h, a) \in A)$$

で定義され、 $\varphi(h, a) = \phi(h) \cdot ha$ となる。また

$$e \cdot \phi(hk) = hke = h(e\phi(k)) = he \cdot h\phi(k) = e\phi(h) \cdot h\phi(k) \quad (h, k \in H)$$

より

$$\phi(hk) = \phi(h) \cdot h\phi(k) \quad (\text{crossed homomorphism})$$

となる。従って

$$\varphi(hk, a) = \phi(hk) \cdot hka = \phi(h) \cdot h\phi(k) \cdot hka = \phi(h) \cdot h(\phi(k) \cdot ka) = \varphi(h, \varphi(k, a))$$

より φ は左作用になる。これより f が次の様に well defined となる：

$$f([gh, a]) = gh(ea) = g(e\varphi(h, a)) = f([g, \varphi(h, a)]) \quad (= f([g, \phi(h) \cdot ha])) \quad (g \in G, h \in H).$$

G の A への作用が trivial のときは、 ϕ は準同型で、 φ は ϕ を通じた作用になる。

定義 3 (G, α, A) -bundle $p: E \rightarrow B$ が *locally trivial* とは、base space B 上の G -不変開被覆 $\{U_\beta\}$ が存在して、 $U_\beta \cong_{G/H_\beta} G \times_{H_\beta} V_\beta$ かつ、 $E|U_\beta$ は

$$p: G \times_{H_\beta} (V_\beta \times F) \rightarrow G \times_{H_\beta} V_\beta, \quad p([g, (v, y)]) = [g, v]$$

と (G, α, A) -bundle 同値。さらに、 $\{U_\beta\}$ に従属する G -不変局所有限 1 の分割が存在する時、 (G) -numerable という。

$p: E \rightarrow B$ が trivial とは $G \times_H A \rightarrow G/H$ への (G, α, A) -bundle map が存在することに他ならない。

(G, α, A) -bundle $p: E \rightarrow B$ は G が compact Lie 群、 B が completely regular のときは slice の存在定理により常に同変局所自明であり、さらに B が paracompact なら numerable である。 G が compact Lie 群でないときは、同変局所自明性や numerability は bundle への作用に対する制限となる。

3 分類定理

この節では分類理論の概要を振り返り、同変理論に対する陳述を与える。非同変理論については Dold (Partitions of unity in the theory of fibrations) や多くの本に書かれており、同変版は Lashof により証明されているので、これらを参照して下さい。

定義 4 *universal (G, α, A) -bundle* とは *numerable principal (G, α, A) -bundle* $p: E \rightarrow B$ で

$$[X, B]^G \cong \{X \text{ 上の } (G, \alpha, A)\text{-bundle の同値類}\}$$

なるものである。ここで左辺 $\rightarrow$ 右辺は $p: E \rightarrow B$ の *pull back* により得られる。

これが well-defined, 単射であることは、numerable bundle の *G-covering homotopy property* = *G-CHP* ($\Leftrightarrow p: E \rightarrow X \times I$ は $(E|X) \times I$ と同値) により得られる。また 分類写像は functional bundle が *G-section extension property* = *G-SEP* を持つ時に存在することが示される。これらは、bundle が local *G-CHP*, *G-SEP* を持てば Dold の方法 “local CHP, SEP $\Rightarrow$ global results” によって証明される。これらの同変形は次の通り。

定理 5 (*G-SEP, G-CHP, c.f. Dold, 2.7, 4.8.*) G を位相群、 $p: E \rightarrow B$ を *G-map*, $\{U_\beta\}$ を B の *numerable G-covering* とする。 $\forall p|U_\beta$ が *G-SEP* (*G-CHP*) を持てば p は *G-SEP* (*G-CHP*) を持つ。

local *G-SEP*, *G-CHP* については Lashof [2.1, 2.2, 2.8, 2.9] により

補題 6 G を位相群、 V, F を H -space ($H < G$) とする。 F が H -contractible なら

- (1) $pr_1: V \times F \rightarrow V$ は *H-SEP* を持つ。
- (2) $p: G \times_H (V \times F) \rightarrow G \times_H V$ は *G-SEP* を持つ。

補題 7 G を compact Lie 群、 H をその閉部分群、 X を G -空間とすると

- (1) $q: G \rightarrow G/H$ は局所自明かつ H -局所自明であり、paracompact H -空間に対し *H-CHP* を持つ。
- (2) *G-map* $X \times I \rightarrow G/H$ が存在すれば、 G -同相 $X \cong G \times_H V$, $X \times I \cong G \times_H (V \times I)$ が存在する。
- (3) D が $X \times I$ 上の (G, α, A) *trivial bundle* なら $D \cong (D|X) \times I$ 。従って、*G-CHP* を持つ。

この補題は G が離散群の時も成立する。

分類写像の存在

$q : D \rightarrow X, p : E \rightarrow B$ を numerable principal (G, α, A) -bundles とする。functional bundle

$$\begin{aligned} \langle D, E \rangle &= \bigcup_{(x,y) \in X \times B} \text{Hom}_A(D_x, E_y) \cong (D \times E)/A, \quad D_x = q^{-1}(x) \\ (f : D_x \rightarrow E_y) &\leftrightarrow [d, f(d)], \quad (d \in D_x) \end{aligned}$$

は X 上の numerable (G, α, A) -bundle で fibre は E と同相で G -作用は

$$gf = g \cdot f(g^{-1}-) \quad (g[d, e] = [gd, ge])$$

で与えられる。(E への左 A -作用を $(a, e) \rightarrow ae^{-1}$ で与えた時の D の associate bundle。)
local object に対しては

$$\begin{aligned} ((G \times_H A) \times E)/A &\cong (G \times_H (A \times E))/A \cong G \times_H E \\ [[g, a], e] &\leftrightarrow [g, [a, e]] \leftrightarrow [g, g^{-1}e \cdot a^{-1}] \\ [[g, 1], ge] &\leftrightarrow [g, [1, e]] \leftrightarrow [g, e] \end{aligned}$$

E への H -作用は

$$h \cdot [[1, 1], e] = [[h, 1], he] = [[1, \phi(h)], he] \leftrightarrow [1, he \cdot \phi(h)^{-1}]$$

より $(h, e) \rightarrow he \cdot \phi(h)^{-1}$ で与えられる。

これより 次の分類定理を得る。

定理 8 *principal (G, α, A) -bundle $p : E \rightarrow B$ が $\forall H$ と $\forall$ crossed homomorphism $\phi : H \rightarrow A$ に対し次の H 作用に関して H -contractible になるとき、 $p : E \rightarrow B$ は universal (G, α, A) -bundle である。*

$$e \in E \rightarrow he \cdot \phi(h)^{-1}, \quad h \in H$$

4 分類空間の構成

$p : EA \rightarrow BA$ を関手的に構成される universal A -bundle で、 G は自動的にこれに作用しているものとする。このような構成は例えば、Milnor 構成、Segal 構成、May の geometric bar 構成などがある。functional bundle

$$\langle EA, EA \rangle = \bigcup_{a,b \in BA} \text{Hom}_A(p^{-1}(a), p^{-1}(b)) \cong (EA \times EA)/A$$

は BA 上の bundle で、その (同変) section は $(G-)$ bundle map と対応している。

$\mathcal{G}(A)$ を位相圏で、その対象全体 $= BA$ で、射全体 $= \langle EA, EA \rangle \cong (EA \times EA)/A$,

$\mathcal{S}(A)$ を位相圏で、その対象全体 $= EA$ で、射全体 $= \langle EA, EA \rangle \times_{BA} EA \cong EA \times EA$ なるものとする。 p は射に対し $1 \times_{BA} p$ を考えることにより連続関手 $p: \mathcal{S}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ を与える。

EG を G の translation category、即ち $obj EG = G$ 、 $mor EG = G \times G$. EG 上の右 G -作用は

$$(m, x)g = (m, xg), \quad (m, x): x \rightarrow mx \in mor EG$$

で与えられるものとする。この時

$$p: Cat(EG, \mathcal{S}(A)) \rightarrow Cat(EG, \mathcal{G}(A))$$

の幾何学的実現が求めるものとなる。ここで $Cat(EG, C)$ は連続な関手と自然変換からなる topological G -category で左 G -作用は

$$(gf)(m, x) = g \cdot f(m, xg)$$

また、 $Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ 上の右 A -作用は

$$(fa)(x) = f(x) \cdot a$$

で与えられるものとする。又、位相は、objects に対し、 G と A の作用が連続になる最も強い位相を入れることにする。

次に、 $Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ が H -作用 ($f \rightarrow hf \cdot \phi(h)^{-1}$, $h \in H$) に関して H -contractible になることを見る。

$\phi: H \rightarrow A$ を crossed homomorphism、 $F: G \times_H A \rightarrow EA$ を A -bundle map, i.e., $G \times_H A \rightarrow G/H$ の分類写像とする。 $f \in Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ を

$$f(x) = x^{-1}F([x, 1]), \quad f(m, x) \leftrightarrow (f(x), f(mx)) \in EA \times EA$$

とする。($\mathcal{S}(A) \approx EA \times EA$ より $\exists 1$ morphism $f(x) \rightarrow f(mx)$.) このとき

$$(fa)(x) = f(x) \cdot a = x^{-1}F([x, 1]) \cdot a = x^{-1}F([x, 1] \cdot xa) = x^{-1}F([x, a]),$$

$$(gf)(x) = g \cdot f(xg) = g(xg)^{-1}F([xg, 1]) = x^{-1}F([xg, 1]),$$

$$(gf)a(x) = (gf)(x) \cdot a = x^{-1}F([xg, 1]) \cdot a = x^{-1}F([xg, a]).$$

従って、

$$(hf)\phi(h)^{-1}(x) = x^{-1}F([xh, \phi(h)]^{-1}) = x^{-1}F([x, 1]) = f(x) \quad (\forall x \in G = obj EG, \forall h \in H).$$

よって $(hf)\phi(h)^{-1} = f$ だから $Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ は H -不動点を持つ。

自然変換 $\forall f' \rightarrow f$ も $\exists 1 f'(x) \rightarrow f(x)$ より決まり、同変写像となる。これは f が terminal object であることを示し、 $Cat(EG, \mathcal{S}(A))$ の H -contraction を与えている。

これらの位相圏の fat realization をとれば、任意の位相群 A に対し $p : \|Cat(EG, \mathcal{S}(A))\| \rightarrow \|Cat(EG, \mathcal{G}(A))\|$ は numerable (G, α, A) -bundle になる。従って、universal (G, α, A) -bundle が得られた。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, *K*-theory and reality, Quart. J. Math., Oxford, **17**, (1966) 367–386.
- [2] Tammo tom Dieck, Faserbündel mit Gruppenoperation, Arch. Math., **20** (1969) 136–143.
- [3] A. Dold, Partitions of unity in the theory of fibrations, Ann. of Math. **78** (1963) 223–255.
- [4] R. K. Lashof, Equivariant bundles, Illinois J. Math. **26** (1982) 257–271.
- [5] R. M. Seymour, Some functorial constructions on G -spaces, Bull. London Math. Soc. **15** (1983) 353–359.